Exercícios 10/11

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos João Pedro Dias Nunes 10705846

Problema 1. Simular os diagramas de bode para a função de transferência:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2\zeta(2450)s + (2450)^2}{(2450)^2(s+300)(s+20000)} \tag{1}$$

$$G(s) = \frac{(s-2450)(s-2450)}{(2450)^2(s+300)(s+20000)} \tag{2}$$

considerando $d(s)$ um polinômio de pares de raízes complexas e reais.

Solução:

Com o software *Matlab R2015a*, o sistema foi simulado com o código abaixo:

```
%%% Deixa os eixos em LaTeX
set(groot, 'defaultLegendInterpreter','latex');
clc();clear();close();

num=[1 2*0.158*2450 2450^2];
den=2450^2*poly([-300 -20000]);

figure(1)
bode(num,den)
hold on
num=poly([-2450 -2450]);
num=[1 4900 6002500];
%den=2450*2450*poly([-2450 -2450]);
bode(num,den)
hold off
```

e foram obtidos os seguintes gráficos:

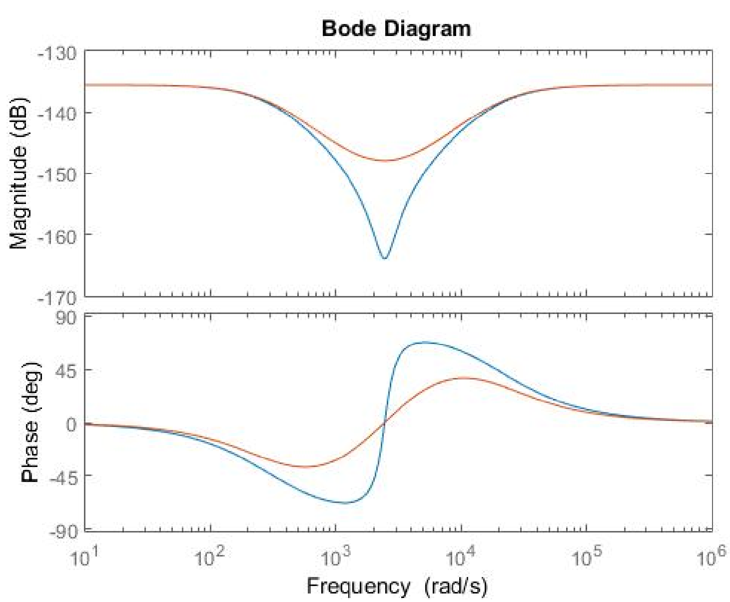

Figura 1: Diagrama do Bode para pares de polos complexos e reais

Como nota-se, a inversão de fase no caso dos polos complexos é de 180 graus, enquanto que nos polos reais é apenas 90 graus. □

Um sistema massa, mola amortecedor é modelado pelas equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$$

a) Verifique a estabilidade deste sistema de duas maneiras diferentes;

b) Qual a frequência natural do sistema? Admitindo que a massa seja unitária: Qual o seu coeficiente de amortecimento? Qual a constante de rigidez da mola? Qual o fator de amortecimento?

c) Qual a frequência natural amortecida? Qual a frequência de ressonância? Qual o sobressinal no domínio do tempo ('overshoot') para uma entrada degrau? Qual o pico na frequência de ressonância? Qual o tempo de acomodação?

d) Determine a matriz de resolvente e a matriz de transição;

e) Usando a matriz de transição, uma entrada degrau, e condições iniciais nulas, determine a resposta do sistema analiticamente para intervalos de tempo de 0,5 s;

f) Apresente as assíntotas dos gráficos de Bode para razão de amplitude em dB e fase em graus em função da frequência em rad/s.Use os resultados do item c) e trace gráficos mais precisos. Qual a largura de banda do sistema?

g) Qual a função de transferência do sistema?

h) Admita que você coloque um sistema, cuja função de transferência é:

$$G1 = \frac{s+2}{s+12}$$

em série com o sistema dos itens anteriores. Como ficarão os gráficos de assíntotas de Bode dos sistemas em série.

Figura 2: Exercício 2

Problema 2.

Solução: Como a função de transferência para o sistema é:

$$C(sI - A)^{-1}Bu + D \tag{3}$$

o que resulta em:

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 24} \tag{4}$$

Pelo critério de polos:

$$p_1 = -2.0000 + 4.4721i \tag{5}$$
$$p_2 = -2.0000 - 4.4721i \tag{6}$$

como ambos polos têm parte real negativa, o sistema é estável.

Pelo critério de Routh-Hurwitz:

- todos os coeficientes são reais e positivos;
- o ultimo valor é $-(1 \times 0) \times (24 \times 4)/4 = 24$;
- o critério atende ä especificação do valor constante da função de transferência e não apresenta valores intermediários negativos. Logo, o sistema é estável.

Com os polos, temos que:

$$\zeta\omega_n = 2 \tag{7}$$
$$\omega_d = 4,4721 \tag{8}$$
$$\omega_n = \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_d^2} = \sqrt{24} \tag{9}$$

Se $m = 1$, temos:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow k = 24N/m \tag{10}$$

$$\zeta = \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{6} = 0,408 \tag{11}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \Longrightarrow \omega_d = \sqrt{24}\sqrt{1-\frac{6}{36}} = 4,472rad/s \tag{12}$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} = 4rad/s \tag{13}$$

$$M = \exp\left(\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = 0,246m \tag{14}$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,342m = 2,6dB \tag{15}$$

$$T_{ac} = 4T = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2,001s \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

A matriz de transição:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2+4s+24}\right) & \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4s+24}\right) \\ \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{-12}{s^2+4s+24}\right) & \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+24}\right) \end{bmatrix} \tag{18}$$

A resposta analítica para t=0,5s:

$$y(t) = \int_0^{0,5} \Phi(t-\tau)d\tau \times 1 \times B \tag{19}$$

$$y(t) = \int_0^{0,5} \begin{bmatrix} \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4s+24}\right) \\ \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+24}\right) \end{bmatrix} d\tau \tag{20}$$

$\square$

Exercícios 10/11

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos João Pedro Dias Nunes 10705846

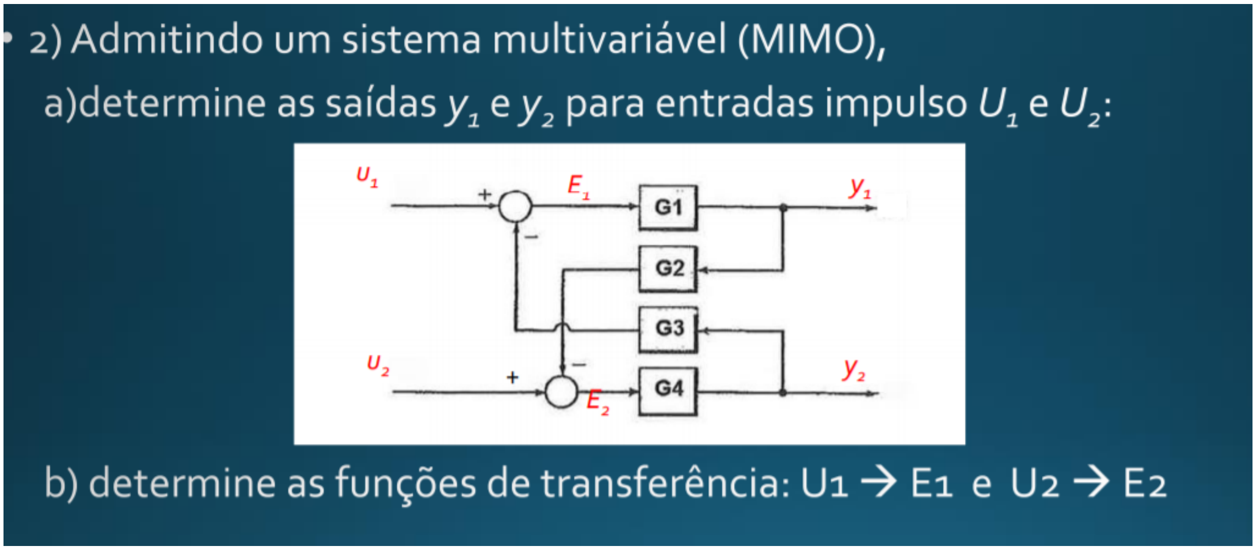

Figura 3: Exercício 3

Problema 3.

Solução:

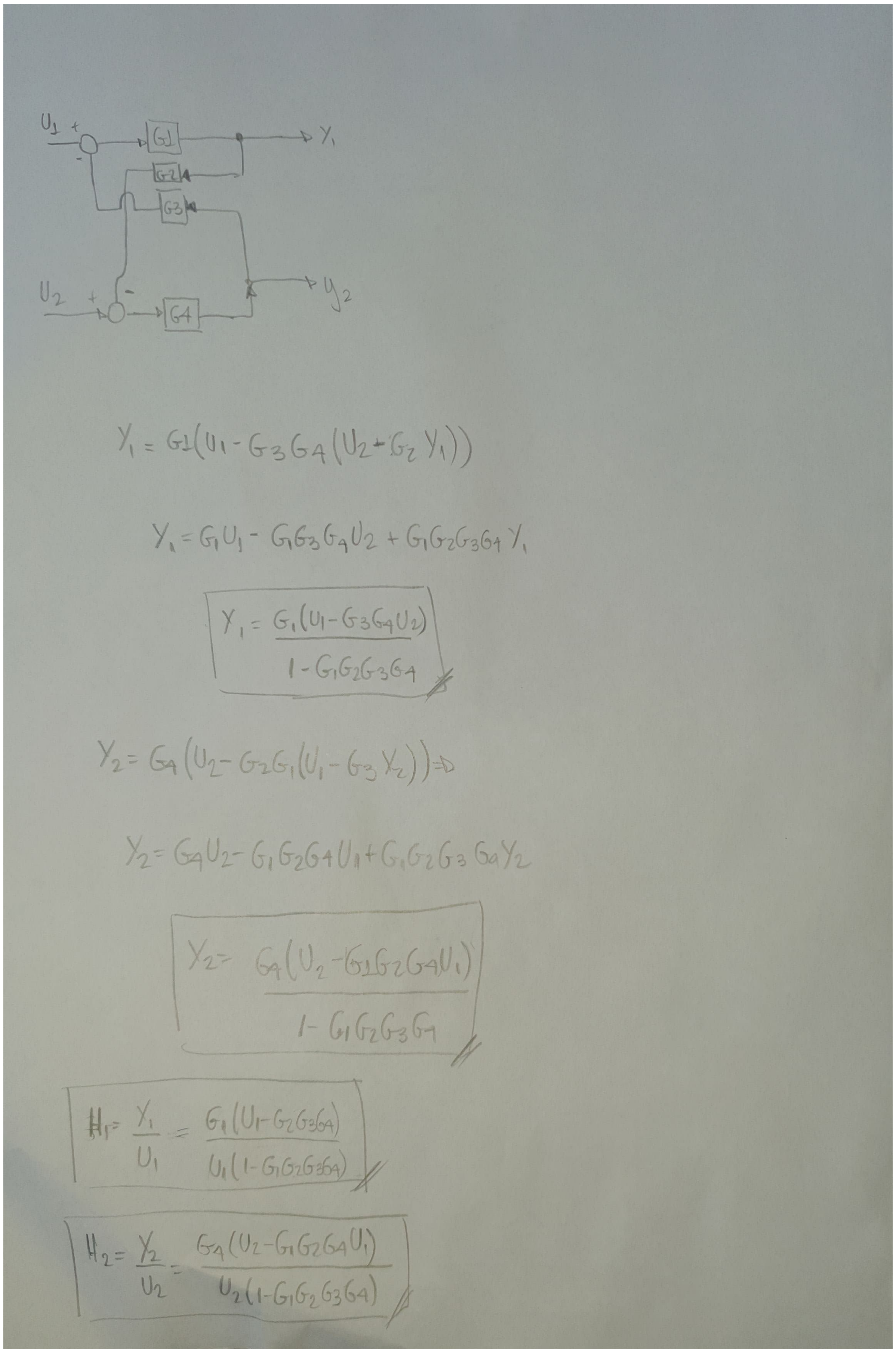

Figura 4: Solução 3

□

Exercícios 10/11

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos João Pedro Dias Nunes 10705846

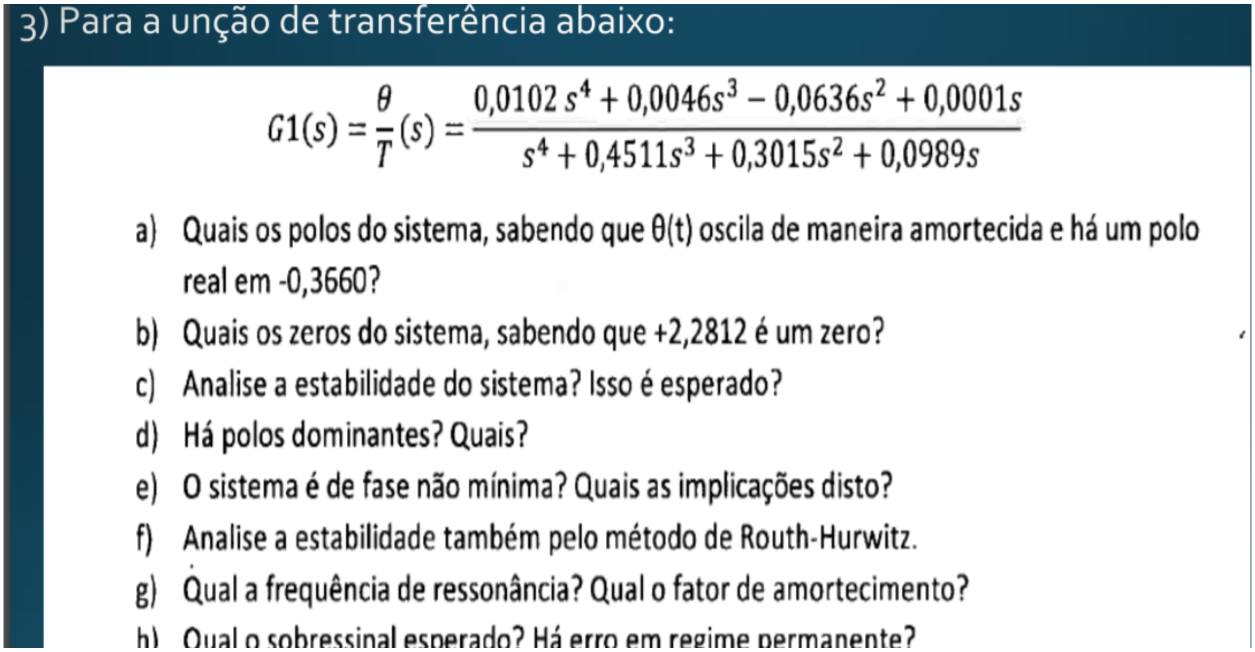

Figura 5: Exercício 4

Problema 4. *Solução:*

g) $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$

$$\cancel{s}(s+0{,}366)\cdot(s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2) = \cancel{s}(s^3+0{,}4511s^2+0{,}3015s+0{,}09)$$

Com os polos determinados, tem-se: $\zeta = 0{,}0819$; $\omega_n = 0{,}5199$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} = 0{,}5164 \text{ rad/s}$$

h) $M = \exp\left(\dfrac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = 0{,}7724\,m$ //

$$E_{ro} = \lim_{s\to 0} s\Theta(s) \Rightarrow \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}(0{,}0102s^{\cancel{4}\,3}+0{,}0046s^{\cancel{3}\,2}-0{,}036s^{\cancel{2}\,1}+0{,}0001\cancel{s})}{\cancel{s}(s^{\cancel{4}\,3}+0{,}4511s^{\cancel{3}\,2}+0{,}3015s^{\cancel{2}\,1}+0{,}0988\cancel{s})} = 0{,}001 \text{ rad}$$

Figura 6: Solução 4

g) $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$

$$\cancel{s}(s+0{,}366)+(s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2) = \cancel{s}(s^3+0{,}4511s^2+0{,}3015s+0{,}09)$$

Com os polos determinados, tem-se: $\zeta = 0{,}0819$; $\omega_0 = 0{,}5199$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} = 0{,}5164 \text{ rad/s}$$

h) $M = \exp\left(\dfrac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = 0{,}7724\,m$ //

$$Gr_0 = \lim_{s\to 0} s\Theta(s) \Rightarrow \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}(0{,}0102s^3+0{,}0046s^2-0{,}036s+0{,}0001)}{\cancel{s}(s^3+0{,}4511s^2+0{,}3015s+0{,}0989)} = 0{,}001 \text{ rad}$$

Figura 7: Solução 4

□