

# Lista G

PME 3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

**João Vinícius Hennings de Lara**

10771740



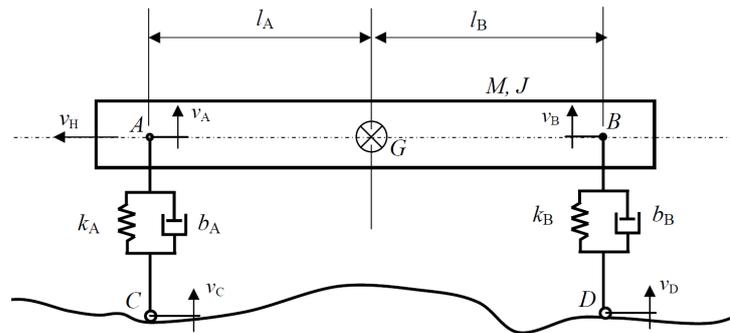
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

São Paulo

3 de dezembro de 2020

# 1 Primeira Questão

## 1 Enunciado



**Modelo da dinâmica vertical:** a dinâmica referente ao movimento horizontal do centro de massa é desprezada, ou seja, a velocidade horizontal de G ( $v_h$ ) é constante, logo o modelo deve ter 4 variáveis de estado:

- velocidade vertical  $v_G$  do centro de massa G;
- velocidade angular  $\omega$  de AB em torno de G;
- elongação  $x_A$  da mola de rigidez  $k_A$ ;
- elongação  $x_B$  da mola de rigidez  $k_B$ .

**Entradas:** velocidades verticais ( $v_C$  e  $v_D$ ) dos pontos C e D.

**Saídas:** velocidade vertical  $v_G$  do centro de massa G e velocidade angular  $\omega$  de AB em torno de G.

**Hipóteses simplificadoras:**

- Movimento apenas no plano da página;
- AC e BD permanecem sempre na vertical;
- Considere molas e amortecedores lineares;
- O deslocamento angular do segmento AB é pequeno (tal que  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$  e  $\cos \alpha \approx 1$ ).

**Parâmetros do sistema:**

- $M = 200 \text{ kg}$ ;
- $J = 512 \text{ kgm}^2$ ;
- $l_A = 0,8 \text{ m}$ ;
- $l_B = 0,8 \text{ m}$ ;
- $k_A = 10.000 \text{ N/m}$ ;

- $k_B = 10.000 \text{ N/m}$ ;
- $b_A = 200 \text{ Ns/m}$ ;
- $b_B = 200 \text{ Ns/m}$ ;
- $v_H = 10 \text{ m/s}$ .

## 2 Modelo Matemático de 1/2 carro

Primeiro, realizado o estudo dinâmico do sistema, com a aplicação do Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) e do Teorema do Momento Angular (TMA). Em seguida, em uma análise dinâmica, serão obtidas mais duas equações referentes às velocidades  $v_A$  e  $v_B$ .

Aplicando o TMA e o TMB no sistema, obtém-se as duas equações abaixo.

$$M\dot{v}_G = -k_A x_A - b_A \dot{x}_A - k_B x_b - b_B \dot{x}_b - Mg \quad (1.1)$$

$$J\dot{\omega} = l_A (k_A x_A + b_A \dot{x}_A) - l_b (k_b x_b + b_b \dot{x}_b) \quad (1.2)$$

Para a análise cinemática, analisa-se, primeiro, o módulo dos vetores  $\vec{x}_A = \vec{C}A = A - C$  e  $\vec{x}_B = \vec{D}B = B - D$ . Em repouso,  $x_A = x_{A,0}$  e  $x_B = x_{B,0}$ . Após um deslocamento horizontal  $x_G$  positivo (para cima) do centro de massa, um deslocamento angular  $\theta$  positivo (sentido anti-horário) e um deslocamento  $x_C$  positivo do ponto C, o módulo dos dois vetores são dados por:

$$x_A = x_{A,0} + x_G - l_A \theta - x_C \quad (1.3)$$

$$x_B = x_{B,0} + x_G + l_B \theta - x_D \quad (1.4)$$

Ao derivar as expressões acima, obtém-se a taxa de variação desses dois vetores.

$$\dot{x}_A = v_G - l_A \omega - v_C \quad (1.5)$$

$$\dot{x}_B = v_G + l_B \omega - v_D \quad (1.6)$$

As equações 1.5 e 1.6 devem ser, então, usadas nas equações 1.1 e 1.2 para que seja possível escrever o sistema no espaço de estados desejado. fazendo essa substituição, obtém-se o seguinte sistema, escrito na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \\ M\dot{v}_G \\ J\dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_G - L_A\omega - v_C \\ v_G + L_B\omega - v_D \\ -k_Ax_A - k_Bx_B - (b_A + b_B)v_G + (l_Ab_A - l_Bb_B)\omega + b_Av_C + b_Bv_D - Mg \\ l_Ak_Ax_A - L_Bk_Bx_B + (l_Ab_A - l_Bb_B)v_G - (l_A^2b_A + l_B^2b_B)\omega - l_Ab_Av_C + l_Bb_Bv_D \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Para escrever o sistema no espaço de estados, define-se o vetor de estados  $\mathbf{x} = [x_a \ x_b \ v_G \ \omega]$ , o de entradas  $\mathbf{u} = [v_C \ v_D]$  e o de saídas  $\mathbf{y} = [v_G \ \omega]$ . Deseja-se estruturar o modelo matemático da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (1.8)$$

Então, as matrizes do sistema são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ \frac{-k_A}{J} & \frac{-k_B}{J} & \frac{-b_A - b_B}{J} & \frac{l_Ab_A - l_Bb_B}{J} \\ \frac{M}{l_Ak_A} & \frac{M}{-l_Bk_B} & \frac{M}{l_Ab_A - l_Bb_B} & \frac{M}{-l_A^2b_A - l_B^2b_B} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \frac{b_A}{J} & \frac{b_B}{J} \\ \frac{-l_Ab_A}{J} & \frac{l_Bb_B}{J} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

O que corresponde às seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \\ \dot{v}_G \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ \frac{-k_A}{J} & \frac{-k_B}{J} & \frac{-b_A - b_B}{J} & \frac{l_Ab_A - l_Bb_B}{J} \\ \frac{M}{l_Ak_A} & \frac{M}{-l_Bk_B} & \frac{M}{l_Ab_A - l_Bb_B} & \frac{M}{-l_A^2b_A - l_B^2b_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \frac{b_A}{J} & \frac{b_B}{J} \\ \frac{-l_Ab_A}{J} & \frac{l_Bb_B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

$$\begin{bmatrix} v_G \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

### 3 Análise em frequência

A matriz de transferência que relaciona as entradas  $\mathbf{u} = [v_C \ v_D]$  com a saída  $\mathbf{y} = [v_G \ \omega]$  para esse sistema é:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{50 + s}{100 + 2s + s^2} & \frac{50 + s}{100 + 2s + s^2} \\ \frac{-15.625 - 0.3125s}{25 + 0.5s + s^2} & \frac{-15.625 - 0.3125s}{25 + 0.5s + s^2} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Para essa matriz de transferência, foram feitos os seguintes diagramas de bode:

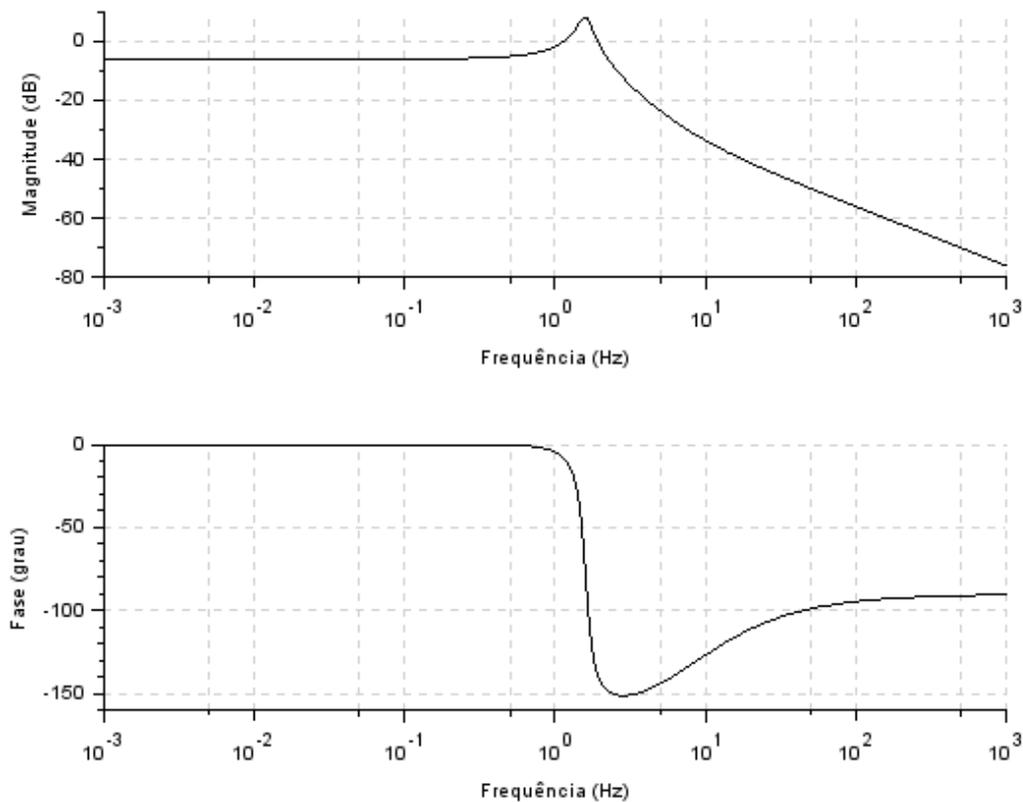


Figura 1 – Diagrama de bode para as posições 11 e 12.

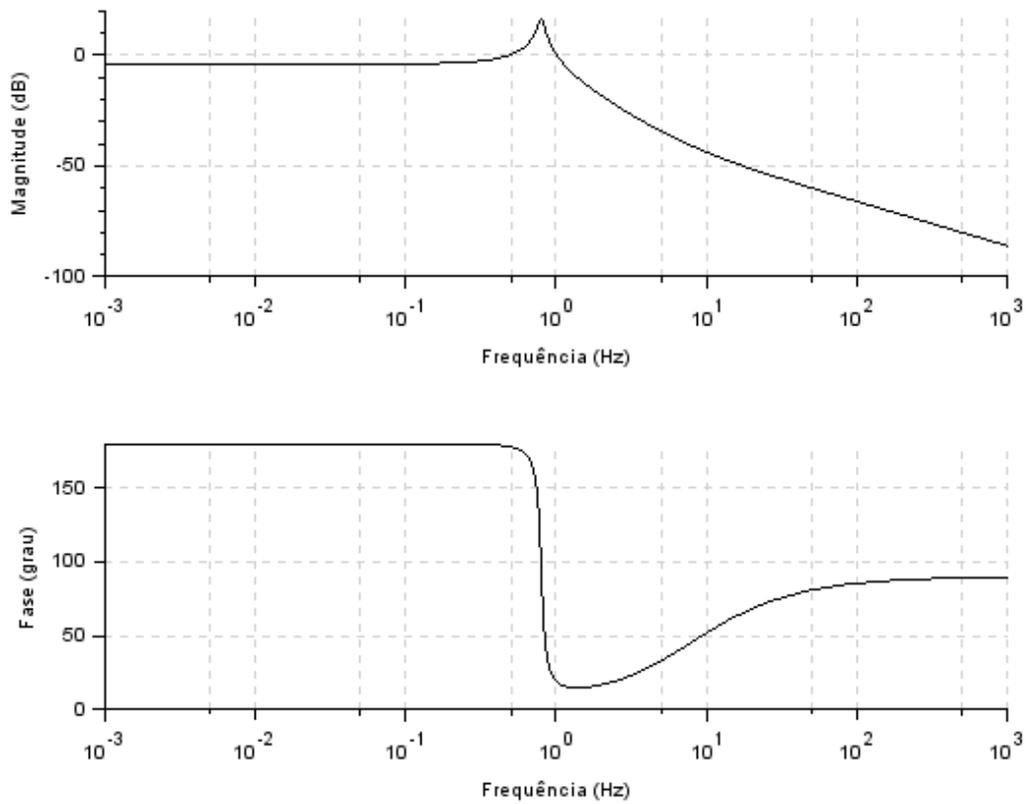


Figura 2 – Diagrama de bode para as posições 21 e 22.

A equação característica do sistema é:

$$2500 + 100s + 126s^2 + 2.5s^3 + s^4 \quad (1.16)$$

de onde obtemos os pólos do sistema:

$$\begin{cases} -1. + 9.9498744i \\ -1. - 9.9498744i \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\begin{cases} -0.25 + 4.9937461i \\ -0.25 - 4.9937461i \end{cases} \quad (1.18)$$

Podemos analisar o sinal da parte real dos polos e concluir que o sistema é estável.

## 4 Resposta do sistema

### a) Entrada Degrau

O sistema de meio carro foi submetido a uma entrada degrau dada por:

$$\begin{cases} vc = 0, & \text{para } t < 0 \\ vc = 1, & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\begin{cases} vd = 0, & \text{para } t < \alpha \\ vd = 1, & \text{para } t > \alpha \end{cases} \quad (1.20)$$

em que  $\alpha = (l_A + l_B)/v_H$ , a divisão entre o comprimento do carro e sua velocidade, é o atraso entre uma roda e outra. Obteve-se os seguintes gráficos 3 e 4.

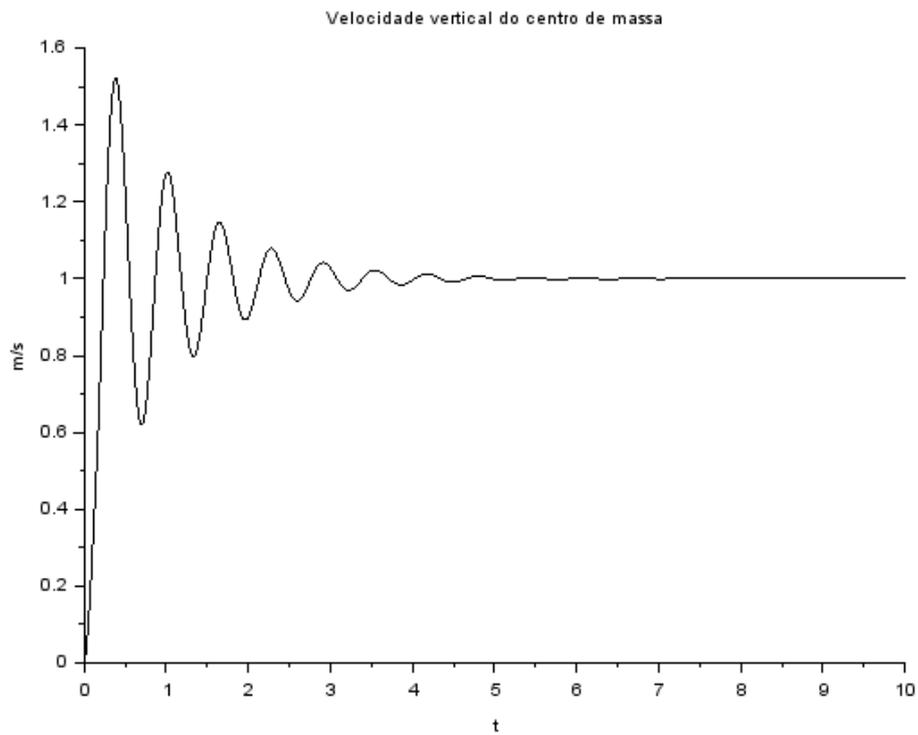


Figura 3 – Velocidade do centro de massa para entrada degrau.

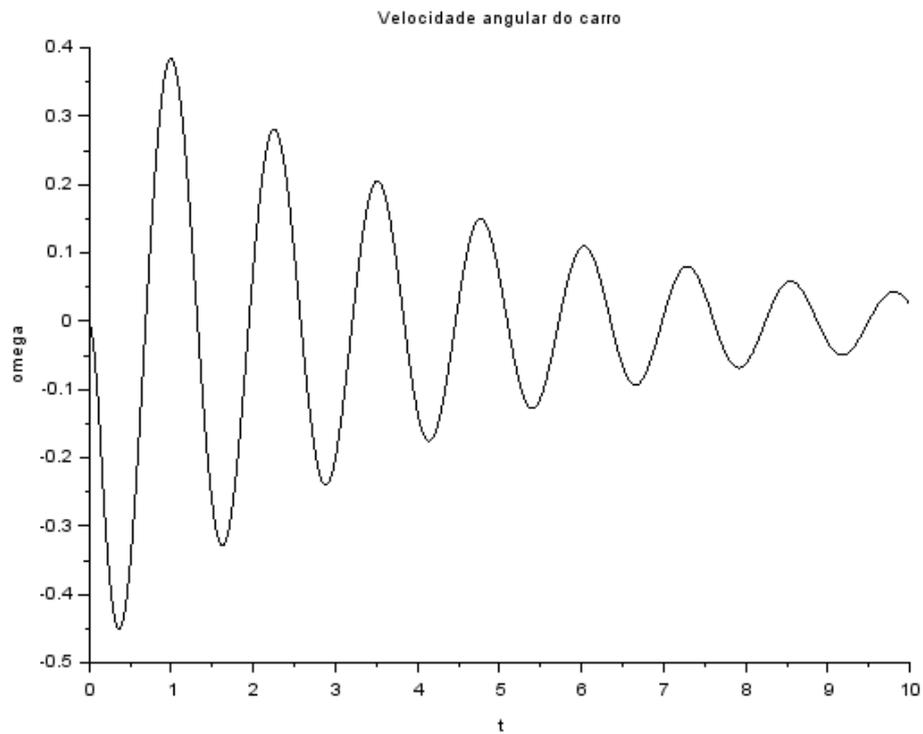


Figura 4 – Velocidade de rotação do carro para entrada degrau.

## b) Entradas Senoidais propostas

Para as entradas senoidais propostas:

$$v_C = v_D = \sin 9.8995t \quad (1.21)$$

$$v_C = -v_D = \sin 4.9875t \quad (1.22)$$

o sistema linear divergiu o Scilab apresentou o seguinte erro:

```
lsode— at t (=r1), mxstep (=i1) steps
necessary before reaching tout
  where i1 is :      500
  where r1 is :    0.8316875930521D-04
```

Aviso: O resultado pode ser impreciso.

```
!—error 10000
```

```
csm: Simulation failed before final time is reached.
```

### c) Entrada Senoidal 1

Rodou-se, então, a simulação com a primeira entrada senoidal proposta, mas considerando o intervalo de tempo  $\alpha$  entre uma roda e outra.

$$v_C = \sin 9.8995t \quad (1.23)$$

$$v_D = \sin 9.8995(t + \alpha) \quad (1.24)$$

Obteve-se, então, os gráficos 5 e 6.

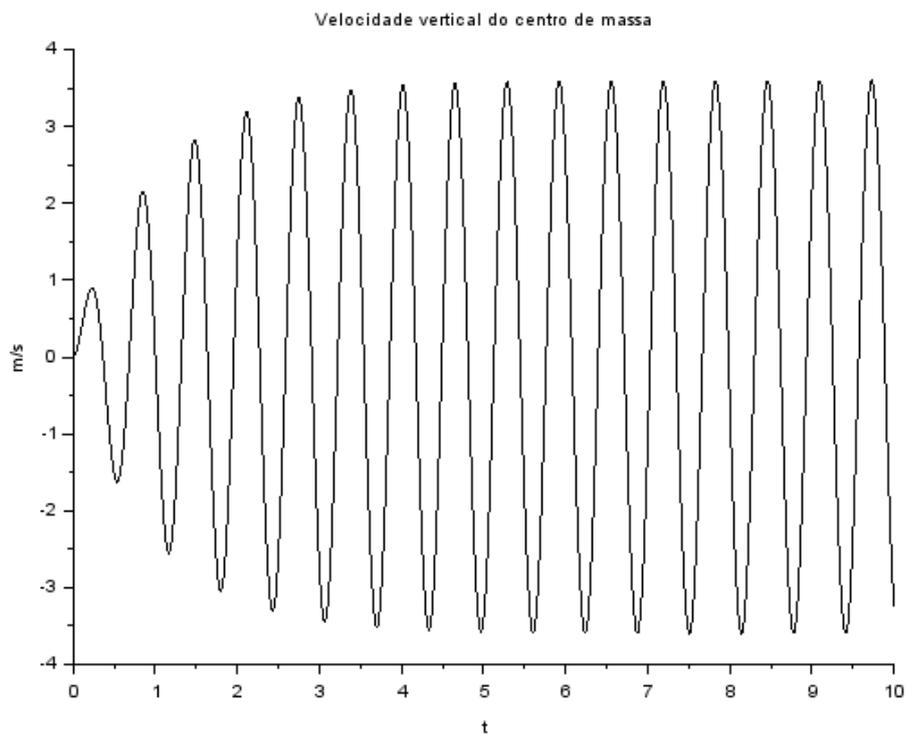


Figura 5 – Velocidade do centro de massa para entrada senoidal 1.

### d) Entrada Senoidal 2

Para simulação com a primeira entrada senoidal proposta, considerando o intervalo de tempo  $\alpha$  entre uma roda e outra, a entrada é:

$$v_C = \sin 4.9875t \quad (1.25)$$

$$v_D = \sin 4.9875(t + \alpha) \quad (1.26)$$

Obteve-se os gráficos 7 e 8.

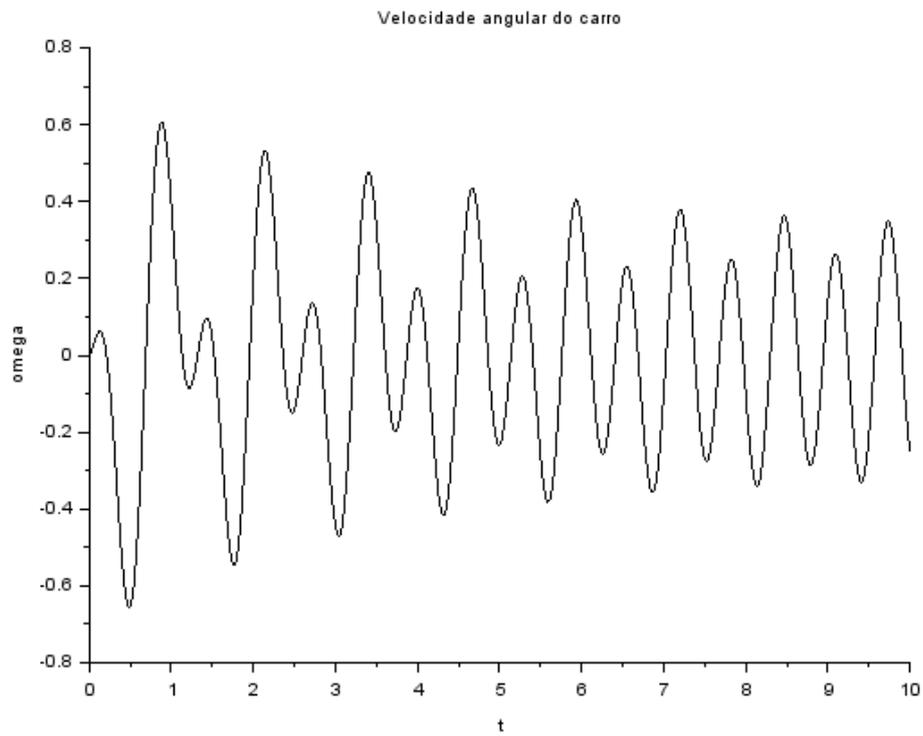


Figura 6 – Velocidade de rotação do carro para entrada senoidal 1.

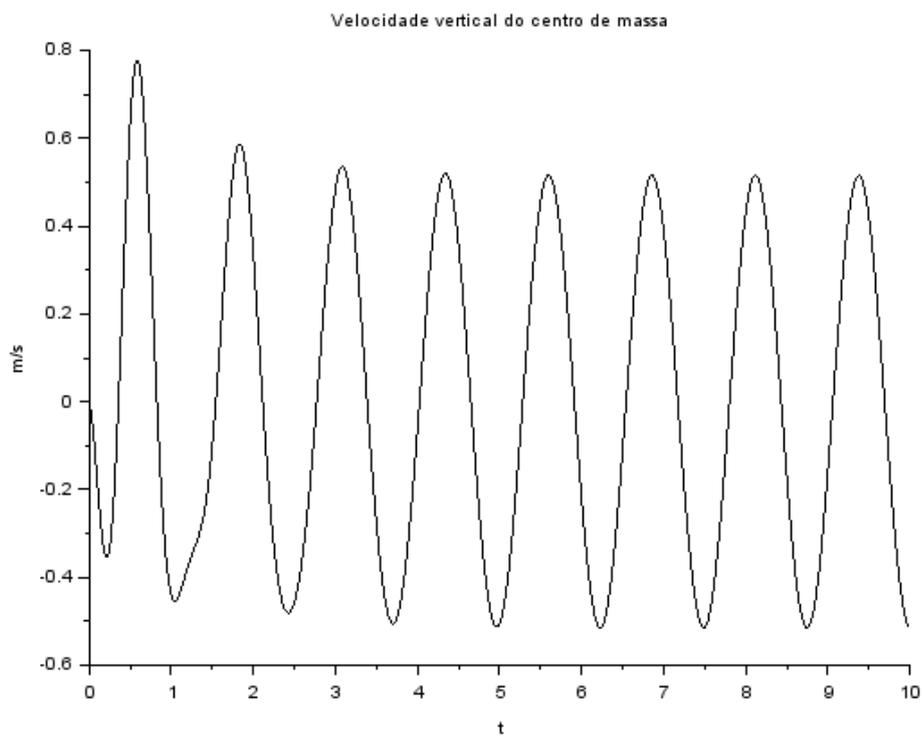


Figura 7 – Velocidade do centro de massa para entrada senoidal 2.

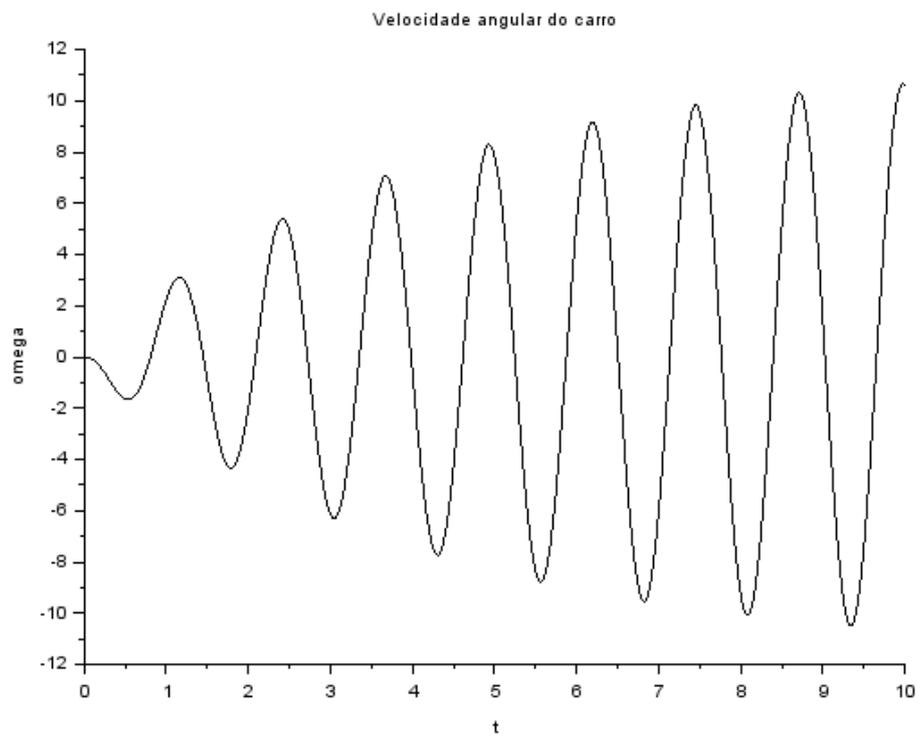


Figura 8 – Velocidade de rotação do carro para entrada senoidal 2.

## 2 Códigos

### Questão 1

```

1 clear ;
2
3 // Par metros
4 M = 200;
5 J = 512;
6 la = 0.8;
7 lb = 0.8;
8 ka = 1e4;
9 kb = 1e4;
10 ba = 200;
11 bb = 200;
12 vh = 10;
13
14 //Matrizes do EE
15 //Matriz A
16 A(1,3) = 1; A(1,4) = -la ;
17 A(2,3) = 1; A(2,4) = lb ;
18 A(3,1) = -ka/M; A(3,2) = -kb/M;
19 A(3,3) = (-ba-bb)/M; A(3,4) = (la*ba-lb*bb)/M;
20 A(4,1) = la*ka/J; A(4,2) = -lb*kb/J;
21 A(4,3) = (la*ba-lb*bb)/J; A(4,4) = -(la*la*ba+lb*lb*bb)/J;
22 //Matriz B
23 B(1,1) = -1; B(2,2) = -1;
24 B(3,1) = ba/M; B(3,2) = bb/M;
25 B(4,1) = -la*ba/J; B(4,2) = lb*bb/J;
26 //Matriz C
27 C(1,3) = 1; C(2,4) = 1;
28 //Matriz D
29 D(2,2) = 0;
30
31 //Definição do tempo
32 t = linspace(0,10,5000);
33
34 //Valores iniciais
35 x0 = [0; 0; 0; 0];
36
37 // Entradas
38 //>>> Entrada degrau
39 // entrada="degrau";
40 // alpha = (la+lb)/vh;

```

```

41 // vc = ones(1,length(t)); vd = ones(1,length(t));
42 // for i=1:length(t)
43 //     if t(i)<alpha then vd(1,i)=0; end
44 //     end
45 //     u = [vc;vd];
46
47 //>>>Entrada senoidal proposta
48 // u = [sin(9.8995*t); sin((9.8995*t))];
49
50 //>>> Entrada senoidal 0
51 //entrada = "senoidal0 "
52 // alpha = (la+lb)/vh;
53 // u = [sin(2*t); sin((2*t+2*alpha))];
54
55 //>>> Entrada senoidal 1
56 // entrada = "senoidal1 "
57 // alpha = (la+lb)/vh;
58 // u = [sin(9.8995*t); sin((9.8995*(t+alpha)))]];
59
60 //>>> Entrada senoidal 2
61 entrada = "senoidal2 "
62 alpha = (la+lb)/vh;
63 u = [sin(4.9875*t); sin((-4.9875*(t+alpha)))]];
64
65 //Resolvendo o sistema linear
66 sistema = syslin('c',A,B,C,D);
67 [y,x] = csim(u,t,sistema,x0);
68
69
70 //Plotando o resultado
71 scf(1);
72     plot2d(t,y(1,:));
73     xtitle("Velocidade vertical do centro de massa","t","m/s");
74
75 scf(2);
76     plot2d(t,y(2,:));
77     xtitle("Velocidade angular do carro","t","omega");
78
79
80 // Matriz de transferência
81 s = poly(0,"s");
82 G1 = C*inv(s*eye(4,4)-A)*B + D
83
84 // Funções de bode
85 scf(3); bode(syslin('c',G1(1,1))); xs2png(3,"Bode11");
86 scf(4); bode(syslin('c',G1(2,1))); xs2png(4,"Bode21");
87 scf(5); bode(syslin('c',G1(1,2))); xs2png(5,"Bode12");

```

```
88 scf(6); bode(syslin('c',G1(2,2))); xs2png(6, "Bode22");
89
90 // Salvando as imagens
91 xs2png(1, strcat(["VG-",entrada])); xdel(1);
92 xs2png(2, strcat(["Omega-",entrada])); xdel(2);
```