Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Lista G

Aluno: Bruno Akira Oshiro 10771667

Dezembro
2020

Conteúdo

1 Obtenha o modelo de 1/2 carro

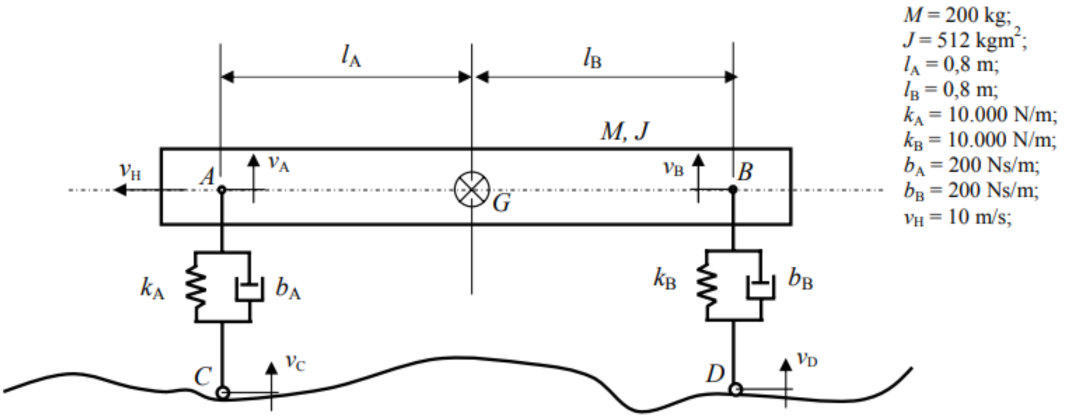

Figura 1: Modelo de 1/2 carro

Primeiramente, calcula-se as forças nos pontos de A e B:

$$F_A = -k_A x_A - b_A(v_A - v_C) \tag{1}$$

$$F_B = -k_B x_B - b_B(v_B - v_D) \tag{2}$$

Agora, calcula-se as equações para o espaço de estados:

$$\ddot{x}_G = \frac{F_A + F_B}{M} \tag{3}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{l_A F_A + l_B F_B}{J} \tag{4}$$

$$x_A = x_G - sen(\theta) l_A = x_G - \theta l_A \tag{5}$$

$$x_B = x_G + sen(\theta) l_B = x_G + \theta l_B \tag{6}$$

Derivando as equações de posição:

$$\dot{x}_A = v_G - \omega l_A \tag{7}$$

$$\dot{x}_B = v_G + \omega l_B \tag{8}$$

Com as equações 3,4,7 e 8 podemos montar o espaço de estados:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ -k_A/M & -k_B/M & (-b_A - b_B)/M & (b_A l_A - b_B l_B)/M \\ l_A k_A/J & -l_B k_B/J & (l_A b_A - l_B b_B)/J & (-b_A l_A^2 - b_B l_B^2)/J \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_A/M & b_B/M \\ -l_A b_A/J & l_B b_B/M \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$D = 0 \tag{12}$$

2 Simulação do modelo de 1/2 carro

2.0.1 Entrada degrau

A entrada degrau representa uma rampa com angulação constante ao qual o carro começa a subir. O tempo t_d é o tempo que o pneu traseiro demora para chegar a essa rampa. Assim calcula-se t_d:

$$t_d = (l_A + l_B)/v_H = 0.16s \tag{13}$$

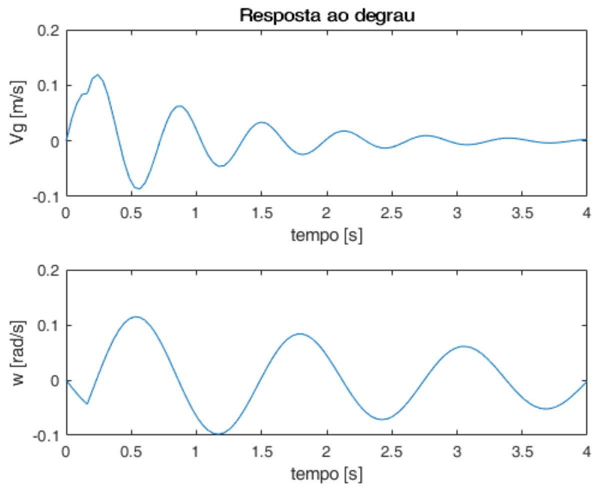

Figura 2: Resposta ao degrau

2.0.2 Entrada sen(9,98995t)

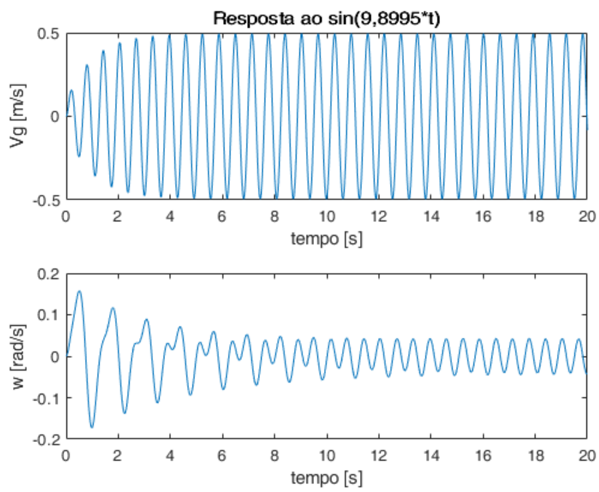

Figura 3: Resposta ao sen(9,98995t)

2.0.3 Entrada sen(4,987t)

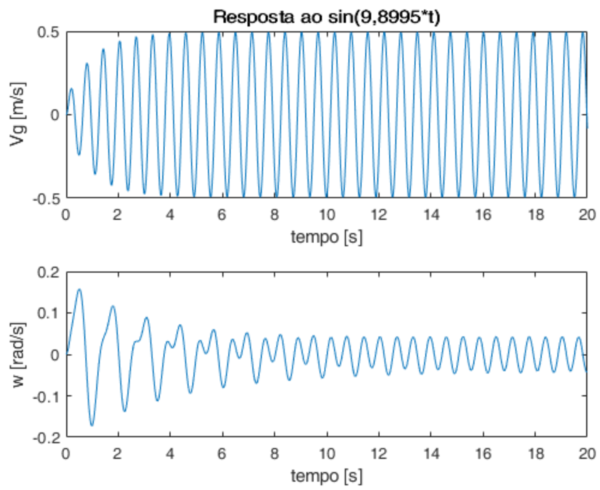

Figura 4: Resposta ao sen(4,987t)

2.1 Bode para as entradas degrau

Plotou-se os diagramas de bode para as entradas degrau da seção anterior

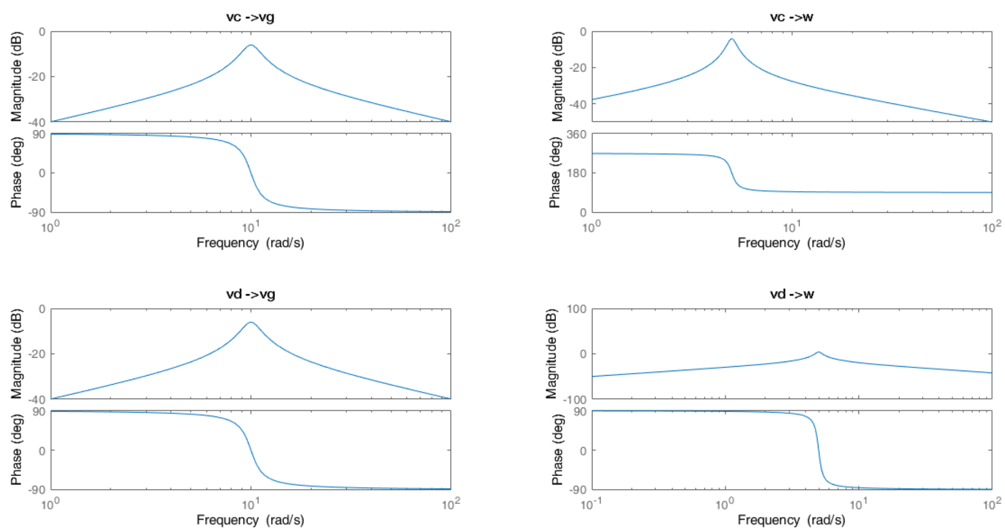

Figura 5: Bode para as entradas degrau

3 Exercício

Modele um sistema não linear de suspensão veicular do tipo $\frac{1}{4}$ de carro, incluindo a massa não suspensa (2 graus de liberdade), com três entradas, a velocidade vG imposta pelo movimento do veículo, uma força de perturbação F e uma força de controle u. Implemente a simulação do sistema não linear (considerando as não linearidades do exemplo da suspensão de $\frac{1}{4}$ de carro sem massa suspensa, e adicionando a saturação da entrada u, etc.).

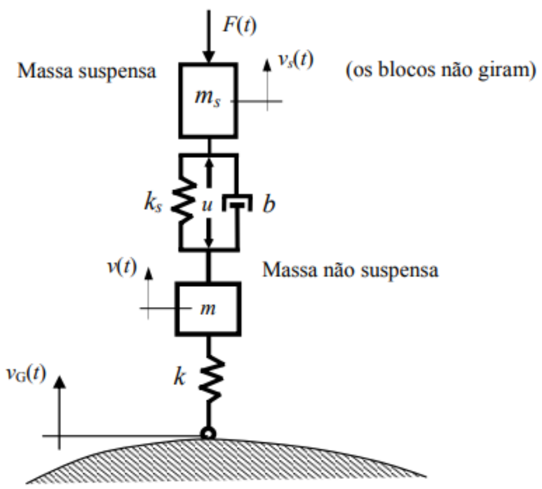

Figura 6: Modelo de 1/2 carro

Equações diferenciais:

$$\dot{x}_s = v_s \tag{14}$$

$$\dot{x} = v \tag{15}$$

$$\dot{x}_G = v_G \tag{16}$$

Temos diferentes condições para o restante das equações diferenciais:

3.1 Quando as massas m e m$_s$*nãoseencontram*

Condição: $l_{CS} < x_s - x$

3.1.1 massa m não está em contato com o solo

Condições: $x - x_G > l$

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -mg - u + F_{s_{mola}} + F_{s_{amort}} \\ m_s\dot{v}_s &= -m_s g + u - F_{s_{mola}} - F_{s_{amort}} - F \end{aligned} \tag{17}$$

3.1.2 massa m está em contato com o solo, mas não atingiu o batente

Condições: $lc < x - x_G < l$

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -mg - u + F_{s_{mola}} + F_{s_{amort}} - F_{mola} \\ m_s\dot{v}_s &= -m_s g + u - F_{s_{mola}} - F_{s_{amort}} - F \end{aligned} \tag{18}$$

3.1.3 massa m está em contato com o solo e atingiu o batente

Condições: $lc > x - x_G$

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -mg - u + F_{s_{mola}} + F_{s_{amort}} - F_{bat} \\ m_s\dot{v}_s &= -m_s g + u - F_{s_{mola}} - F_{s_{amort}} - F \end{aligned} \tag{19}$$

3.2 Caso as massas se encontrem

Condição: $l_{CS} > x_s - x$

3.2.1 massa m não está em contato com o solo

Condições: $x - x_G > l$

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -mg - u + F_{s_{bat}} + F_{s_{amort}} \\ m_s\dot{v}_s &= -m_s g + u - F_{s_{bat}} - F_{s_{amort}} - F \end{aligned} \tag{20}$$

3.2.2 massa m está em contato com o solo, mas não atingiu o batente

Condições: $lc < x - x_G < l$

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -mg - u + F_{s_{bat}} + F_{s_{amort}} - F_{mola} \\ m_s\dot{v}_s &= -m_s g + u - F_{s_{bat}} - F_{s_{amort}} - F \end{aligned} \tag{21}$$

3.2.3 massa m está em contato com o solo e atingiu o batente

Condições: $lc > x - x_G$

$$
\begin{aligned}
m\dot{v} &= -mg - u + F_{s_{bat}} + F_{s_{amort}} - F_{bat} \\
m_s\dot{v}_s &= -m_s g + u - F_{s_{bat}} - F_{s_{amort}} - F
\end{aligned} \tag{22}
$$

Sabemos ainda que:

$$
\begin{aligned}
F_{mola} &= k_M(x - x_G - l) \\
F_{batente} &= k_B(x - x_G - l) \\
F_{S_{mola}} &= k_s(x_s - x - l_s) \\
F_{s_{bat}} &= k_{s_B}(x_s - x - l_s) \\
F_{s_{amo}} &= b(v_s - v)
\end{aligned} \tag{23}
$$

E nosso vetor de estados:

$$
\begin{bmatrix} x \\ x_s \\ v \\ v_s \\ x_G \end{bmatrix} \tag{24}
$$

Por fim, simulou-se o sistema com os seguintes parâmetros:

m=250; // massa [kg]

ms=m //massa de 2

b=1885; // constante de amortecimento [Ns/m]

g=9.8; // aceleracao da gravidade [m/s2]

kM=14213; // rigidez da mola [N/m]

ks=kM; // rigidez da mola s

kB=142130; // rigidez do batente [N/m]

ksB=kB // rigidez do batente entre massas [N/m]

l=0.4; // comprimento natural da mola [m] ls=l

lc=0.1; // comprimento da mola totalmente comprimida [m]

lcs=lc; // comprimento da mola s totalmente comprimida [m]

F=100; //entrada F

u=100; //entrada u

Chegou-se aos seguintes resultados:

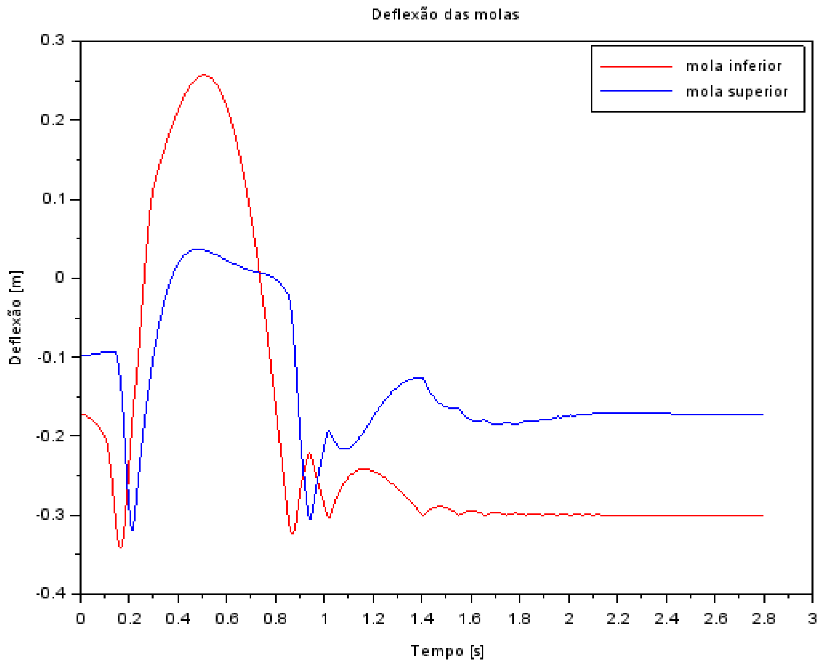

Figura 7: Deflexão das molas ao longo do tempo

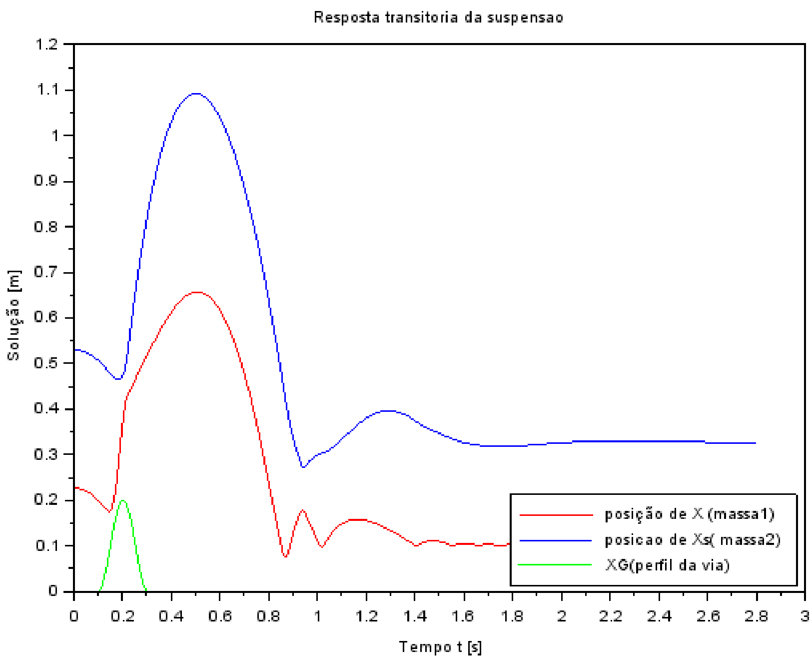

Figura 8: posição dos CGs

4 Programas utilizados

4.0.1 1/2 Carro em MATLAB

```
clc
clear all

M = 200 %kg;
J = 512 %kgm2;
lA = 0.8 %m;
lB = 0.8 %m;
kA = 10000 %N/m;
kB = 10000 %N/m;
bA = 200 %Ns/m;
bB = 200 %Ns/m;
vH = 10 %m/s;
n=100
t=linspace(0,4,n)
td=0.16
```

```
vc=ones(1,n)
vd=zeros(1,n)

%vc=sin(9.8995*t)
%vd=sin(9.8995*t)

%vc=sin(4.9875*t)
%vd=sin(4.9875*t)

for i=1:n
    if t(i)>=td
        i
        vd(i)=1
    end
end

%Espa o de estados
A=[0,0,1,-lA;
   0,0,1, lB;
   -kA/M,-kB/M,(-bA-bB)/M,(bA*lA-bB*lB)/M;
   lA*kA/J,-lB*kB/J,(lA*bA-lB*bB)/J,(-bA*lA^2-bB*lB^2)/J]

B=[0 , 0 ;
0 , 0 ;
bA/M , bB/M ;
-lA*bA/J , lB*bB/M]

C=[0,0,1,0;
   0,0,0,1]
D=0

u=[vc;vd]

%resolvendo o espa o de estados
sys = ss(A,B,C,D);
system = lsim(sys,u,t,[0,0,0,0]);

%resultados
vg=system(:,1)'
```

```
w=system(:,2)'

%plotando os graficos
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,vg)
ylabel('Vg [m/s]')
xlabel('tempo [s]')
title('Resposta ao sin(9,8995*t)')

subplot(2,1,2)
plot(t,w)
ylabel('w [rad/s]')
xlabel('tempo [s]')


figure(2)
subplot(2,2,1)
bode(sys(1,1))
title('vc ->vg')

subplot(2,2,2)
bode(sys(2,1))
title('vc ->w')

subplot(2,2,3)
bode(sys(1,2))
title('vd ->vg')

subplot(2,2,4)
bode(sys(2,2))
title('vd ->w')
```

4.0.2 Exercicio em scilab

```
// Definicao do arquivo que implementa a simulacao:
clear all
close

function [xdot]=sistema(t,x,entrada)
    [F,u,vG] = entrada(t);
    Fmola=kM*(x(1)-x(5)-l)
    Fbat=kB*(x(1)-x(5)-l)
    Fsmola=ks*(x(2)-x(1)-ls)
    Fsbat=ksB*(x(2)-x(1)-ls)
    Fsamo=b*(x(4)-x(3))

    if (x(2)-x(1))>lcs then
        if (x(1)-x(5))>l then
            xdot = [x(3);x(4);-g + 1/m*(- u+Fsmola+Fsamo);-g+ (u - F -Fsmola-Fsamo)/ms;vG];
        elseif (x(1)-x(5))<lc then xdot=[x(3);x(4);-g + 1/m*(-u+Fsmola+Fsamo-Fbat);-g+ (u - F -Fsmola-Fsamo)/ ms;vG];
        else xdot=[x(3);x(4);-g + 1/m*(-u+Fsmola+Fsamo-Fmola);-g+ (u - F -Fsmola-Fsamo)/ ms;vG];
        end
    end

    if (x(2)-x(1))<lcs then //quando as massas se encontram
        if (x(1)-x(5))>l then
            xdot = [x(3);x(4);-g + 1/m*(- u+Fsbat+Fsamo);-g+ (u - F -Fsbat-Fsamo)/ms;vG];
        elseif (x(1)-x(5))<lc then xdot=[x(3);x(4);-g + 1/m*(-u+Fsbat+Fsamo-Fbat);-g+ (u - F -Fsbat-Fsamo)/ ms;vG];
        else xdot=[x(3);x(4);-g + 1/m*(-u+Fsbat+Fsamo-Fmola);-g+ (u - F -Fsbat-Fsamo)/ ms;vG];
        end
    end
endfunction

function[F,u,vG]=entrada(t)
```

```
    u=100
    F=100
if t < ti then
    vG = 0;
elseif t < (ti + lB / vc) then
    vG = (hB * 2*pi * vc / (2*lB)) * sin((vc * 2*pi /lB) * (t - ti));
else
    vG = 0;

end
return
endfunction

// Definir os valores dos parametros
m=250; // massa [kg]
ms=m //massa de 2
b=1885; // constante de amortecimento [Ns/m]
g=9.8; // aceleracao da gravidade [m/s2]
kM=14213; // rigidez da mola [N/m]
ks=kM;

kB=142130; // rigidez do batente [N/m]
ksB=kB

l=0.4; // comprimento natural da mola [m]
ls=l

lc=0.1; // comprimento da mola totalmente comprimida [m]
lcs=lc;


hB=0.2; // altura da lombada [m]
lB=2; // comprimento da lombada [m]
ti=0.1; // tempo percorrido ate atingir a lombada [s]
vch=35; // velocidade do carro [km/h]
vc=vch/3.6; // velocidade do carro [m/s]
x0=[l-m*g/kM;l-2*m*g/k + ls-m*g/ks;0;0;0]; // condi es iniciais
// O valor l-m*g/kM reflete a posi o de equil brio
```

```
da suspens o
// quando apenas o peso esta atuando.

a = 1000*rand(1,5);
d = splin(1:0.5:3,a)

t0=0; // instante inicial
t=0:0.0001:2.8; // vetor de tempo
x=ode(x0,t0,t,list(sistema,entrada));

scf(1)
// Plotando a diferenca entre a coordenada da massa e a coordenada
// do solo menos o comprimento natural da mola (deflexao):
plot(t,x(1,:)-x(5,:)-l,'r',t,x(2,:)-x(1,:)-ls,'b')

legend('mola inferior','mola superior')
xtitle('Deflex o das molas','Tempo [s]','Deflex o [m]');

// Se este valor eh negativo, a mola esta comprimida.
// Se este valor eh positivo, o carro descolou do solo.
// Se este valor diminui ate lc-l metros (neste caso -0.3 m),
// o batente eh atingido.
scf(2)
// Plotando xG:
plot(t,x(1,:),'r',t,x(2,:),'b',t,x(5,:),'g')
title('Posi o dos CG em rela o ao solo')
// Usando a variavel do tipo 'lista':
T=list("Resposta transitoria da suspensao","Tempo t [s]","Solu o [m]","XG(perfil da via)","posi o de X (massa1)",'posicao de Xs( massa2)');
// Colocando uma legenda na parte superior esquerda da figura (parametro 4):
legend([T(5),T(6),T(4)],[1,2],4);
// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:
xtitle(T(1),T(2),T(3));
```