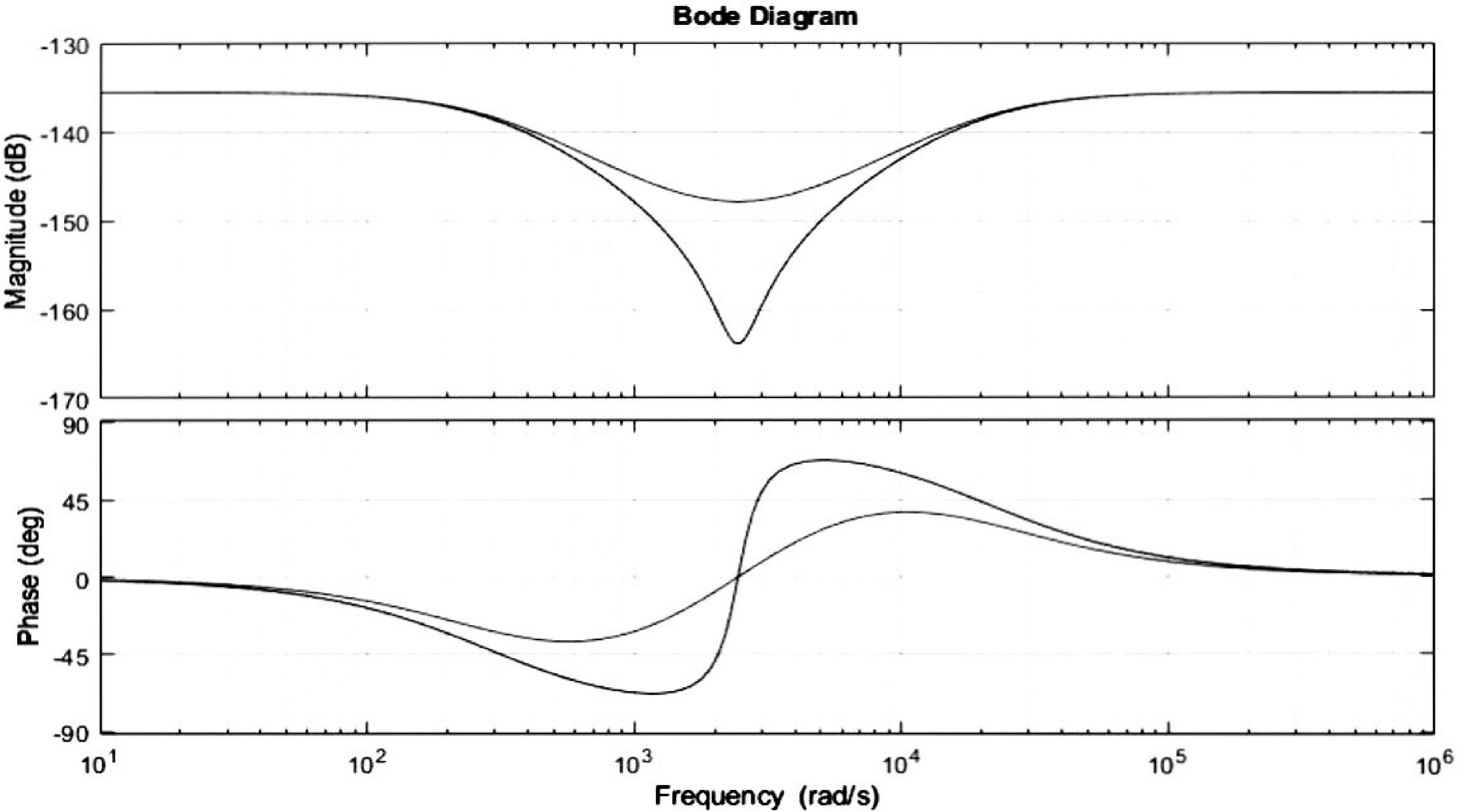


Bode Diagram
Magnitude (dB)
-130
-140
-150
-160
-170
Phase (deg)
90
45
0
-45
-90
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
Frequency (rad/s)

Gabriel Rodrigues Camargo - 10772460

PME3380 - Exc. 1

0) $FT_{original} = \dfrac{s^2 + 772,3 + 6002500}{6002500\, s^2 + 12185075.10^4 s + 36015.10^9}$

↳ Zeros reais e iguais

$F.T = \dfrac{s^2 + 4900 s + 6002500}{6002500\, s^2 + 12185075.10^4 s + 36015.10^9}$

1) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

a) Estabilidade

↳ Autovalores da matriz do sist → polos

$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 12 & s+4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(sI-A) = s^2 + 4s + 24 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P_1 = -2 + 2\sqrt{5}\, i$ → Parte real negativa contribui para sistema estável

$P_2 = -2 - 2\sqrt{5}\, i$

Multiplicação matricial

$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -12x_1 - 4x_2 + u \end{cases} \Rightarrow \dot{x}_2 = \dfrac{\ddot{x}_1}{2} \Rightarrow \ddot{x}_1 = -24x_1 - 8\dot{x}_1 + u$

↓ £

$s^2 X_1 = -4X_1 s - 24 + 20 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{X_1}{U} = \dfrac{2}{s^2 + 4s + 24}$ → Eq característica $s^2 + 4s + 24 = 0$

Routh - Hurwitz

$$\begin{array}{lll} s^2 & 1 & 24 \\ s^1 & 4 & 0 \\ 0 & 24 & \end{array} \longrightarrow$$ Ñ troca sinal → sistema estável

b) Polos $-2 + 2\sqrt{5}\,i$
$-2 \quad -2\sqrt{5}\,i$

$$\omega_n = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{5})^2} \Rightarrow \omega_n = 2\sqrt{6}$$

Com $m = 1$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow K = m\,\omega_n^2 = 24\,N/m$$

$$\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{2}{2\sqrt{6}} \approx 0{,}41$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{Km}} \Rightarrow c = \zeta\, 2\sqrt{Km} = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot 2 \cdot \sqrt{24} = 2\,Ns/m$$

c) $\omega_d = \mathrm{Im}(p) = 2\sqrt{5}$ rad/s

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} = 2\sqrt{6}\sqrt{1-2\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} \Rightarrow \omega_r = 4\ \text{rad/s}$$

$$M_{r\,Deg} = e^{\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \Rightarrow M_{r\,Deg} = 24{,}5\%$$

$$M_{r\,Res} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow M_{r\,Res} = 1{,}342 \Rightarrow M_{r\,Res}\,dB = 2{,}55\,dB$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{t_s = 2s}$$

d) $\Phi(\Delta t) = e^{A\Delta t}$ p/ $\Delta t = 0{,}5$

$$\Phi(\Delta t) = \begin{bmatrix} 0{,}0976 & 0{,}1294 \\ -0{,}7766 & -0{,}3565 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 12 & s+4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s^2+4s+24} & \frac{2}{s^2+4s+24} \\ \frac{-12}{s^2+4s+24} & \frac{s}{s^2+4s+24} \end{bmatrix}$$

e) $x(i+1) = \Phi x + \Gamma B \Rightarrow \Gamma \cdot B = \begin{bmatrix} 0{,}09147 \\ 0{,}06472 \end{bmatrix}$

Com $Y = [1 \quad 0]\, x$ p/ os 10 primeiros períodos:

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	0,0915	0,0909	0,0788	0,0844	0,0835	0,083

3,5	4	4,5	5
0,0834	0,0833	0,0833	0,0833

f) FT é: $G(s) = \frac{2}{s^2+4s+24}$

Em bode a FT é

$G(j\omega) = \frac{2}{24\left(\left(1-\frac{\omega^2}{24}\right) + \frac{\omega}{6}j\right)}$ $\qquad K_B = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

Assíntotas para ganho

- horizontal por $20\log|K_B| = -21{,}6\,dB$
- depois de $\omega_n = 2\sqrt{6}$ rad/s decai 40 dB/década

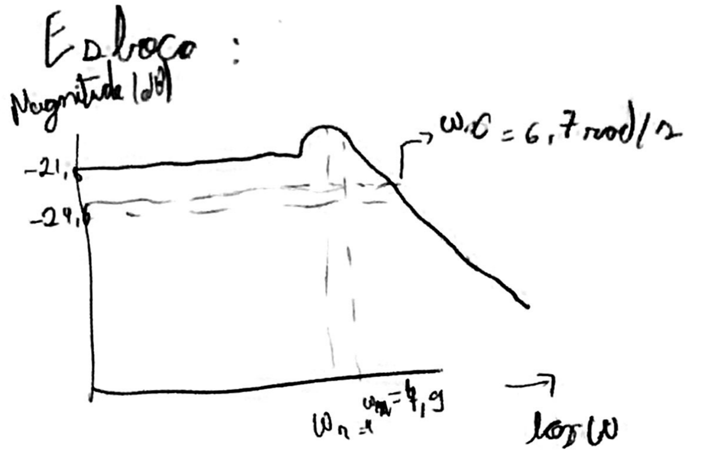
Assíntotas p/ fase;

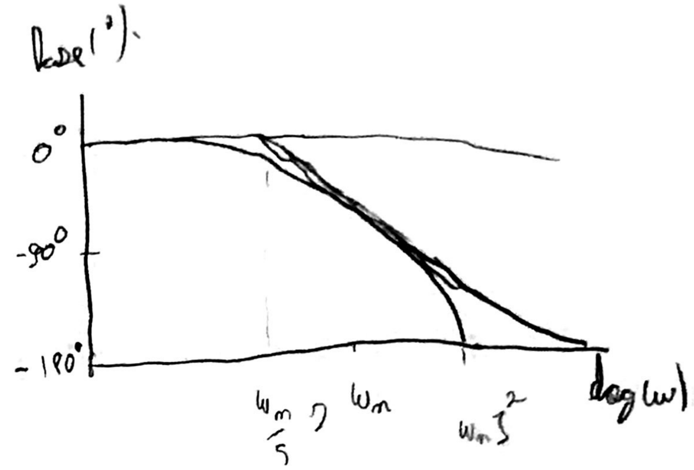
- $K_B > 0$; $\phi = 0°$
- Par de polos complexos conjugados: Fase diminui 180°
  cruza -90 em ω_n

Ajuste: Pico de $M_r = 1,342$ em $\omega_r = 4$

↳ $M_r\,dB = 2,55\,dB$

Esboço:





g) $G(s) = \dfrac{2}{s^2+4s+24}$

h) Nova FT

Em Bode

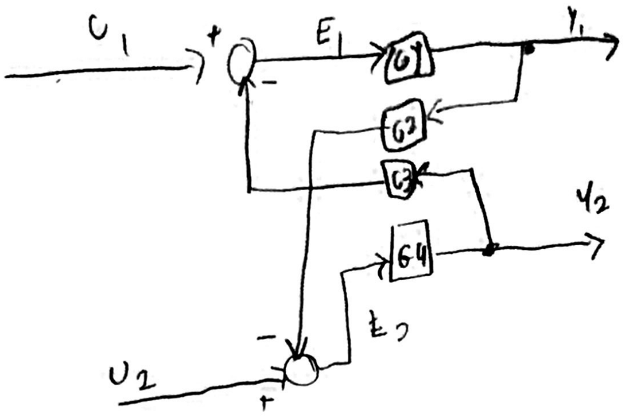
$$G_N(j\omega) = \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{12} \frac{\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\left(\frac{s}{12}+2\right)} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{24}\right)+\frac{\omega}{6}j}$$

$$K_0 = \frac{1}{72} = -37,15\,dB$$

Somando ao gráfico haverá assíntota que cresce 20dB/década a partir de $\omega = 2$ rad/s e uma que desce 20dB/dec em $\omega = 12$ rad/s

No gráfico de fase há variação p/ +90, passando em $\omega = 2$ por +45° e p/ -90° passando -45° em $\omega = 12$

2



a) $Y_1 = G_1 E_1 = G_1(U_1 - G_3 Y_2) =$

$= G_1(U_1 - G_3 G_4 E_2) =$

$= G_1(U_1 - G_3 G_4 (U_2 - G_2 Y_1)) \Rightarrow$

$\Rightarrow Y_1 = G_1 U_1 - G_1 G_3 G_4 U_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 Y_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow Y_1 (1 - G_1 G_2 G_3 G_4) = G_1 U_1 - G_1 G_3 G_4 U_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y_1 = \frac{G_1 U_1 - G_1 G_3 G_4 U_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$

Simetria

$$Y_2 = \frac{G_4 U_2 - G_1 G_2 G_4 U_1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$

b) $E_1 = U_1 - G_3 Y_2 = U_1 - G_3 G_4 E_2 = U_1 - G_3 G_4 U_2 + G_3 G_4 G_2 G_1 E_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow E_1 (1 - G_1 G_2 G_3 G_4) = U_1 - G_3 G_4 U_2 \Rightarrow \boxed{\frac{E_1}{U_1} = \frac{1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}}$

Simetria

$$\boxed{\frac{E_2}{U_2} = \frac{1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}}$$

$$G_1(s) = \frac{\theta}{T} = \frac{0{,}00015 - 0{,}0636s^2 + 0{,}0046s^3 + 0{,}0102s^4}{0{,}0989s + 0{,}3015s^2 + 0{,}4511s^3 + s^4}$$

a) Os polos são em $s_1 = 0$, $s_2 = -0{,}3660$, $s_3 = -0{,}0426 + 0{,}5182i$

$s_4 = -0{,}0426 - 0{,}5182i$

b) Os zeros são

$z_1 = 0$; $z_2 = 2{,}2612$; $z_3 = -2{,}7334$; $z_4 = 1{,}5725 \cdot 10^{-3}$

c) Parte real negativa, logo o sistema é estável, como o sistema oscila amortecidamente é esperado

d) Existem polos dominantes → par complexo conjugado

$P_1 = -0{,}0426 + 0{,}5182i$; $P_2 = -0{,}0426 - 0{,}5182i$

e) O sistema é de fase ñ mínima → apresenta 0 no semiplano direito → Sistema demora mais para responder e é difícil de controlar

f) Coef. ⊕ → Usando Tabela

s^3	1	0,3015
s^2	0,4511	0,0989
s^1	0,0823	0
s^0	0,0989	0

↳ Sem troca de sinal → sist estável

g) Polos dominantes → $\omega_n = \left((-0{,}0426)^2 + 0{,}5182^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\omega_n = 0{,}5199$ rad/s → $\zeta = \frac{0{,}0426}{0{,}5199}$

$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$; $\omega_r = 0{,}516$ rad/s

b) Entrada degrau

$$M_p = e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow M_p = 77\%$$

Erro

$$\theta_{t \to \infty}(t) = \lim_{s \to 0} s G_1 \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} G_1(s) = 0$$

↓ Sistema tende a 0 → erro $= \frac{1}{n}$