Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Lista F de Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

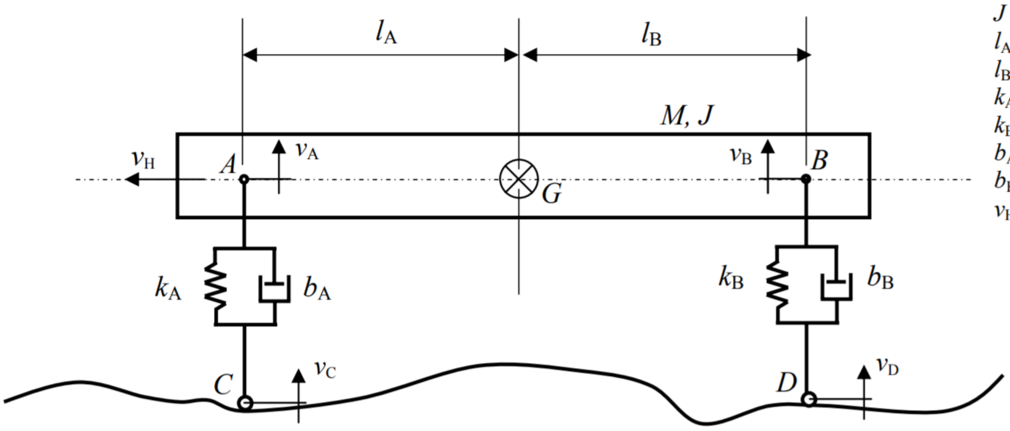
Prof. Dr. Decio Crisol Donha

Gabriela Gomes Valejo Sanches NUSP: 10772592

São Paulo

2020

Exercício 1: Simulação do modelo de ½ carro



M = 200 kg;
J = 512 kgm^2;
l_A = 0,8 m;
l_B = 0,8 m;
k_A = 10.000 N/m;
k_B = 10.000 N/m;
b_A = 200 Ns/m;
b_B = 200 Ns/m;
v_H = 10 m/s;

Primeiro são calculadas as forças nos pontos A e B:

$$F_A = -k_A x_A - b_A(v_A - v_C)$$

$$F_B - k_B x_B - b_B(v_B - v_D)$$

Agora, calcula-se as equações necessárias para construir o espaço de estados:

$$\ddot{x_G} = \frac{F_A + F_B}{M}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{l_A F_A + l_B F_B}{J}$$

$$x_A = x_G - sen\theta l_A$$

$$x_B = x_G - sen\theta l_B$$

Adotando a simplificação de ângulos pequenos, $sen\theta = \theta$, obtém-se:

$$x_A = x_G - \theta l_A$$

$$x_B = x_G + \theta l_B$$

Derivando as posições:

$$\dot{x_A} = v_G - \omega l_A$$

$$\dot{x_B} = v_G + \omega l_B$$

Usando a representação de espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ -\frac{k_A}{M} & -\frac{k_B}{M} & \frac{-b_A - b_B}{M} & \frac{b_A l_A - b_B l_B}{M} \\ \frac{l_A k_A}{J} & -\frac{l_B k_B}{J} & \frac{l_A b_A - l_B b_B}{J} & \frac{-b_A l_A^2 - b_B l_B^2}{J} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{b_A}{M} & \frac{b_B}{M} \\ -\frac{l_A b_A}{J} & \frac{l_B b_B}{J} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

Exercício 2: Simulação do modelo de ½ carro

Entrada degrau

A entrada degrau representa uma rampa de inclinação constante que o carro começa a subir. O tempo t_d é o tempo que leva para as rodas traseiras alcançarem a rampa.

$$t_d = \frac{l_A + l_B}{v_H} = 0.16s$$

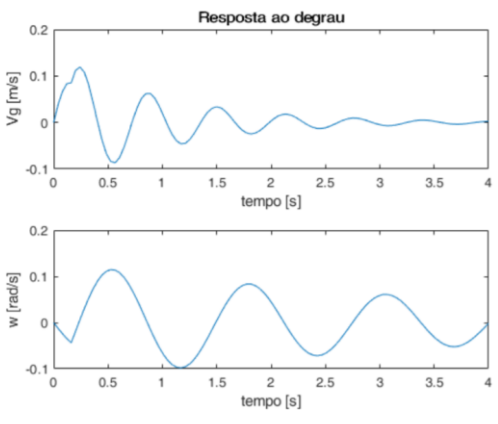


Figura 1: Entrada degrau

Entrada $sen(9.98995t)$

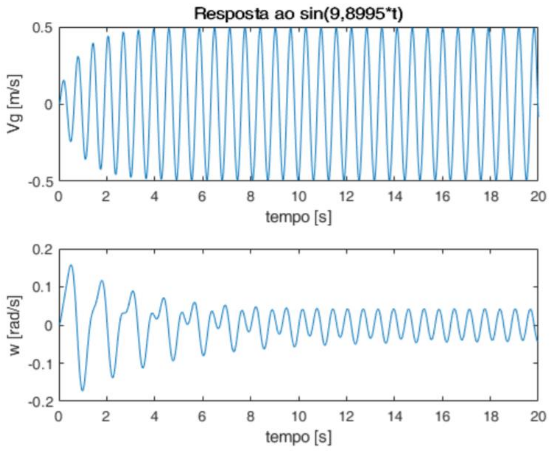


Figura 2: Entrada $sen(9.98995t)$

Entrada $sen(4.987t)$

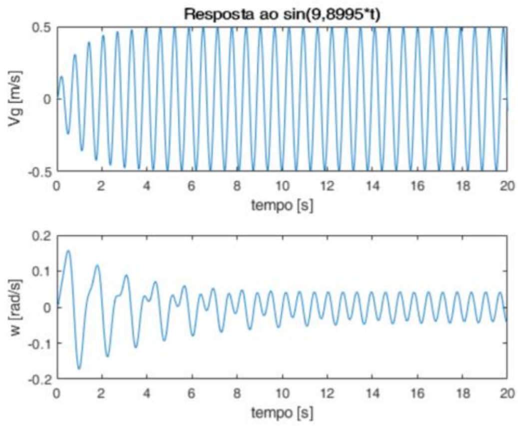


Figura 3: Entrada $sen(4.987t)$

Diagramas de Bode

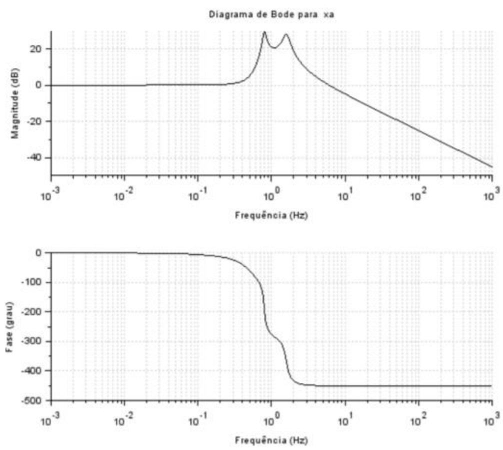


Figura 4: Diagrama de Bode para x_A

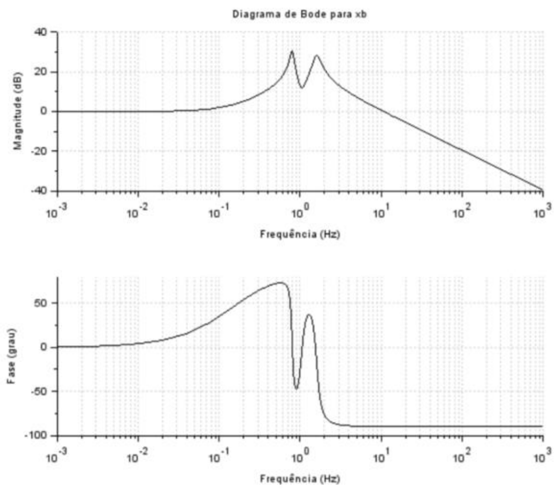


Figura 5: Diagrama de Bode para x_B

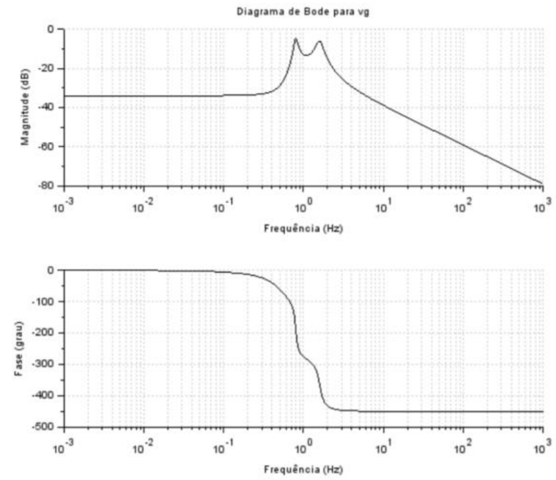


Figura 6: Diagrama de Bode para v_G

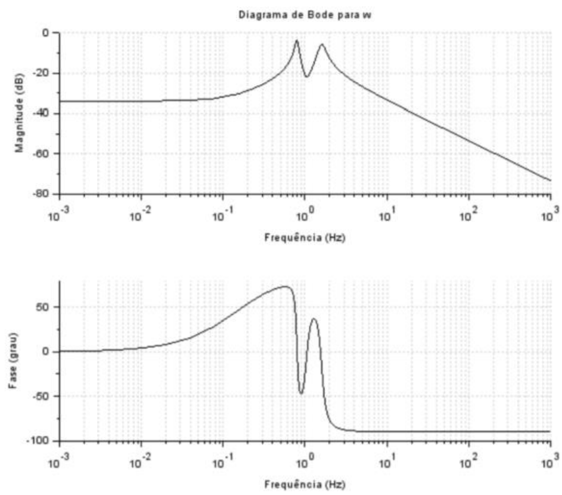
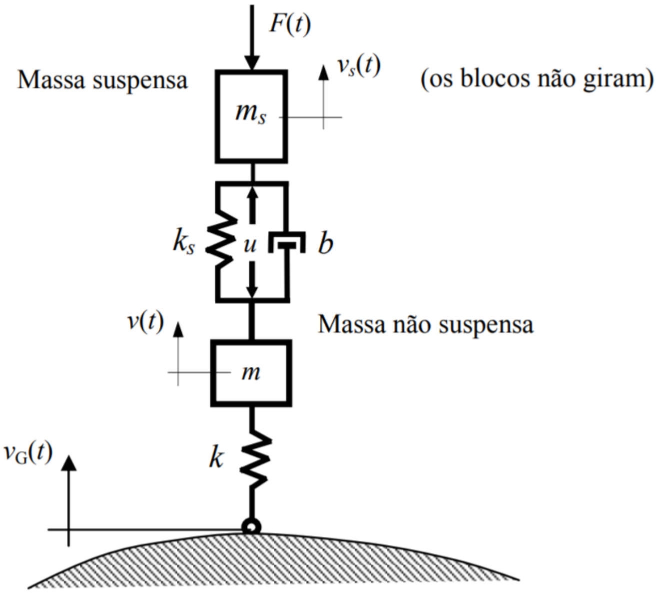


Figura 7: Diagrama de Bode para ω

Exercício

Modele um sistema não linear de suspensão veicular do tipo ¼ de carro, incluindo a massa não suspensa (2 graus de liberdade), com três entradas, a velocidade v_G imposta pelo movimento do veículo, uma força de perturbação F e uma força de controle u. Implemente a simulação do sistema não linear (considerando as não linearidades do exemplo da suspensão de ¼ de carro sem massa suspensa, e adicionando a saturação da entrada u, etc.).



Equações diferenciais:

$$\dot{x_S} = v_S$$

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{x_G} = v_G$$

Caso m e m_S não se encontrem ($l_{CS} < x_S - x$)

- Massa m sem contato com o solo ($x - x_G > l$)

$$m\dot{v} = -mg - u + F_{S_{mola}} + F_{S_{amort}}$$

$$m_S\dot{v}_S = -m_S g + u - F_{S_{mola}} - F_{S_{amort}} - F$$

- Massa m em contato com o solo e sem atingir o batente ($l_C < x - x_G < l$)

$$m\dot{v} = -mg - u + F_{S_{mola}} + F_{S_{amort}} - F_{mola}$$

$$m_S\dot{v}_S = -m_S g + u - F_{S_{mola}} - F_{S_{amort}} - F$$

- Massa m em contato com o solo e atingindo o batente ($l_C > x - x_G$)

$$m\dot{v} = -mg - u + F_{S_{mola}} + F_{S_{amort}} - F_{bat}$$
$$m_S\dot{v}_S = -m_S g + u - F_{S_{mola}} - F_{S_{amort}} - F$$

Caso as massas se encontrem

- Massa m sem contato com o solo $(x - x_G > l)$

$$m\dot{v} = -mg - u + F_{S_{amort}} + F_{bat}$$
$$m_S\dot{v}_S = -m_S g + u - F_{S_{bat}} - F_{S_{amort}} - F$$

- Massa m em contato com o solo e sem atingir o batente $(l_C < x - x_G < l)$

$$m\dot{v} = -mg - u + F_{S_{amort}} + F_{S_{bat}} - F_{mola}$$
$$m_S\dot{v}_S = -m_S g + u - F_{S_{bat}} - F_{S_{amort}} - F$$

- Massa m em contato com o solo e atingindo o batente $(l_C > x - x_G)$

$$m\dot{v} = -mg - u + F_{S_{amort}} + F_{S_{bat}} - F_{bat}$$
$$m_S\dot{v}_S = -m_S g + u - F_{S_{bat}} - F_{S_{amort}} - F$$

Sabe-se que:

$$F_{mola} = k_M(x - x_G - l)$$

$$F_{batente} = k_B(x - x_G - l)$$

$$F_{S_{mola}} = k_S(x_S - x - l_S)$$

$$F_{S_{bat}} = k_{S_B}(x_S - x - l_S)$$

$$F_{S_{amort}} = b(v_S - v)$$

Anexo

```
//Parâmetros da situção:
M = 200; //Massa [kg]
J = 512; //Momento de inércia[kg m^2]
lA = 0.8; //Comprimento A [m]
lB = 0.8; //Comprimento B [m]
kA = 10000; //Constante elástica A [N/m]
kB = 10000; //Constante elástica B [N/m]
bA = 200; //Coeficiente de amortecimento [N.s/m]
bB = 200; //Coeficiente de amortecimento [N.s/m]
vH = 10; //Velocidade horizontal [m/s]
td = (lA + lB)/vH; //Tempo de resposta de D [s]
//Condições de simulação:
t_inicial = 0;
t_final = 1;
t = linspace(t_inicial,t_final,1000);
simulação = 3;
//Condições iniciais:
xA0 = 0;
xB0 = 0;
vG0 = 0;
w0 = 0;
```

```
//Input das entradas:
if simulação == 1 then
 function funcao=u1(t), funcao = t, endfunction
 if t < td then
 function funcao=u2(t), funcao = 0, endfunction
 else
 function funcao=u2(t), funcao = t, endfunction
 end

 function funcao=u3(t), funcao = 1, endfunction
 if t < td then
 function funcao=u4(t), funcao = 0, endfunction
 else
 function funcao=u4(t), funcao = 1, endfunction
 end
elseif simulação == 2 then
 function funcao=u1(t), funcao = -cos(9.8995*t)/9.8995, endfunction
 function funcao=u2(t), funcao = -cos(9.8995*t)/9.8995, endfunction
 function funcao=u3(t), funcao = sin(9.8995*t), endfunction
 function funcao=u4(t), funcao = sin(9.8995*t), endfunction
elseif simulação == 3 then
 function funcao=u1(t), funcao = -cos(9.8995*t)/4.9875, endfunction
 function funcao=u2(t), funcao = cos(4.9875*t)/4.9875, endfunction
 function funcao=u3(t), funcao = sin(4.9875*t), endfunction

 function funcao=u4(t), funcao = -sin(4.9875*t), endfunction
end
//Definição do vetor de estados:
funcprot(0)
 function dy=estados(t, y)
 dy(1) = y(3) - lA*y(4);
 dy(2) = y(3) + lB*y(4);
 dy(3) = -(kA/M)*y(1) - (kB/M)*y(2)- ((bA + bB)/M)*y(3) + ((bA*lA -
bB*lB)/M)*y(4) + (kA/M)*u1(t) + (kB/M)*u2(t) + (bA/M)*u3(t) +
(bB/M)*u4(t);
 dy(4) = (lA*kA/J)*y(1) - (lB*kB/J)*y(2) + ((lA*bA - lB*bB)/J)*y(3) -
((bA*lA^2 - bB*lB^2)/M)*y(4) - (lA*kA/J)*u1(t) + (lB*kB/J)*u2(t) -
(lA*bA/J)*u3(t) + (lB*bB/J)*u4(t);
 endfunction
result = ode([xA0;xB0;vG0;w0],0,t,estados);
xA = result(1,:);
xB = result(2,:);
vG = result(3,:);
w = result(4,:);
scf(1)
xtitle("Velocidade do centro de massa");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Velocidade [m/s]");
plot(t,vG);
scf(2)
xtitle("Velocidade angular do corpo");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Velocidade angular [rad/s]");
plot(t,w);
//Análise das funções de transferência:
A = [0,0,1,-lA;0,0,1,lB;-kA/M,-kB/M,-(bA+bB)/M,(bA*lA - bB*lB)/M;lA*kA/J,-
```

```
lB*kB/J,(lA*bA-lB*bB)/J,-(bA*lA^2 + bB*lB^2)/J];
B = [0,0,0,0;0,0,0,0;kA/M,kB/M,bA/M,bB/M;-lA*kA/J,lB*kB/J,-lA*bA/J,lB*bB/J];
sl = syslin('c',A,B,[1,1,1,1]);
h = ss2tf(sl);
scf(3);
bode(h(1,1));
xtitle("Diagrama de Bode para xa");
scf(4);
bode(h(1,2));
xtitle("Diagrama de Bode para xb");

scf(5);
bode(h(1,3));
xtitle("Diagrama de Bode para vg");
scf(6);
bode(h(1,4));
xtitle("Diagrama de Bode para w");
```