Escola Politécnica da USP

Aluno: Ives Caero Vieira   NUSP: 10355551

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos - Ex 10/11.

Ex1).
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\ -12 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

a) Verificar estabilidade do sistema de duas formas diferentes

* Função de Transferência

$$s(x_1) = 2x_2 \qquad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{s x_1}{2}$$

$$s(x_2) = -12x_1 - 4x_2 + U \qquad x_1(s^2 + 24 + 4s) = 2U$$

$$\therefore \boxed{\frac{x_1}{U} = \frac{2}{s^2 + 4s + 24}} \qquad \boxed{\frac{x_2}{U} = \frac{s}{s^2+4s+24}}$$

Calculando polos: $\begin{cases} p_1 = -2 - 2\sqrt{5}i \\ p_2 = -2 + 2\sqrt{5}i \end{cases}$

* Auto valores.

$$\det\begin{bmatrix}-\lambda & 2\\ -12 & -4-\lambda\end{bmatrix} = \lambda(4+\lambda) + 24 = 0 \rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 24 = 0$$

$$\hookrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = -2 \pm 2\sqrt{5}i \\ \lambda_2 = -2 \pm 2\sqrt{5}i\end{cases}$$

b) Comparando a função de transferência com a solução genérica, vem:

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{\omega_n^2} \rightarrow \boxed{\omega_n = 2\sqrt{6}\ \text{rad/s}} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\hookrightarrow \boxed{k = 24\,N/m}$$

$$\frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{4}{24} \Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \rightarrow \boxed{c = \frac{4\,Ns}{m}}.$$

c)
$$\omega_d = \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n \Rightarrow \boxed{\omega_d = 9{,}47\ \text{rad/s}}$$

Frequência de ressonância → marca $\boxed{\frac{\omega}{\omega_n} = 1}$

Ex2.

a) $Y_1 = E_1 G_1$ $\qquad E_2 = U_2 - Y_1 G_3$

$E_1 = U_1 - Y_2 G_2$

$Y_2 = E_2 G_4$

$$\boxed{Y_1 = (U_1 - Y_2 G_3) G_1 = \frac{U_1 G_1 - U_2 G_1 G_3 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}}$$

$$\boxed{Y_2 = \frac{U_2 G_4 - G_1 G_2 G_4 U_1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}}$$

b) $\boxed{E_1 = U_1 - Y_2 G_3 = \frac{U_1 - U_2 G_3 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}}$ e $\boxed{E_2 = \frac{Y_2}{G_2} = \frac{U_2 G_4 - G_1 G_2 G_4 U_1}{G_2 (1 - G_1 G_2 G_3 G_4)}}$

Ex3. $G_1(s) = \dfrac{0{,}0102 s^4 + 0{,}0096 s^3 - 0{,}0636 s^2 + 0{,}0001 s}{s^4 + 0{,}4511 s^3 + 0{,}3015 s^2 + 0{,}0989 s}$

a) Polos encontrados resolvendo $x^4 + 0{,}4511 x^3 + 0{,}3015 x^2 + 0{,}0989 x = 0$

↳ $p_1 = 0$

$p_2 = -0{,}043 - 0{,}518 i$

$p_3 = -0{,}043 + 0{,}518 i$

$p_4 = -0{,}366$

b) Zeros do sistema: obtidos resolvendo $0{,}0102 x^4 + 0{,}0096 x^3 - 0{,}0636 x^2 + 0{,}0001 x = 0$

↳ $z_1 = 2{,}281$ $\qquad z_3 = 0$

$z_2 = 0{,}002$ $\qquad z_4 = -2{,}733$

c) Sistema é estável por não possuir nenhum polo com parte real positiva

d) Polos imaginarios são dominantes

e) Sistema é de fase não mínima, devido a posição dos zeros.

f) Criterio de Routh Hurwitz

s^3	1	0,3015
s^2	0,4511	0,0989
s^1	0,0823	0
s^0	0,0989	0

↳ Sem valores negativos (estável).

g) Analise dos polos dominantes

$p_d = -0{,}043 \pm 0{,}518 i$

$\boxed{\omega_n = \sqrt{(-0{,}043)^2 + 0{,}518^2} = 0{,}519 \text{ rad/s}}$ → $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ → $\boxed{\omega_D = 0{,}516 \text{ rad/s}}$

$\boxed{\xi = \dfrac{0{,}043}{0{,}518} = 0{,}082}$