

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Escola Politécnica da USP

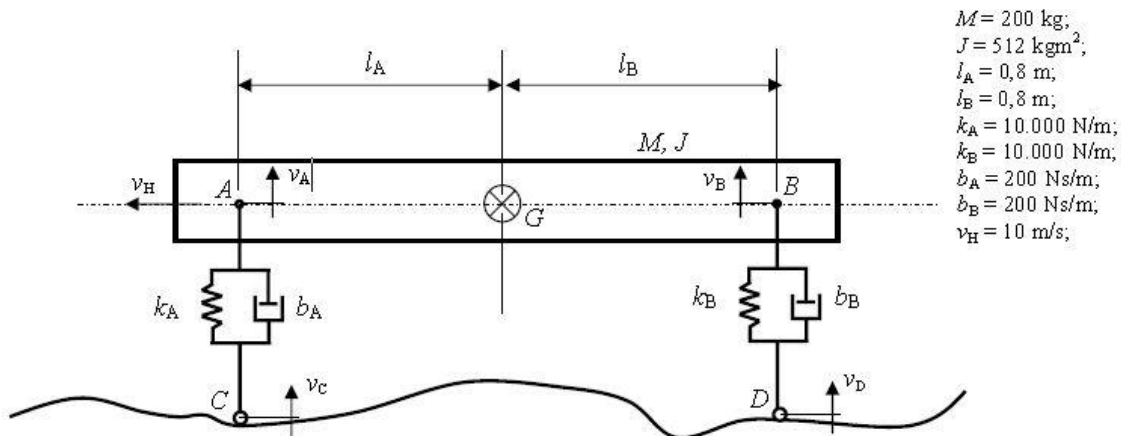


Lista G

Professores: Dr. Décio Crisol Donha
Dr. Agenor T. Fleury

Aluno: Arthur Henrique Gomes de Pinho
N°USP:10379756

Obtenção do modelo de 1 / 2 Veículo



Hipóteses simplificadoras adotadas:

- I. AC e BD permanecem sempre na vertical.
- II. Movimento apenas no plano da página.
- III. Molas e amortecedores lineares.
- IV. O deslocamento angular do segmento AB é pequeno (tal que $\text{sen} \alpha \cong \text{tan} \alpha \cong \alpha$ e $\text{cos} \alpha \cong 1$).

Considerando:

x_G – posição do baricentro

x_C – posição do ponto C

x_D – posição do ponto D

θ – posição angular do baricentro

Foi solicitado a obtenção do modelo matemático a partir do sistema. O modelo foi obtido aplicando o teorema do momento da quantidade de movimento (TMQM) e o teorema do movimento do baricentro (TMB).

TMB

$$M\ddot{x}_G = (k_A x_A - k_B x_B) - (b_A [\dot{x}_G - \dot{x}_C - \dot{\theta} l_A] + b_B [\dot{x}_G - \dot{x}_D - \dot{\theta} l_B])$$

TMQM

$$J\ddot{\theta} = (k_A x_A l_A - k_B x_B l_B) + (b_A l_A [\dot{x}_G - \dot{x}_C - \dot{\theta} l_A] - b_B l_B [\dot{x}_G - \dot{x}_D + \dot{\theta} l_B])$$

Representação na forma de espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & x &= \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix} & u &= \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} & y &= \begin{bmatrix} v_G \\ \omega \end{bmatrix} \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Obtém-se as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ k_A/M & -k_B/M & -(b_A + b_B)/M & (b_A l_A + b_B l_B)/M \\ k_A l_A/J & -k_B l_B/J & (b_A l_A - b_B l_B)/J & -(b_A l_A^2 + b_B l_B^2)/J \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ b_A/M & b_B/M \\ -b_A l_A/J & b_B l_B/J \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenção do modelo de 1 / 2 Veículo

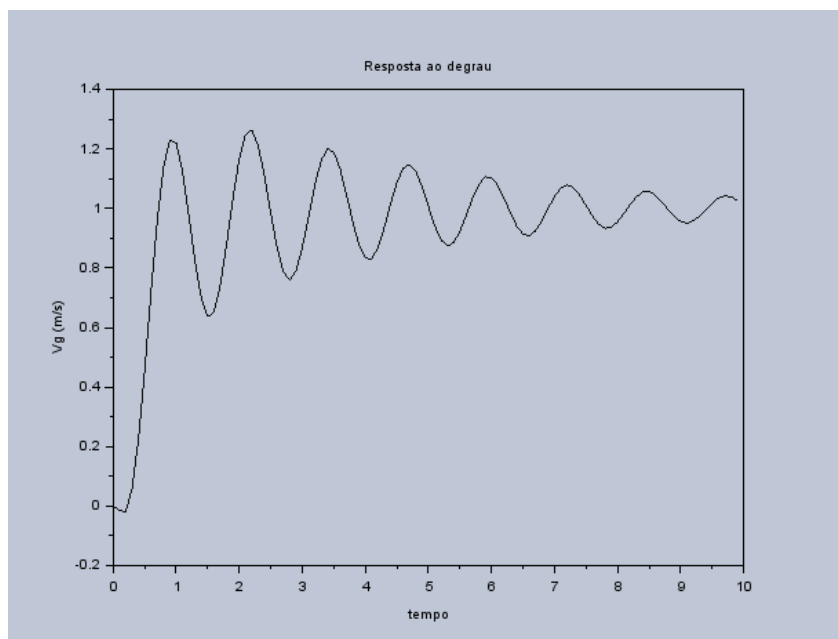
O caso de uma entrada do tipo degrau é o primeiro caso a ser simulado, dadas as condições iniciais:

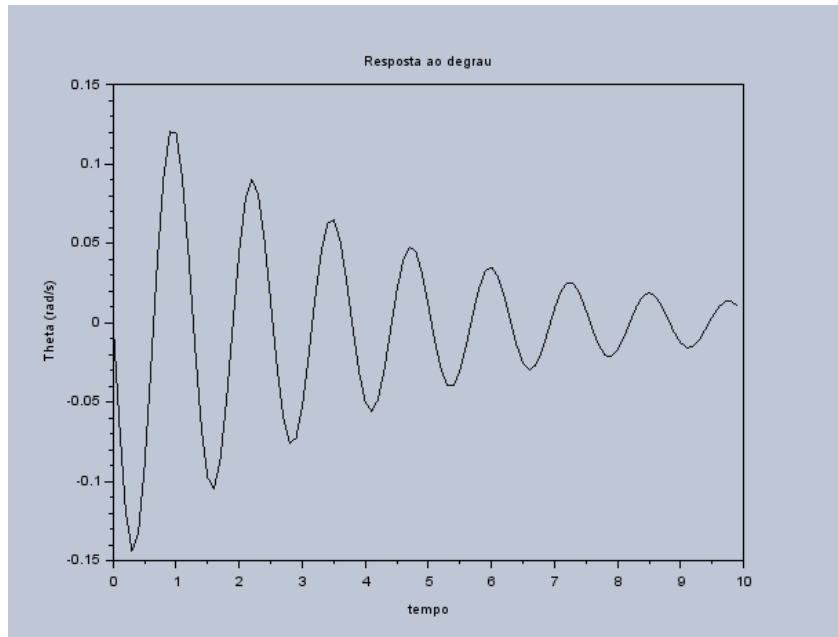
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} \quad v_C = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$
$$v_D = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_d \\ 1 & \text{se } t \geq t_d \end{cases}$$

Sendo

$$t_d = (l_A + l_B)/v_H = 0,16 \text{ s}$$

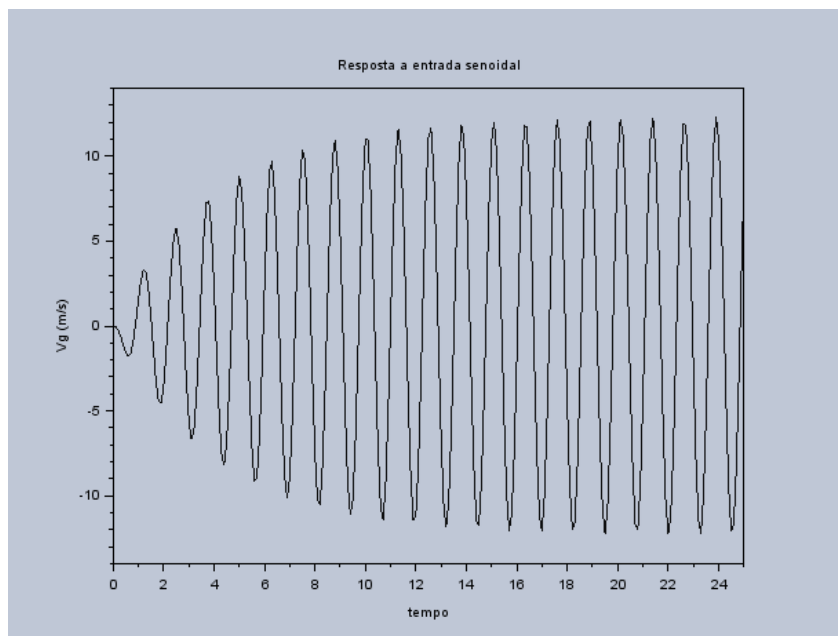
O gráfico para a simulação de um degrau é mostrado abaixo.



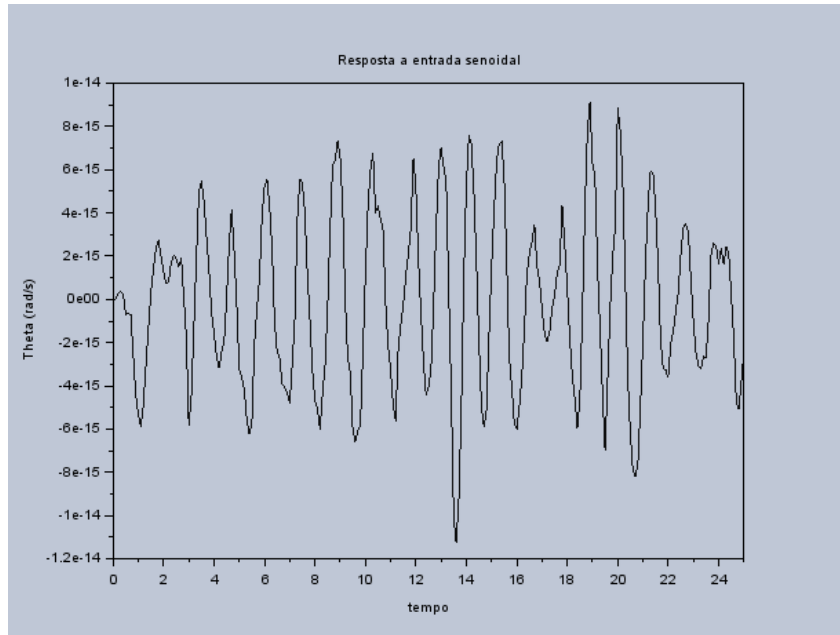


Para as entradas senoidais, tem-se:

- $vc = vd = \text{sen}(9,8895 * t)$
 - V_g

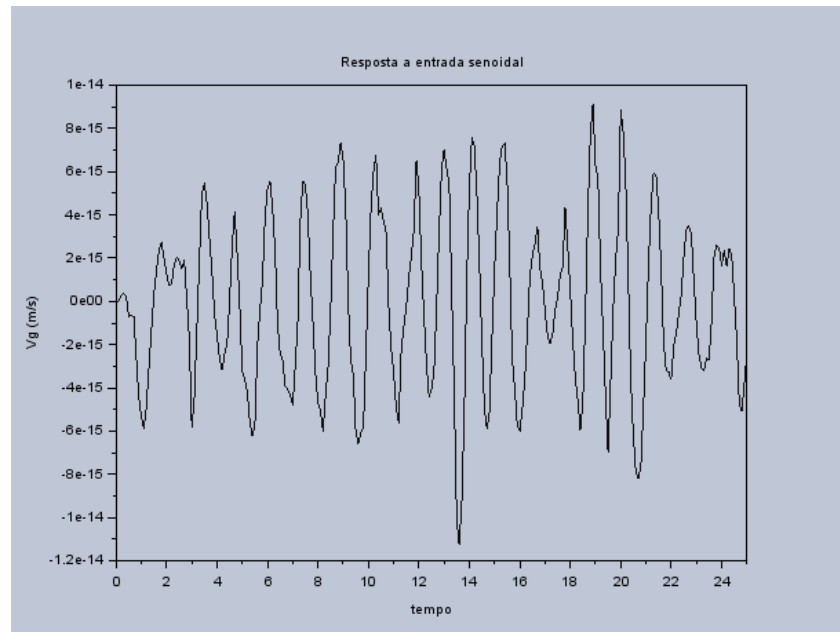


- ω

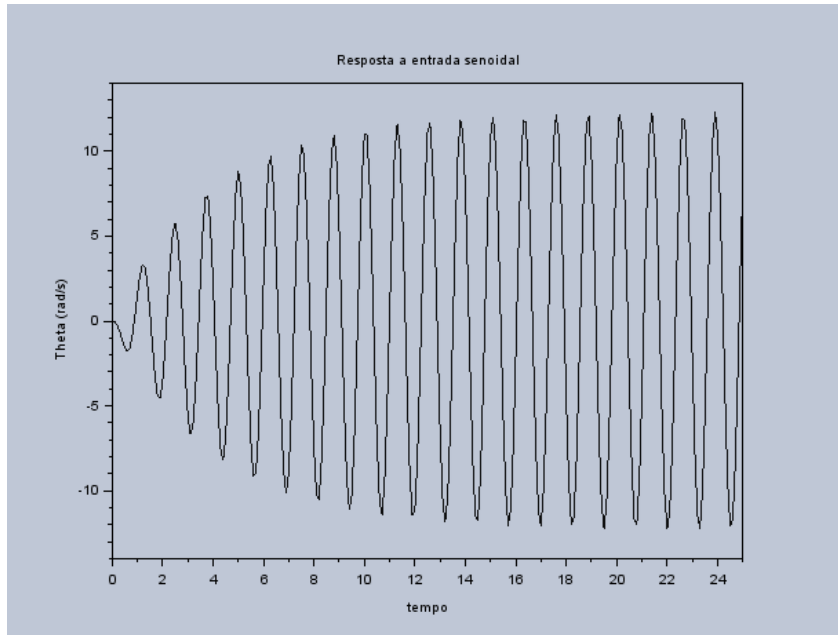


- $vc = -vd = \text{sen}(4,9875 * t)$

- V_g



○ ω



Percebe-se que há uma inversão no perfil do gráfico para os dois casos, com a velocidade do baricentro e a velocidade angular invertendo seus papéis do caso anterior e mantidas as amplitudes idênticas. No primeiro caso para ω e no segundo caso para v_g , os valores no eixo vertical são muito pequenos, de forma que são na verdade nulos e a aparente variação é devido a erros numéricos do Scilab.

Encontra-se as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez ao encontrarmos as frequências de ressonância.

$$M = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 512 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_a + k_b & k_b l_b - k_a l_a \\ k_b l_b - k_a l_a & k_b l_b^2 + k_a l_a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 12800 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_a + b_b & b_b l_b - b_a l_a \\ b_b l_b - b_a l_a & b_b l_b^2 + b_a l_a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 256 \end{bmatrix}$$

As matrizes de rigidez e amortecimento são diagonais pelo fato de as molas e amortecedores serem simétricos e as duas rodas estarem simétricas em relação ao centro de gravidade.

Assim, é possível calcular a frequência natural de vibração e o coeficiente de amortecimento:

$$\zeta_1 = \frac{c_1}{2w_1m_1} = \frac{400}{2 * 10 * 200} = 0,1$$

$$\zeta_2 = \frac{c_2}{2w_2m_2} = \frac{256}{2 * 5 * 512} = 0,05$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{20000}{200}} = 10 \text{ rad/s}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{12800}{512}} = 5 \text{ rad/s}$$

Com esses valores, tem-se:

$$w_{d1} = w_1 \sqrt{1 - \zeta_1^2} = 10 \sqrt{1 - 0,1^2} = 9,95 \text{ rad/s}$$

$$w_{d2} = w_2 \sqrt{1 - \zeta_2^2} = 5 \sqrt{1 - 0,05^2} = 4,993746 \text{ rad/s}$$

Análise de resposta em frequência

A função `ss2ft` do Scilab foi utilizada para obter a função de transferência do sistema. Dado que há 2 entradas e 2 saídas, as 4 funções de transferência são mostradas a seguir.

$$TF_1 = \frac{50 + s}{100 + 2s + s^2}$$

$$TF_2 = \frac{50 + s}{100 + 2s + s^2}$$

$$TF_3 = \frac{-(15.625 - 0.3125s)}{25 + 0.5s + s^2}$$

$$TF_4 = \frac{15.625 - 0.3125s}{25 + 0.5s + s^2}$$

A simetria do sistema faz com que as duas primeiras FT's sejam iguais e as duas últimas sejam opostas. A partir da função de transferência e ainda usando o Scilab, obtem-se os diagramas de bode.

Diagramas de Bode com a mesma suspensão para entrada e saída

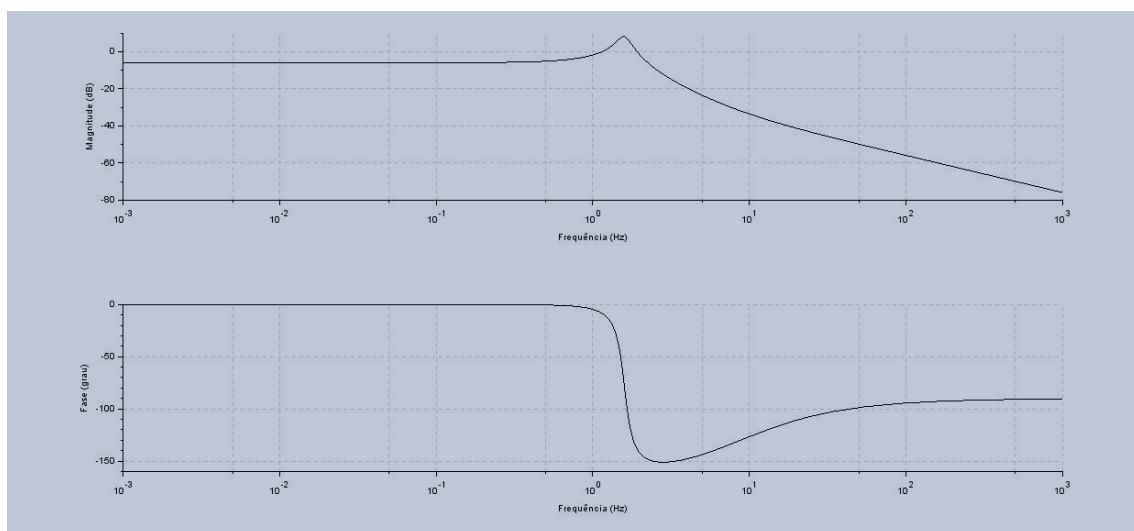
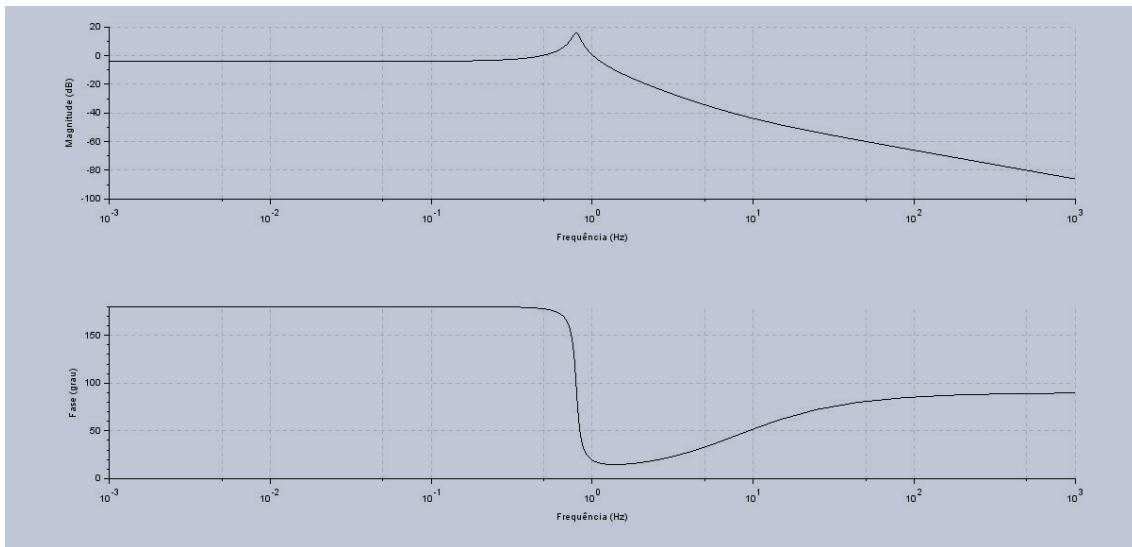


Diagrama de Bode com suspensão distinta para entrada e saída



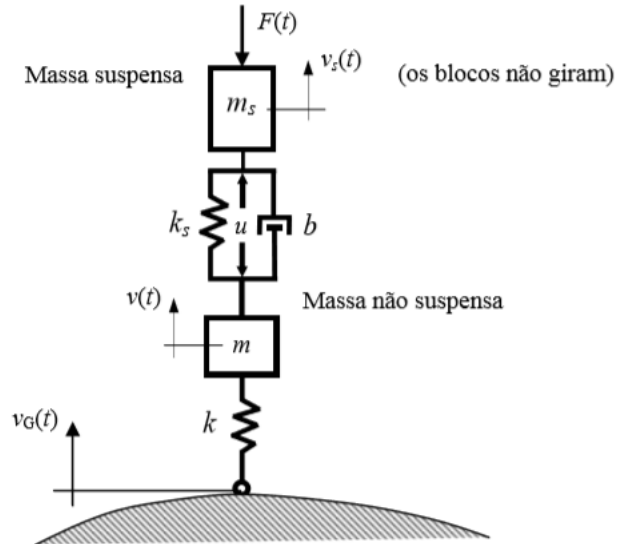
Percebe-se, a partir dos diagramas de Bode que, para v_g , a frequência natural ocorre em torno de 10 rad/s devido ao pico verificado para esse valor. O pico ocorre quando as oscilações estão em fase.

Conforme observado nos gráficos, para ω , a frequência natural ocorre em torno de 5 rad/s . Esta ocorre quando as solicitações x_d e v_d estão com 180 graus de fase.

Simulação de Sistema não linear

a. Exercício

Afim de tratar a não linearidade de uma mola, nesse problema será estudado um sistema de 1/4 de carro. O sistema é mostrado a seguir.



Sendo:

- $v(t)$: velocidade vertical da massa não suspensa m .
- $v_s(t)$: velocidade vertical da massa suspensa m_s .
- $x(t)$: coordenada vertical da massa não suspensa m .
- $x_s(t)$: coordenada vertical da massa não suspensa m .
- $v_G(t)$: velocidade vertical do ponto de veículo em contato com solo.
- $x_G(t)$: coordenada vertical do solo.
- $F(t)$: Força aplicada na massa suspensa.
- $u(t)$: Saturação de entrada entre as massas

Parâmetros:

- m_s : massa suspensa.
- m : massa não suspensa
- k_M : rigidez da mola entre a massa e o batente
- K_s : Rigidez da mola entre as massas
- k_B : rigidez do batente.
- b : constante do amortecimento.
- l : comprimento natural da mola.
- l_C : comprimento da mola totalmente comprimida.

As equações diferenciais do sistema são:

$$\dot{x} = v \quad \dot{x}_g = v_g \quad \dot{x}_s = v_s$$

As demais equações diferenciais variam segundo a deformação da mola. Considerando que a mola não está fixa ao solo, ela pode estar comprimida, ou então sem contato com o chão. Ainda no caso de compressão, a deflexão pode suficientemente grande para que o batente seja atingido. Logo, o problema se divide em:

- Não há contato com o solo:

Nesse caso l é o comprimento natural da mola, de forma que a condição é dada por $x - x_g > l$

$$m\dot{v} = -mg - k_s(x - x_s - l) - u - b(v - v_s)$$

$$m\dot{v}_s = -m_s g + k_s(x - x_s - l) + b(v - v_s) - F + u$$

- Existe contato com o solo, mas ainda não se atingiu o batente:

Define-se l_c como o comprimento da mola totalmente comprimida, logo há uma condição de: $l_c < x - x_g < l$

$$m\dot{v} = -F_{mola} - F_{amortecedor} - mg - k_s(x - x_s - l) - u - b(v - v_s)$$

$$m\dot{v}_s = -m_s g + k_s(x - x_s - l) + b(v - v_s) - F + u$$

- Existe contato com o solo e atingiu-se o batente:

Ainda sendo l_c o comprimento da mola totalmente comprimida, tem-se a condição de $x - x_g < l_c$. Assim:

$$m\dot{v} = -F_{batente} - F_{amortecedor} - mg - k_s(x - x_s - l) - u - b(v - v_s)$$

$$m\dot{v}_s = -m_s g + k_s(x - x_s - l) + b(v - v_s) - F + u$$

Sabendo que:

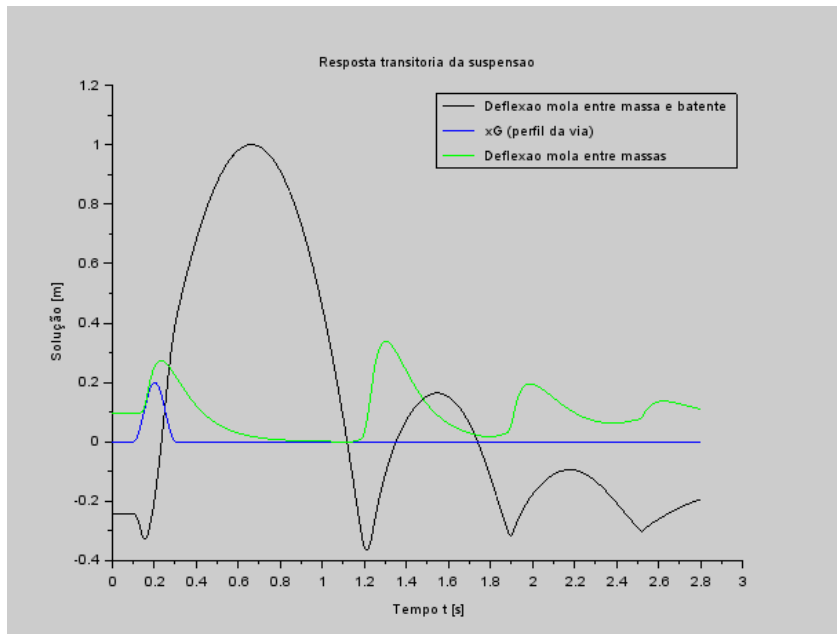
$$F_{mola} = k_m(x - x_g - l) \quad F_{batente} = k_b(x - x_g - l) \quad F_{amortecedor} = b(v - v_g)$$

Defini-se os vetores de estado como:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ x_g \\ v \\ x_s \\ v_s \end{bmatrix} \quad entrada = \begin{bmatrix} v_g \\ F \\ u \end{bmatrix}$$

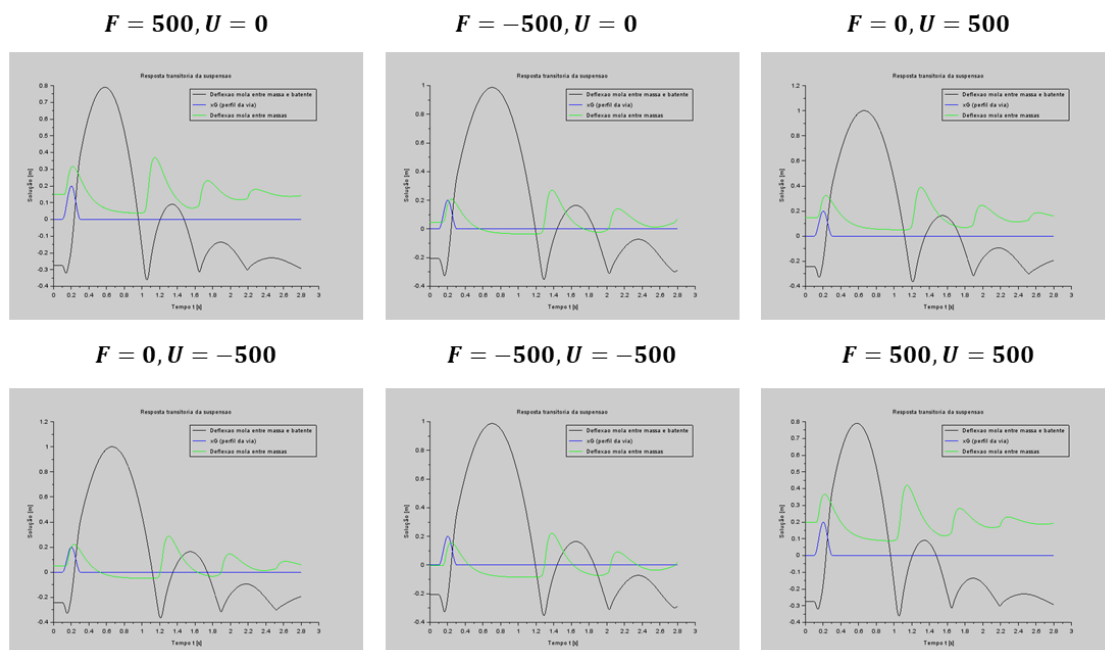
Realizando a simulação do modelo no Scilab, pode-se obter os diferentes efeitos que a saturação e a força tem sobre o comportamento. Dividiu-se em alguns casos, como pode ser visto a seguir.

- $F = U = 0$;



Através da análise do gráfico gerado, e comparando-se com o modelo apresentado no exemplo, observa-se que a deflexão da suspensão primária atinge valores menores que $-0,3m$, fazendo com que o veículo tenha, após um período de tempo, altas deflexões na suspensão primária, atingindo até $1m$. Percebe-se também que o sistema demora um tempo maior para estabilizar.

Observe a imagem a seguir, que representa alguns casos variando força e saturação.



Os gráficos evidenciam que a atuação de uma força entre ambas as massas gera variação na deflexão da mola. Aumentando F , percebe-se que o módulo de deflexão de ambas tendem a aumentar. Diminuindo F , o inverso ocorre. Para a saturação, percebe-se que não há um efeito perceptível sobre a mola entre massa e batente, apenas sobre a mola entre as massas, em que o aumento de U gera aumento da deflexão.

Ao mesmo tempo, aumentando F o tempo para retomar o equilíbrio se torna menor, como era de se esperar, assim como sua diminuição faz com que o retorno ao equilíbrio ocorra mais rapidamente. Para U , o mesmo comportamento não é observado. A atuação de ambas as forças simultaneamente não gera efeitos extras além dos causados pelas forças individualmente.

Código Scilab

```
clear all
clc

//DEFINIÇÃO DE PARAMENTROS
M=200;
J=512;
la=0.8;
lb=0.8;
ka=10000;
kb=10000;
ba=200;
bb=200;
vh=10;
td=(la+lb)/vh;

//MATRIZES
A=[0,0,1,-la;0,0,1,lb;ka/M,-kb/M,-(ba+bb)/M,(bb*lb+ba*la)/M;ka*la/J,-kb*lb/J,(-bb*lb+ba*la)/J,-
(bb*lb^2+ba*la^2)/J];
B=[-1 0;0 -1;ba/M bb/M;-ba*la/J bb*lb/J];
C=[0,0,1,0;0,0,0,1];
D=[0,0;0,0];
x0=[0 0 0 0];

//Entrada Degrau
dt=0.1;
u=ones(2,10/dt);
for t=0:dt:td-dt,
    u(2,(t/dt)+1)=0;
end

t=0:0.1:10-dt;
xo=[0 0 0 0]';
meiocarro=sylin('c',A, B, C, D );
[y,x]=csim(u,t,meiocarro,xo);

vg = x(3,:);
thetap = x(4,:);

//GRAFICOS ENTRADA DEGRAU
figure(1)
xset('window',1)
xtitle('Resposta ao degrau', 'tempo', 'Vg (m/s)')
plot(t,vg, 2)

figure(2)
xtitle('Resposta ao degrau', 'tempo', 'Theta (rad/s)')
plot(t,thetap, 2)

//Entrada Senoidal
i=1
for t2 = 0:0.1:25
    u2(1,i) = sin(9.8995*t2);
    u2(2,i) = sin(9.8995*t2);
    u3(1,i) = sin(4.9875*t2);
    u3(2,i) = -sin(4.9875*t2);
    i = i+1
end

t2=0:0.1:25;

xo=[0 0 0 0]';
meiocarro=sylin('c',A, B, C, D );
[y2,x2]=csim(u2,t2,meiocarro,xo);
```

```

[y3,x3]=csim(u3,t2,meiocarro,xo);

vg2 = x2(3,:);
thetap2 = x2(4,:);

vg3 = x3(3,:);
thetap3 = x3(4,:);

//GRAFICOS ENTRADA SENOIDAL
//EM FASE
figure(3)
xlabel('Resposta a entrada senoidal', 'tempo', 'Vg (m/s)')
plot(t2,vg2, 2)

figure(4)
xlabel('Resposta a entrada senoidal', 'tempo', 'Theta (rad/s)')
plot(t2,thetap2, 2)

//EM OPOSIÇÃO DE FASE
figure(5)
xlabel('Resposta a entrada senoidal', 'tempo', 'Vg (m/s)')
plot(t2,vg3, 2)
figure(6)
xlabel('Resposta a entrada senoidal', 'tempo', 'Theta (rad/s)')
plot(t2,thetap3, 2)

//Análise de frequência
states = {'xa'; 'xb'; 'vg'; 'w'};
inputs = {'xc'; 'xd'; 'vc'; 'vd'};
outputs = {'vg'; 'w'};
meiocarro=syslin('c',A, B, C, D)
H = ss2tf(meioscarro)
print('H',H)
bode(H)

//EXERCICIO
function [xdot]=sistema(t, x, entrada)
    entradas=entrada(t);

    if (x(1)-x(2))<lc then
        xdot=[x(3);entradas(1);(-kB*(x(1)-x(2))-l-m*g+entradas(3)-ks*(x(1)-x(4))-b*(x(3)-x(5)))/m;x(5);(-
entradas(2)+ks*(x(1)-x(4))-l+b*(x(3)-x(5))-ms*g-entradas(3))/ms];
        elseif (x(1)-x(2))>l then
            xdot=[x(3);entradas(1);-g+entradas(3)/m-ks/m*(x(1)-x(4))-b/m*(x(3)-x(5));x(5);(-
entradas(2)+ks*(x(1)-x(4))-l+b*(x(3)-x(5))-ms*g-entradas(3))/ms];
        else
            xdot=[x(3);entradas(1);(-kM*(x(1)-x(2))-l-m*g+entradas(3)-ks*(x(1)-x(4))-b*(x(3)-x(5)))/m;x(5);(-
entradas(2)+ks*(x(1)-x(4))-l+b*(x(3)-x(5))-ms*g-entradas(3))/ms];
        end
    return xdot
endfunction

// Definição da função que implementa a entrada vG:
function [ut]=entrada(t)
global F u
F=000;
u=000;
if t<ti then
    ut=[0,F,u];
elseif t<(ti+lB/vc) then
    ut=[(hB*2*pi*vc/(2*lB))*sin((vc*2*pi/lB)*(t-ti)),F,u];
else
    ut=[0,F,u];
end

```



```

return ut
endfunction

F=000;
u=000;
// Definição do arquivo que implementa a simulação:
clear all
// Definir os valores dos parâmetros
m=250; // massa [kg]
ms=100;
ks=10000;
b=1885; // constante de amortecimento [Ns/m]
g=9.8; // aceleração da gravidade [m/s2]
kM=14213; // rigidez da mola [N/m]
kB=142130; // rigidez do batente [N/m]
l=0.4; // comprimento natural da mola [m]
lc=0.1; // comprimento da mola totalmente comprimida [m]
hB=0.2; // altura da lombada [m]
lB=2; // comprimento da lombada [m]
ti=0.1; // tempo percorrido até atingir a lombada [s]
vch=35; // velocidade do carro [km/h]
vc=vch/3.6; // velocidade do carro [m/s]
x0=[0.000001+l-((m+ms)*g+F+u)/kM;0;0;0.0000001-(F+ms*g+u)/ks-((m+ms)*g+F+u)/kM;0]; // condições
iniciais
// O valor l-((m+ms)*g+F+u)/kM reflete a posição de equilíbrio da suspensão quando apenas o peso está atuando
// O valor -(F+ms*g+u)/ks-((m+ms)*g+F+u)/kM reflete a posição de equilíbrio da suspensão secundária quando
apenas o peso está atuando
t0=0; // instante inicial
t=0:0.001:100; // vetor de tempo
x=ode(x0,t0,t,list(sistema,entrada));

// Plotando a diferença entre a coordenada da massa e a coordenada
// do solo menos o comprimento natural da mola (deflexão):
figure(1)
plot2d(t,x(1,:)-x(2,:)-l)

// Plotando xG:
plot2d(t,x(2,:),2)
//Plotando a deformação da segunda mola
plot2d(t,x(1,:)-x(4,:)-l,3)

// Usando a variável do tipo 'lista':
T=list("Resposta transitória da suspensão","Tempo t [s]","Solução [m]","Deflexão mola entre massa e
batente","xG (perfil da via)","Deflexão mola entre massas");
// Colocando uma legenda na parte superior esquerda da figura (parâmetro 4):
legends([T(4),T(5),T(6)],1,2,3,1);
// Colocando um título na figura e nomeando os eixos:
xtitle(T(1),T(2),T(3));

```