Gabriel Jenner de Faria Orsi
Nº USP 10772800

Lista G - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Brasil

2020

Gabriel Jenner de Faria Orsi
Nº USP 10772800

Lista G - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Apresentação da Lista G da disciplina PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Universidade de São Paulo

Escola Politécnica

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Orientador: Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury e Prof. Dr. Decio Crisol Donha

Brasil

2020

Lista de ilustrações

Sumário

1 Modelo de meio carro

A modelagem de meio carro segue no pdf em anexo.

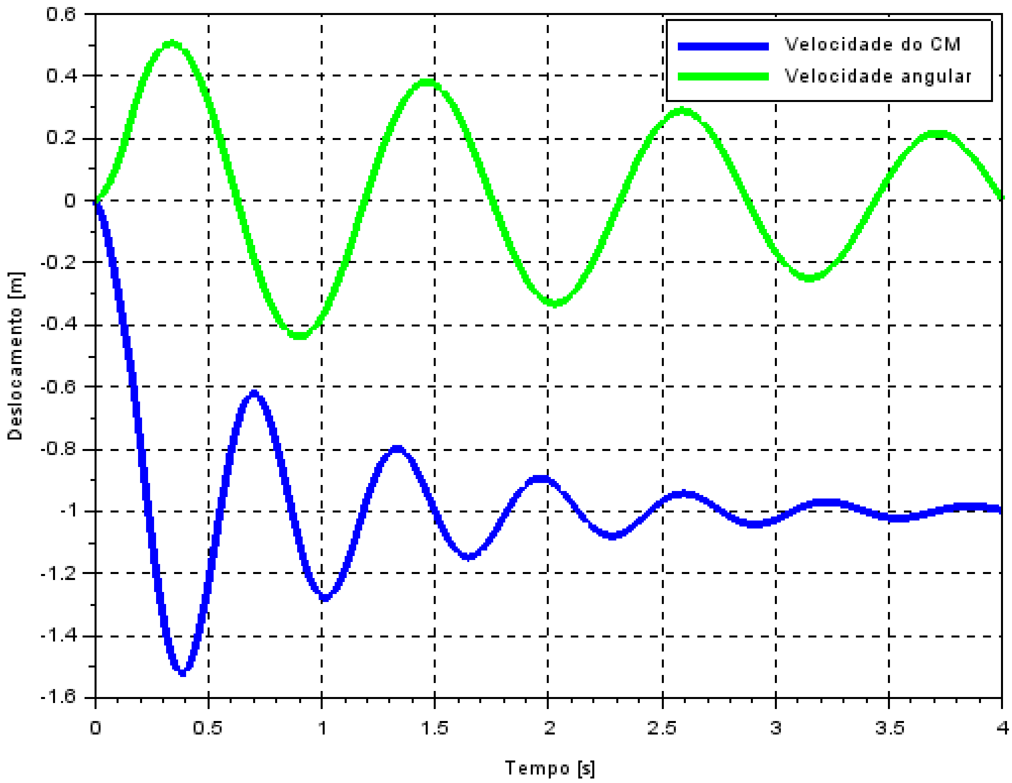
O código utilizado.

```
clc()
clear()

//parametros numericos
M=200
J=512
l=0.8
ka=10000
kb=10000
ba=200
bb=200
vh=10

//matrizes do espaço de estados
A=[0 0 1 -l;
   0 0 1 l;
   -ka/M -kb/M -(ba+bb)/M l*(ba-bb)/M;
   ka/J -kb/J l*(ba-bb)/J -l^2*(ba+bb)/J]
B=[1 0;
   0 1;
   -ba/M -bb/M;
   l*ba/J -l*bb/J]
C=[0 0 1 0;
   0 0 0 1]
D=[0 0;
   0 0]

//vetor tempo
t=0:0.001:4
//tempo do degrau em D
td=2*l/vh

//condições iniciais
x0=[0;0;0;0]

//vetor de entradas
u=ones(2,length(t))
for i=1:length(t);
    if t(i)>=td then u(2,i)=1 else u(2,i)=0 end;
end
```

```

//sistema
meio_carro=syslin('c',A,B,C,D)

//simulacao
[y,x]=csim(u,t,meio_carro,x0)

f1=scf(1)
plot(t,y(1,:),'b',t, y(2,:),'g','linewidth',4)
xgrid()
xtitle('Resposta do sistema no domínio do tempo','Tempo [s]','Deslocamento [m]')
legend('Velocidade do CM','Velocidade angular')
```

O gráfico gerado para a entrada degrau é.

Figura 1 – Resposta do sistema a entrada degrau



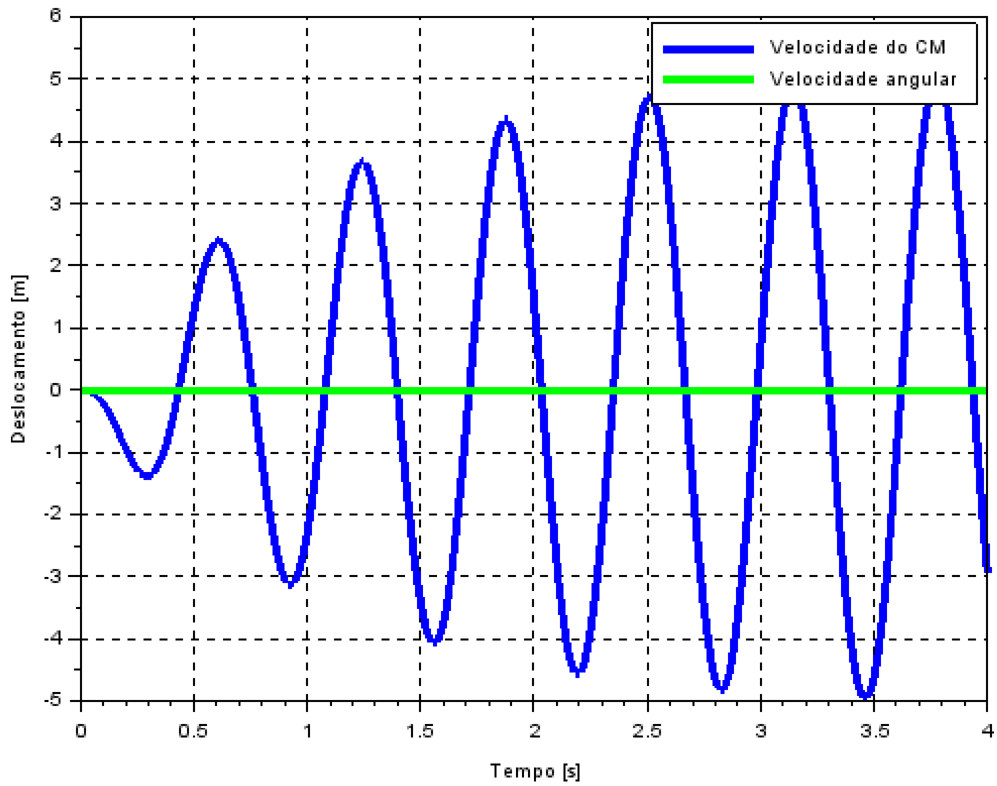
Fonte: autoria própria

A entrada degrau para v_C e v_D neste caso corresponde a uma rampa na via, ademais, como o degrau é unitário a rampa tem inclinação de 45º. A entrada v_D ocorre t_d após v_C

porque a parte dianteira do carro (C) 'entra' na rampa antes da parte traseira, a qual entra t_d depois na mesma rampa.

Segue o gráfico com o excitação senoidal da forma $v_C = v_D = sen(9,8995t)$ como entrada do sistema.

Figura 2 – Resposta do sistema a entrada senoidal



Fonte: autoria própria

Através do código a seguir, extraiu-se a equação característica e os polos do sistema.

```
//funcao de transferencia
s=poly(0,'s') //
G=C*(s*eye(A)-A)^(-1)*B
pc=det(s*eye(A)-A)
p=roots(pc)
```

A equação característica é a seguinte:

$$s^4 + 2,5s^3 + 132,25s^2 + 112,5s + 3125 \tag{1.1}$$

e os polos obtidos são:

$$\begin{cases} -1 \pm 9,9498744i \\ -0,25 \pm 5,584577i \end{cases} \tag{1.2}$$

com os polos em mão é possível calcular o fator de amortecimento por:

$$\begin{aligned} p &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad (1.3) \\ \omega_n &= \sqrt{|p|^2} \qquad (1.4) \\ \zeta &= cos\theta = \frac{p_r}{\omega_n} \qquad (1.5) \end{aligned}$$

sendo p_r a parte real do polo.

Com os valores numéricos obtém-se as frequências naturais do sistema e os fatores de amortecimentos.

$$\omega_{n1} = 10\ rad/s$$

$$\omega_{n2} = 5,59\ rad/s$$

$$\zeta_1 = 0,1$$

$$\zeta_2 = 0,045$$

Por fim, as frequências naturais amortecidas e de ressonância são dadas respectivamente por.

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \tag{1.6}$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{1.7}$$

Os valores numéricos obtidos para o sistema são:

$$\omega_{d1} = 9.95\ rad/s$$

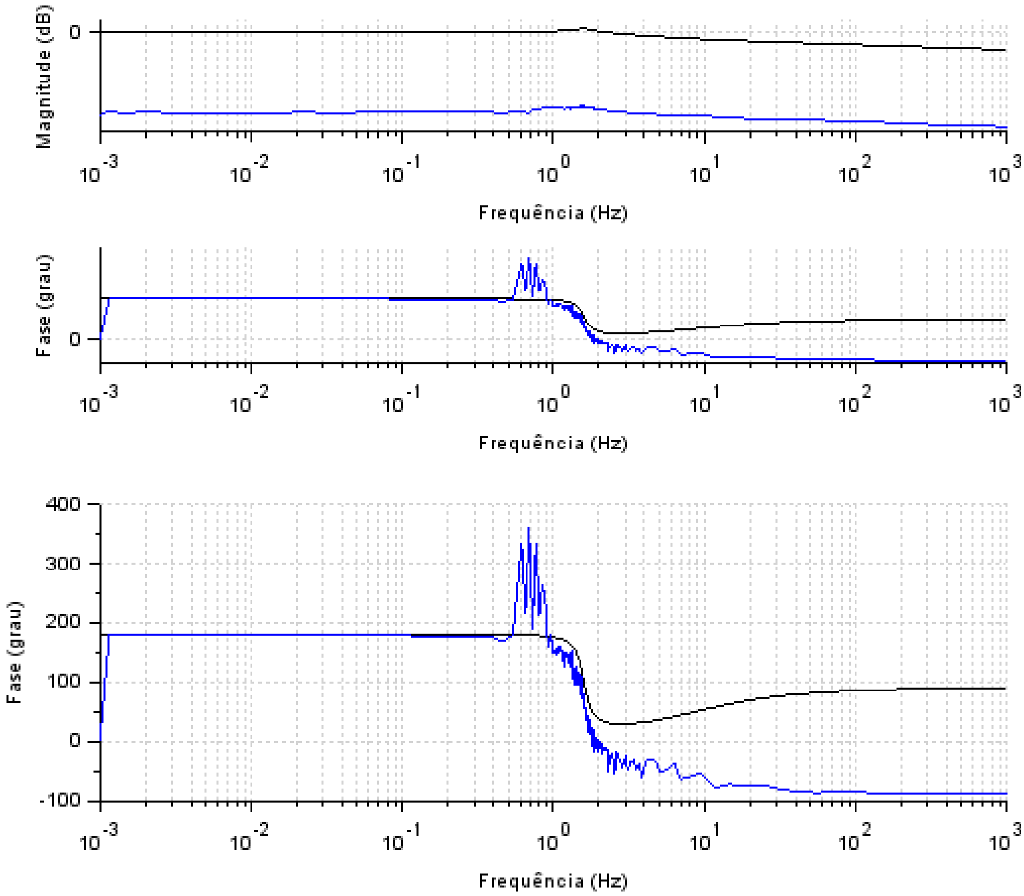
$$\omega_{r1} = 9.90\ rad/s$$

$$\omega_{d2} = 4.99\ rad/s$$

$$\omega_{r2} = 4.31\ rad/s$$

A figura a seguir mostra o diagrama de bode do sistema.

Figura 3 – Diagrama de Bode



Fonte: autoria própria

Lagrange:

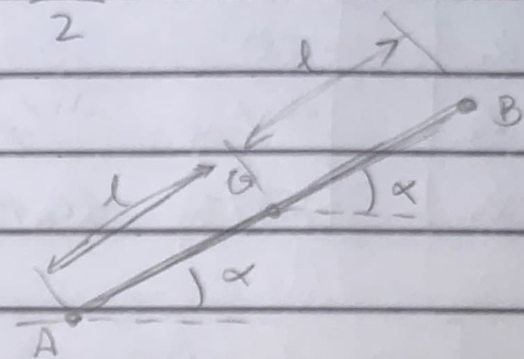
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = Q_{ext}$$

$\dot{\alpha} = \omega$

$\dot{x}_G = V_G$

$$T = \frac{M \cdot V_G^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2}, \quad V = \frac{K_A X_A^2}{2} + \frac{K_B X_B^2}{2}$$

$$R = \frac{b_A \cdot \dot{x}_A^2}{2} + \frac{b_B \, \dot{x}_B^2}{2}$$



$$\begin{cases} x_A = x_G - l\alpha \\ x_B = x_G + l\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_A = V_G - l\omega + V_C \\ \dot{x}_B = V_G + l\omega + V_D \end{cases}$$

$$L = M \cdot V_G^2 / 2 + J\omega^2/2 - \frac{K_A X_A^2}{2} - \frac{K_B X_B^2}{2}$$

Para x_G:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G} = M \cdot V_G \Rightarrow \frac{d}{dt} = M \cdot \dot{V}_G \; ; \; \frac{\partial L}{\partial x_G} = -K_A (x_G - l\alpha) - K_B (x_G + l\alpha)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_G} = b_A (V_G - l\omega + V_C) + b_B (V_G + l\omega + V_D)$$

$$M\dot{V}_G + K_A \cdot X_A + K_B \cdot X_B + b_A (V_G - l\omega + V_C) + b_B (V_G + l\omega + V_D) = 0$$

$$\boxed{\dot{V}_G = \frac{1}{M}\left[-K_A X_A - K_B \cdot X_B - b_A (V_G - l\omega) - b_B (V_G + l\omega)\right] + \frac{1}{M}(-b_A V_C - b_B V_D)}$$

Para α:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial \omega} = J\cdot\omega \Rightarrow \frac{d}{dt} = J\dot{\omega} \; , \; \frac{\partial L}{\partial \alpha} = K_A(x_G - l\alpha) - K_B(x_G + l\alpha)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = -l b_A (v_G - l\omega + v_c) + l b_B (v_G + l\omega + v_D)$$

$$J\dot{\omega} - K_A x_A + K_B x_B - l b_A (v_G - l\omega + v_c) + l b_B (v_G + l\omega + v_D) = 0$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}\left[K_A x_A - K_B x_B + l b_A (v_G - l\omega) - l b_B (v_G + l\omega)\right] + \frac{1}{J}(l b_A v_c - l b_B v_D)$$

Espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix} ; \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_c \\ v_D \end{bmatrix} ; \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_G \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_A = v_G - l\omega + v_c \\ \dot{x}_B = v_G + l\omega + v_D \\ \dot{v}_G = \frac{1}{M}\left[-K_A x_A - K_B x_B - b_A (v_G - l\omega) - b_B (v_G + l\omega)\right] + \frac{1}{M}(-b_A v_c - b_B v_D) \\ \dot{\omega} = \frac{1}{J}\left[K_A x_A - K_B x_B + l b_A (v_G - l\omega) - l b_B (v_G + l\omega)\right] + \frac{1}{J}(l b_A v_c - l b_B v_D) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l \\ 0 & 0 & 1 & l \\ -K_A/M & -K_B/M & -(b_A + b_B)/M & l(b_A - b_B)/M \\ K_A/J & -K_B/J & l(b_A - b_B)/J & -l^2(b_A + b_B)/J \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -b_A/M & -b_B/M \\ l b_A/J & -l b_B/J \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = [0]$$