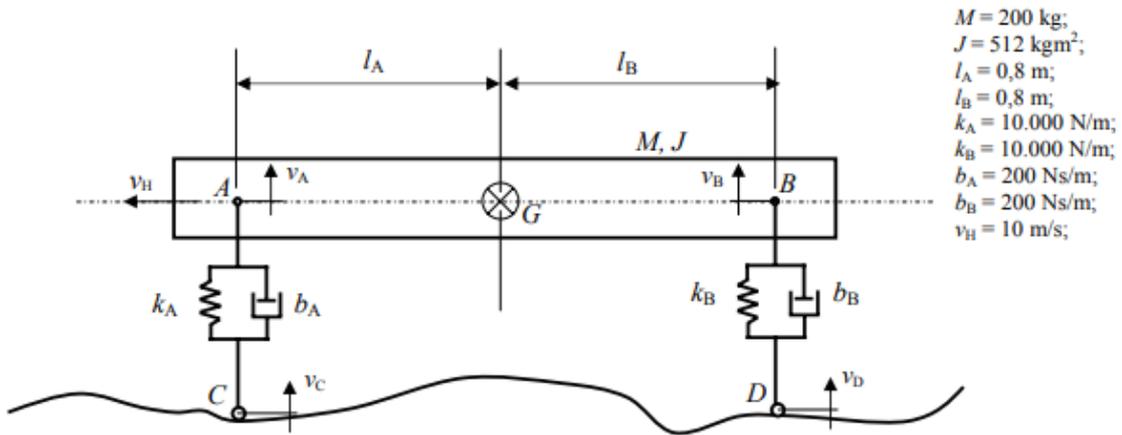


## 1. Obtenha o modelo de 1/2 carro:



### Modelo da dinâmica vertical:

A dinâmica referente ao movimento horizontal do centro de massa é desprezada, ou seja, a velocidade horizontal de  $G$  ( $v_H$ ) é constante, logo o modelo deve ter 4 variáveis de estado:

- velocidade vertical  $v_G$  do centro de massa  $G$ .
- velocidade angular  $\omega$  de  $AB$  em torno de  $G$ .
- elongação  $x_A$  da mola de rigidez  $k_A$ .
- elongação  $x_B$  da mola de rigidez  $k_B$ .

Entradas: velocidades verticais ( $v_C$  e  $v_D$ ) dos pontos  $C$  e  $D$ .

Saídas: velocidade vertical  $v_G$  do centro de massa  $G$  e velocidade angular  $\omega$  de  $AB$  em torno de  $G$ .

### Hipóteses simplificadoras:

- Movimento apenas no plano da página.
- $AC$  e  $BD$  permanecem sempre na vertical.
- Considere molas e amortecedores lineares.
- O deslocamento angular do segmento  $AB$  é pequeno (tal que  $\sin\alpha \cong \tan\alpha \cong \alpha$  e  $\cos\alpha \cong 1$ ).

As forças que agem no ponto A e B são dadas por:

$$F_A = -k_A x_A + b_A (v_C - v_A) \quad (1)$$

$$F_B = -k_B x_B + b_B (v_D - v_B) \quad (2)$$

Pelo teorema do baricentro temos:

$$M\ddot{x}_G = F_A + F_B \quad (3)$$

Pelo teorema do momento angular temos:

$$J\ddot{\theta}_G = -F_A l_A + F_B l_B \quad (4)$$

Pela geometria da barra:

$$x_A = x_G - l_A \theta_G \quad (5)$$

$$x_B = x_G + l_B \theta_G \quad (6)$$

Derivando, ficamos com:

$$v_A = v_G - l_A w \quad (7)$$

$$v_B = v_G + l_B w \quad (8)$$

Substituindo (5), (6), (7) e (8) nas relações (1) e (2) ficamos com:

$$F_A = -k_A x_A + b_A(v_C - v_G + l_A w) \quad (9)$$

$$F_B = -k_B x_B + b_B(v_D - v_G - l_B w) \quad (10)$$

Substituindo (9) e (10) em (3) e (4), ficamos com:

$$\ddot{x}_G = \frac{-k_A x_A + b_A(v_C - v_G - l_A w) - k_B x_B + b_B(v_D - v_G + l_B w)}{M} \quad (3)$$

$$\ddot{\theta}_G = \frac{-(-k_A x_A + b_A(v_C - v_G - l_A w))l_A + (-k_B x_B + b_B(v_D - v_G + l_B w))l_B}{J} \quad (4)$$

Escrevendo na forma de espaço de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Com os seguintes vetores:

$$\text{Vetor de estados: } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\text{Vetor de entradas: } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}$$

$$\text{Vetor de saídas: } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} v_G \\ \omega \end{bmatrix}$$

Temos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ -\frac{k_A}{M} & -\frac{k_B}{M} & -\frac{b_A + b_B}{M} & \frac{b_A l_A - b_B l_B}{M} \\ \frac{k_A l_A}{J} & -\frac{k_B l_B}{J} & \frac{b_A l_A - b_B l_B}{J} & \frac{b_A l_A^2 - b_B l_B^2}{J} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{b_A}{M} & \frac{b_B}{M} \\ -\frac{b_A l_A}{J} & \frac{b_B l_B}{J} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2. Simulação do modelo de 1/2 carro

Simule o sistema de suspensão para entrada do tipo degrau. Considere condições iniciais nulas e tempo de simulação de 4 segundos.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} \quad v_C = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad v_D = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_d \\ 1 & \text{se } t \geq t_d \end{cases}$$

Explique o tipo de obstáculo físico que é representado pela entrada degrau, e explique por que a entrada  $v_D$  ocorre  $t_d$  segundos após a entrada  $v_C$  (deve-se calcular  $t_d$  antes de se fazer a simulação).

Mostre os gráficos das saídas pelo tempo.

Simule o sistema de suspensão para entrada do tipo seno. Considere condições iniciais nulas. Simule por tempo suficiente para mostrar cerca de 20 períodos.

Entradas (observe que são duas simulações diferentes):

$$v_C = v_D = \text{sen}(9,8995t) \\ v_C = -v_D = \text{sen}(4,9875t)$$

Repita as simulações para valores maiores e menores de frequência. Compare os resultados.

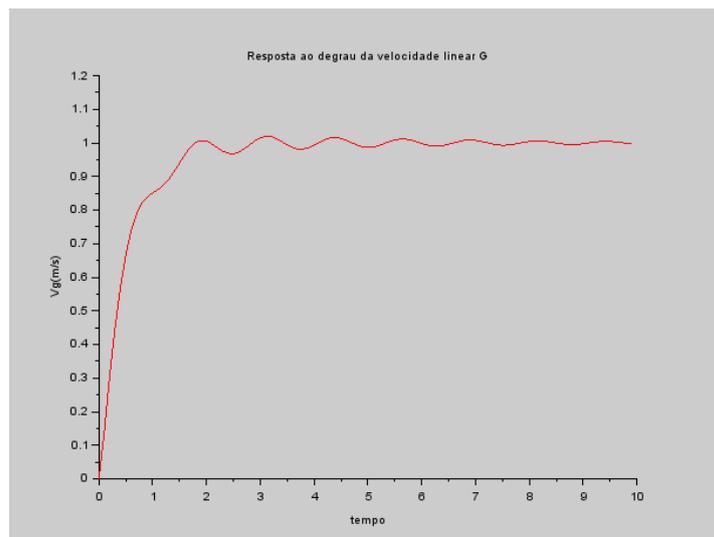
Mostre os gráficos das saídas pelo tempo.

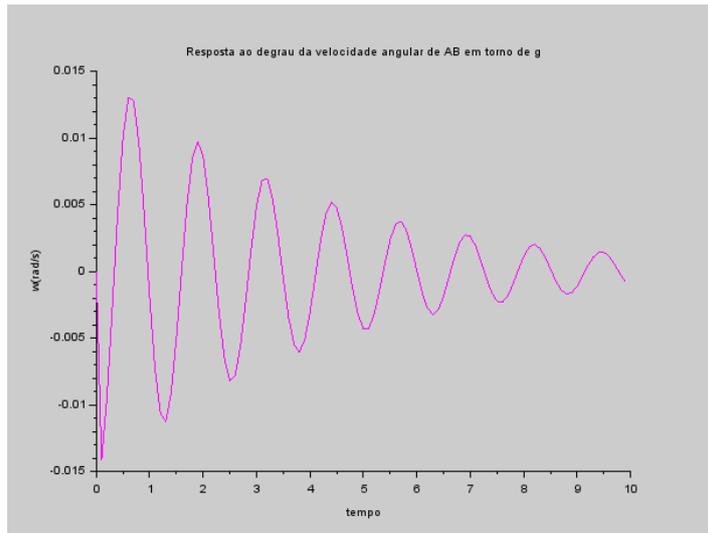
Calcule os coeficientes de amortecimento, as frequências naturais, as frequências naturais amortecidas e as frequências de ressonância.

O obstáculo físico para o degrau, cujo os gráficos se encontram abaixo é um aclime constante positivo, como por exemplo, numa subida com inclinação fixa. A entrada em  $v_d$  ocorre após  $t_d$ , tempo necessário para a roda de trás alcançar o obstáculo após percorrido o comprimento da distância entra as rodas. Sendo assim,  $t_d$  é dado por:

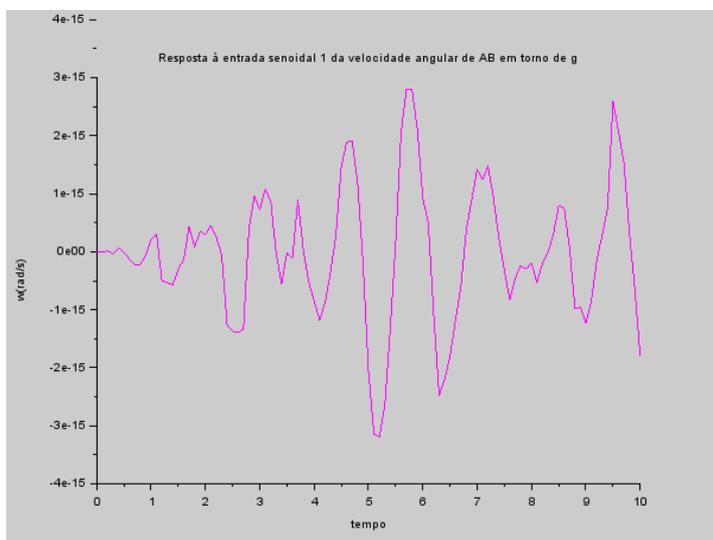
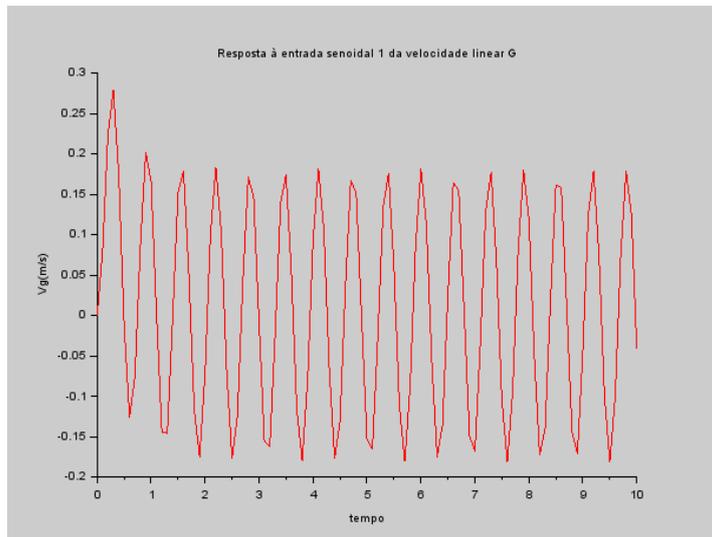
$$t_d = (l_A + l_B)/v_n = 0,16s$$

- Gráficos para uma entrada tipo degrau:

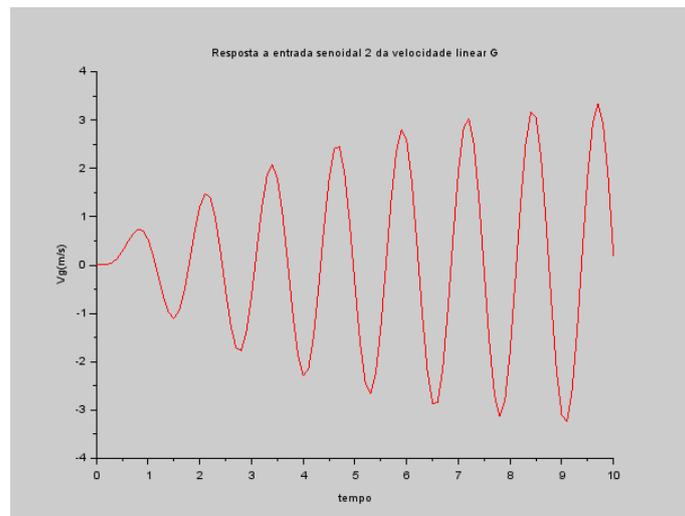
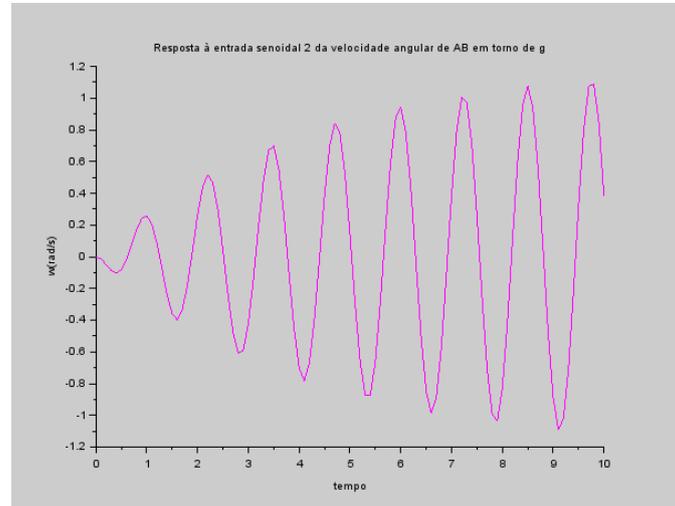




- Gráficos para entrada senoidal  $v_c = v_d$ :



- Gráficos para entrada senoidal  $v_c = -v_d$ :



### 3. Análise de resposta em frequência

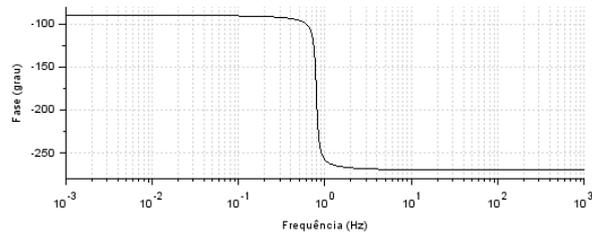
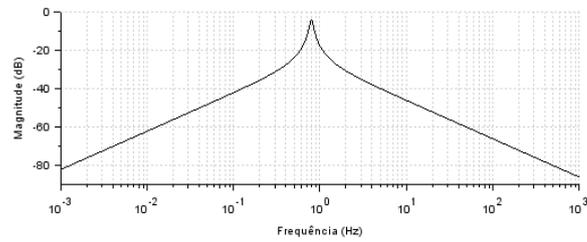
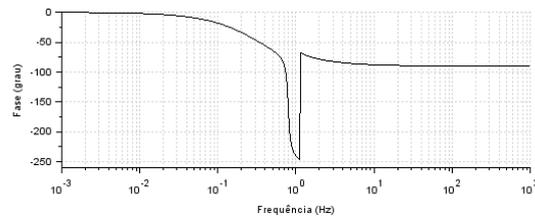
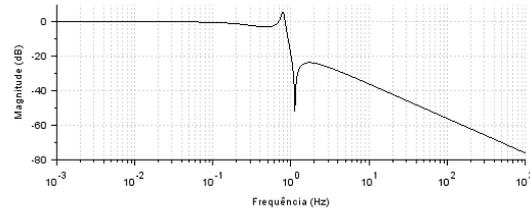
Obtenha os diagramas de Bode do sistema de suspensão e interprete os resultados.

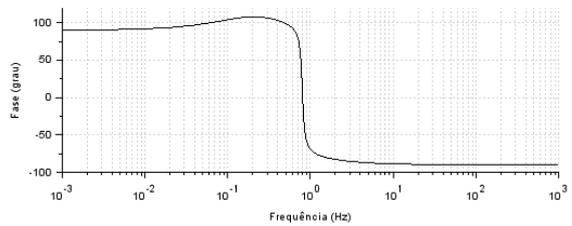
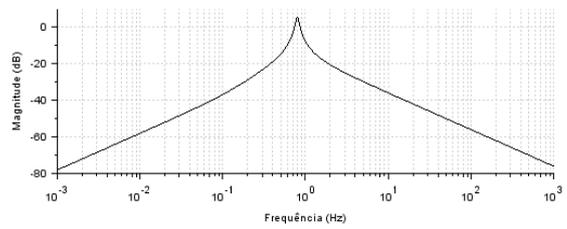
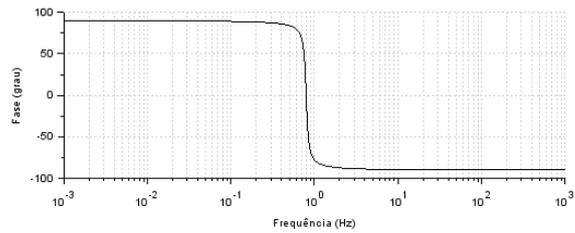
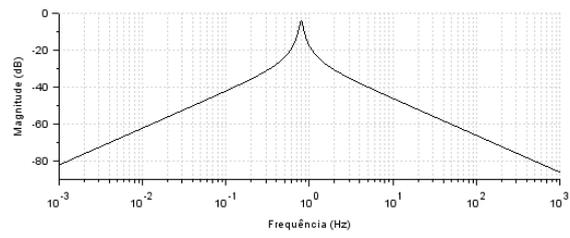
As quatro funções transferências, considerando que há 2 entradas e 2 saídas, obtidas são dadas através da simulação, são dadas por:

$$\frac{-3.553D-14 - 50s + 1s^2}{50 + 26s + 2.5s^2 + s^3} \quad \frac{50 + 51s + 1s^2}{50 + 26s + 2.5s^2 + s^3}$$

$$\frac{-15.625 - 0.3125s}{25 + 0.5s + s^2} \quad \frac{15.625 + 0.3125s}{25 + 0.5s + s^2}$$

Foram obtidos os seguintes diagramas de bode para cada função transferência:





Podemos ver que a simetria do sistema faz com que as duas primeiras funções transferências sejam bastante parecidas e que as últimas duas sejam opostas. Podemos ver em todos os diagramas que a frequência natural, para  $v_g$ , ocorre em torno de  $10 \text{ rad/s}$  devido ao pico observado para esse valor. Já para  $\omega$ , a frequência natural ocorre em torno de  $5 \text{ rad/s}$ .

- Código

```

1 clear
2 clc
3
4 //Parâmetros
5 M=200;
6 J=512;
7 la=0.8;
8 lb=0.8;
9 ka=10000;
10 kb=10000;
11 ba=200;
12 bb=200;
13 vh=10;
14 td=(la+lb)/vh;
15
16 //Definição-das-matrizes-
17 A=[0,0,1,-la;0,0,1,lb;ka/M,-kb/M,-(ba+bb)/M,(bb*lb+ba*la)/M;ka*la/J,-kb*lb/J,(-bb*lb+ba*la)/J,-(bb*lb^2+ba*la^2)/J];
18 B=[-1,0;0,-1;ba/M,bb/M;-ba*la/J,bb*lb/J];
19 C=[0,0,1,0;0,0,0,1];
20 D=[0,0;0,0];
21 x0=[0,0,0,0]';
22 //Degrau
23 dt=0.1;
24 u=ones(2,10/dt);
25 for t=0:dt:td-dt,
26 ... u(2,(t/dt)+1)=0;
27 end
28 t=0:0.1:10-dt;
29
30 sist=syslin('c',A, B, C, D);
31 [y,x]=csim(u,t,sist,x0);
32
33
34 //Gráficos-degrau
35 figure(1)
36 xset('window',1)
37 xtitle('Resposta-ao-degrau-da-velocidade-linear-G','tempo','Vg>> (m/s)')
38 vg=y(1,:);
39 w=y(2,:);
40 plot2d(t,vg,5)
41 figure(2)
42 xtitle('Resposta-ao-degrau-da-velocidade-angular-de-AB-em-torno-de-g','tempo','w(rad/s)')
43 plot2d(t,w,6)
44 //Entrada>> Senoidal
45 i=1
46 for t2 = 0:0.1:10
47 ... u2(1,i) = sin(9.8995*t2);
48
49 ... u2(2,i) = sin(9.8995*t2);
50
51 ... u3(1,i) = sin(4.9875*t2);
52
53 ... u3(2,i) = -sin(4.9875*t2);
54 ... i = i+1
55
56 end
57 t2=0:0.1:10;
58 xo=[0,0,0,0]';
59 sist=syslin('c',A, B, C, D);
60 [y2,x2]=csim(u2,t2,sist,xo);
61 [y3,x3]=csim(u3,t2,sist,xo);
62 vg2 = y2(1,:);
63 w2 = y2(2,:);
64 vg3 = y3(1,:);
65 w3 = y3(2,:);
66 //gráfico-senoidal-em-fase
67 figure(3)
68 xtitle('Resposta-à-entrada-senoidal-1-da-velocidade-linear-G','tempo','Vg>> (m/s)')

```

```
plot2d(t2,vg3,5)
figure(6)
xlabel('Resposta à entrada senoidal 2 da velocidade angular de AB em torno de g', 'tempo', 'w(rad/s)')
)
plot2d(t2,w3,6)
//Análise de frequência

FT=ss2tf(sist)
print('FT',FT)
k=5
for i=1:2
  for j=1:2
    k=k+1
    scf(2+k)
    bode(FT(i,j))
  end
end
end
```