

Exercícios 10/11

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos João Pedro Dias Nunes 10705846

Problema 1. Simular os diagramas de bode para a função de transferência:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2\zeta(2450)s + (2450)^2}{(2450)^2(s + 300)(s + 20000)} \quad (1)$$

$$G(s) = \frac{(s - 2450)(s - 2450)}{(2450)^2(s + 300)(s + 20000)} \quad (2)$$

considerando $d(s)$ um polinômio de pares de raízes complexas e reais.

Solução:

Com o software *Matlab R2015a*, o sistema foi simulado com o código abaixo:

```
1 %%% Deixa os eixos em LaTeX
2 set(groot, 'defaultLegendInterpreter', 'latex');
3 clc(); clear(); close();
4
5 num=[1 2*0.158*2450 2450^2];
6 den=2450^2*poly([-300 -20000]);
7
8 figure(1)
9 bode(num, den)
10 hold on
11 num=poly([-2450 -2450]);
12 num=[1 4900 6002500];
13 %den=2450*2450*poly([-2450 -2450]);
14 bode(num, den)
15 hold off
```

e foram obtidos os seguintes gráficos:

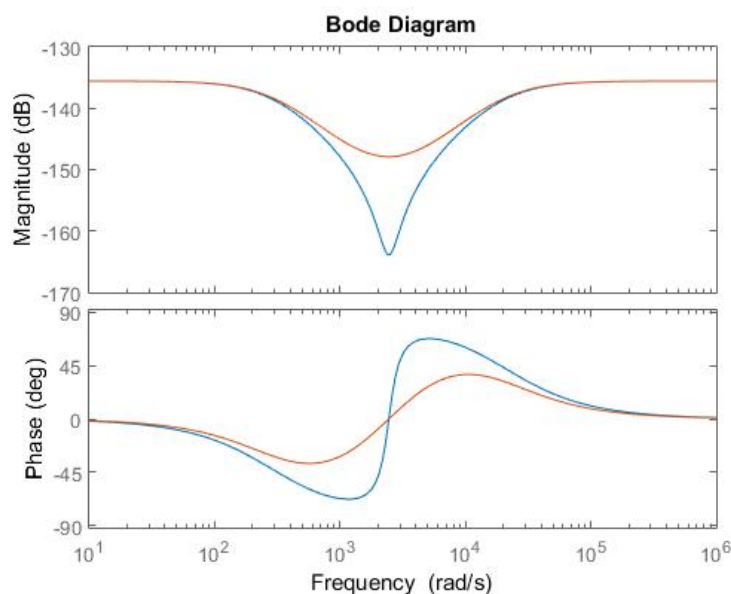


Figura 1: Diagrama do Bode para pares de polos complexos e reais

Como nota-se, a inversão de fase no caso dos polos complexos é de 180 graus, enquanto que nos polos reais é apenas 90 graus. □

Exercícios 10/11

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos João Pedro Dias Nunes 10705846

Um sistema massa, mola amortecedor é modelado pelas equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$$

- Verifique a estabilidade deste sistema de duas maneiras diferentes;
- Qual a frequência natural do sistema? Admitindo que a massa seja unitária: Qual o seu coeficiente de amortecimento? Qual a constante de rigidez da mola? Qual o fator de amortecimento?
- Qual a frequência natural amortecida? Qual a frequência de ressonância? Qual o sobressinal no domínio do tempo ('overshoot') para uma entrada degrau? Qual o pico na frequência de ressonância? Qual o tempo de acomodação?
- Determine a matriz de resolvente e a matriz de transição;
- Usando a matriz de transição, uma entrada degrau, e condições iniciais nulas, determine a resposta do sistema analiticamente para intervalos de tempo de 0,5 s;
- Apresente as assíntotas dos gráficos de Bode para razão de amplitude em dB e fase em graus em função da frequência em rad/s. Use os resultados do item c) e trace gráficos mais precisos. Qual a largura de banda do sistema?
- Qual a função de transferência do sistema?
- Admita que você coloque um sistema, cuja função de transferência é:

$$G1 = \frac{s+2}{s+12}$$

em série com o sistema dos itens anteriores. Como ficarão os gráficos de assíntotas de Bode dos sistemas em série.

Figura 2: Exercício 2

Problema 2.

Solução: Como a função de transferência para o sistema é:

$$C(sI - A)^{-1}Bu + D \quad (3)$$

o que resulta em:

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 24} \quad (4)$$

Pelo critério de polos:

$$p_1 = -2.0000 + 4.4721i \quad (5)$$

$$p_2 = -2.0000 - 4.4721i \quad (6)$$

como ambos polos têm parte real negativa, o sistema é estável.

Pelo critério de Routh-Hurwitz:

- todos os coeficientes são reais e positivos;
- o ultimo valor é $-(1 \times 0) \times (24 \times 4)/4 = 24$;
- o critério atende à especificação do valor constante da função de transferência e não apresenta valores intermediários negativos. Logo, o sistema é estável.

Com os polos, temos que:

$$\zeta\omega_n = 2 \quad (7)$$

$$\omega_d = 4,4721 \quad (8)$$

$$\omega_n = \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_d^2} = \sqrt{24} \quad (9)$$

Exercícios 10/11

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos João Pedro Dias Nunes 10705846

Se $m = 1$, temos:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = 24N/m \quad (10)$$

$$\zeta = \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{6} = 0,408 \quad (11)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow \omega_d = \sqrt{24} \sqrt{1 - \frac{6}{36}} = 4,472rad/s \quad (12)$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 4rad/s \quad (13)$$

$$M = \exp\left(\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) = 0,246m \quad (14)$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} = 1,342m = 2,6dB \quad (15)$$

$$T_{ac} = 4T = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2,001s \quad (16)$$

$$(17)$$

A matriz de transição:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2+4s+24}\right) & \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4s+24}\right) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-12}{s^2+4s+24}\right) & \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+24}\right) \end{bmatrix} \quad (18)$$

A resposta analítica para $t=0,5s$:

$$y(t) = \int_0^{0,5} \Phi(t - \tau) d\tau \times 1 \times B \quad (19)$$

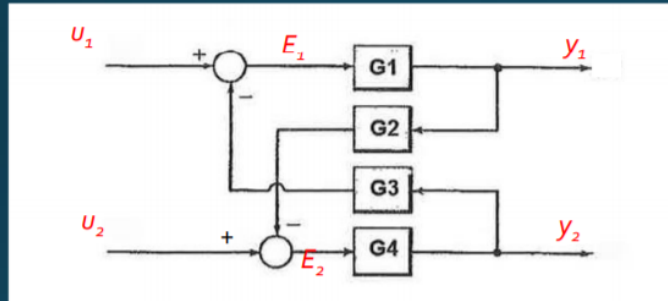
$$y(t) = \int_0^{0,5} \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4s+24}\right) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+24}\right) \end{bmatrix} d\tau \quad (20)$$

□

Exercícios 10/11

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos João Pedro Dias Nunes 10705846

- 2) Admitindo um sistema multivariável (MIMO),
a) determine as saídas y_1 e y_2 para entradas impulso U_1 e U_2 :



- b) determine as funções de transferência: $U_1 \rightarrow E_1$ e $U_2 \rightarrow E_2$

Figura 3: Exercício 3

Problema 3.

Solução:

Exercícios 10/11

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos João Pedro Dias Nunes 10705846

The diagram shows a control system with two inputs, U_1 and U_2 , and two outputs, Y_1 and Y_2 . U_1 is summed with a feedback signal from Y_2 (via block G_3) and then passes through block G_1 to produce Y_1 . Y_1 is fed back through block G_2 to the summing junction. U_2 is summed with a feedback signal from Y_1 (via block G_4) and then passes through block G_4 to produce Y_2 . Y_2 is fed back through block G_3 to the summing junction for U_1 .

$$Y_1 = G_1(U_1 - G_3 G_4 (U_2 + G_2 Y_1))$$
$$Y_1 = G_1 U_1 - G_1 G_3 G_4 U_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 Y_1$$
$$Y_1 = \frac{G_1(U_1 - G_3 G_4 U_2)}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$
$$Y_2 = G_4(U_2 - G_2 G_1 (U_1 - G_3 Y_2)) \Rightarrow$$
$$Y_2 = G_4 U_2 - G_1 G_2 G_4 U_1 + G_1 G_2 G_3 G_4 Y_2$$
$$Y_2 = \frac{G_4(U_2 - G_1 G_2 G_4 U_1)}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$
$$H_1 = \frac{Y_1}{U_1} = \frac{G_1(U_1 - G_3 G_4 U_2)}{U_1(1 - G_1 G_2 G_3 G_4)}$$
$$H_2 = \frac{Y_2}{U_2} = \frac{G_4(U_2 - G_1 G_2 G_4 U_1)}{U_2(1 - G_1 G_2 G_3 G_4)}$$

Figura 4: Solução 3

□

Exercícios 10/11

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos João Pedro Dias Nunes 10705846

3) Para a função de transferência abaixo:

$$G1(s) = \frac{\theta}{T}(s) = \frac{0,0102 s^4 + 0,0046s^3 - 0,0636s^2 + 0,0001s}{s^4 + 0,4511s^3 + 0,3015s^2 + 0,0989s}$$

- Quais os polos do sistema, sabendo que $\theta(t)$ oscila de maneira amortecida e há um polo real em $-0,3660$?
- Quais os zeros do sistema, sabendo que $+2,2812$ é um zero?
- Analise a estabilidade do sistema? Isso é esperado?
- Há polos dominantes? Quais?
- O sistema é de fase não mínima? Quais as implicações disto?
- Analise a estabilidade também pelo método de Routh-Hurwitz.
- Qual a frequência de ressonância? Qual o fator de amortecimento?
- Qual o sobressinal esperado? Há erro em regime permanente?

Figura 5: Exercício 4

Problema 4. Solução:

Exercícios 10/11

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos João Pedro Dias Nunes 10705846

a) $W_r = W_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

$$\cancel{s}(s+0,366) \cdot (s^2 + 2\zeta W_n s + W_n^2) = \cancel{s}(s^3 + 0,4511s^2 + 0,30155s + 0,09)$$

Com os polos determinados, tem-se: $\zeta = 0,0819$; $W_n = 0,5199$

$$W_r = W_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 0,5164 \text{ rad/s}$$

b) $M = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = 0,7724 \text{ m//}$

$$E_{ro} = \lim_{s \rightarrow 0} s\theta(s) \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(0,0102s^4 + 0,0046s^3 - 0,0365s^2 + 0,0001s)}{\cancel{s}(s^4 + 0,4511s^3 + 0,3015s^2 + 0,0909s)}$$

Figura 6: Solução 4

Exercícios 10/11

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos João Pedro Dias Nunes 10705846

a) $W_r = W_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

$$\cancel{s}(s+0,366) + (s^2 + 2\zeta W_n s + W_n^2) = \cancel{s}(s^2 + 0,4511s^2 + 0,30155s + 0,09)$$

Com os polos determinados, tem-se: $\zeta = 0,0819$; $W_n = 0,5199$

$$W_r = W_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 0,5169 \text{ rad/s}$$

b) $M = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = 0,7724 \text{m//}$

$$E_{ro} = \lim_{s \rightarrow 0} s\theta(s) \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(0,0102s^3 + 0,0046s^2 - 0,0365s + 0,00049)}{\cancel{s}(s^2 + 0,4511s^2 + 0,30155s + 0,09096)} = 0,001 \text{ rad}$$

Figura 7: Solução 4