

BRUNO AKIRA OSHIRO
FRANCISCO SAMUEL AMÂNCIO LIMA
GABRIELA GOMES VALEJO SANCHES
WILSON SIOU KAN CHOW



PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos
Modelagem da Marcha Humana

São Paulo

2020

Lista de ilustrações

Figura 1 – Fluxograma das etapas para o equacionamento e resolução do problema	9
Figura 2 – Proporções de comprimento dos membros para um adulto (Santos, 2011).	10
Figura 3 – Proporções de Massa e CG (Batista, 2013).	11
Figura 4 – Linhas Imaginárias dos Eixos de Movimento do Corpo Humano e Planos de Secção (Behnke, 2004).	11
Figura 5 – Fases da marcha humana (Dollar e Herr, 2008).	13
Figura 6 – Seis determinantes da marcha (Kuo, 2007)	14
Figura 7 – Relação entre os modelos anatômico e elo-segmento. As junções são trocadas por dobradiças, e os segmentos são trocados por massas e momentos de inércia. (2009, Winter)	14
Figura 8 – Modelo proposto por Diego Pedroso (2011)	15
Figura 9 – Modelo proposto por Floriano Batista (2013)	15
Figura 10 – Modelo proposto por Pedro Carlos Russi (2002)	16
Figura 11 – Modelo utilizado	17
Figura 12 – Curva de movimento tabelada	29
Figura 13 – Torque no joelho ao longo do tempo	29
Figura 14 – Torque no quadril ao longo do tempo	30
Figura 15 – Movimento experimental e linearizado	31
Figura 16 – Gráficos de ângulos	31
Figura 17 – Gráficos das velocidades angulares	31
Figura 18 – Torques linearizados e não linearizados com entradas tabeladas de Winter (2009)	32
Figura 19 – Ângulos dos membros inferiores de acordo a porcentagem do ciclo (Dollar e Herr, 2008)	33
Figura 20 – Aproximação por funções senoidais dos ângulos dos membros inferiores de acordo a porcentagem do ciclo, com ajustes ao referencial adotado	33
Figura 21 – Velocidades provenientes da curva senoidal aproximada	34
Figura 22 – Torques de entrada no espaço de estados	34
Figura 23 – Ângulos e velocidades angulares para baixas angulações resultantes do espaço de estados	35
Figura 24 – Movimento teórico e linearizado para pequenas angulações	35
Figura 25 – Diagrama de Bode para a torque no joelho apoio para o ângulo do joelho de apoio	37
Figura 26 – Diagrama de Bode para a torque no quadril de apoio para o ângulo do quadril de apoio	37

Figura 27 – Diagrama de Bode para a torque no quadril de balanço para o ângulo do quadril de balanço	38
Figura 28 – Diagrama de Bode para a torque no joelho de balanço para o ângulo do joelho de balanço	38

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros iniciais do sistema	18
Tabela 2 – Pólos do sistema	28

Lista de abreviaturas e siglas

$\ddot{\theta}$	Derivada segunda de θ em relação ao tempo
$\dot{\theta}$	Derivada de θ em relação ao tempo
$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$	Derivada parcial da expressão Lagrangeana em relação a \dot{q}_i
$\frac{\partial L}{\partial q_i}$	Derivada parcial da expressão Lagrangeana em relação a q_i
$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada parcial em relação ao tempo
$\frac{d}{dt}$	Derivada em relação ao tempo
θ	Ângulo devido ao movimento do corpo rígido
E_C	Energia cinética
E_P	Energia potencial
g	Aceleração da gravidade
L	Expressão Lagrangeana
l_i	Comprimento do segmento
r_i	Localização do centro de massa do segmento
CG	Centro de gravidade
CM	Centro de massa

Sumário

1	Resumo	8
2	Objetivo	8
3	Metodologia	8
4	Introdução	9
4.1	Antropometria	10
4.1.1	Comprimento	10
4.1.2	Massa e Centro de Massa	10
4.2	Movimento dos membros inferiores	11
4.2.1	O quadril	12
4.2.2	O joelho	12
4.2.3	O tornozelo	12
4.3	Marcha	12
4.3.1	Fase de Apoio	13
4.3.2	Fase de balanço	13
5	Revisão Bibliográfica	13
6	Modelagem	16
6.1	Hipóteses	16
6.2	Modelo Físico	17
6.2.1	Parâmetros do sistema	17
6.3	Equacionamento	18
6.3.1	Cinemática	18
6.3.2	Energias cinéticas e potenciais	19
6.4	Linearização	23
6.5	Espaço de Estados	26
7	Análise	28
7.1	Critério de estabilidade	28
7.2	Dinâmica Inversa	28
7.3	Dinâmica Direta	30
7.3.1	Validação da linearização	32
7.3.2	Teste da linearização para baixas angulações	33
7.3.3	Acúmulo de erros	36
7.4	Função de Transferência	36
7.5	Diagrama de Bode	36
8	Conclusão	38
	Referências bibliográficas	40

APÊNDICES	41
APÊNDICE A – DERIVADAS PARCIAIS DO SISTEMA	42
APÊNDICE B – CÓDIGOS	45

1 Resumo

O estudo da marcha humana é de suma importância para identificar patologias na mobilidade e desenvolver próteses e órteses. Trata-se de um sistema complexo, no qual cada membro inferior possui oito graus de liberdade: três no quadril, dois no joelho e três no tornozelo. Este trabalho consiste no desenvolvimento de um modelo simplificado dos membros inferiores, com quatro graus de liberdade, no qual estuda-se a caminhada humana no plano. É um pêndulo triplo invertido acoplado a um pêndulo duplo. Após a obtenção das equações de Lagrange, foi utilizada a dinâmica inversa, com ângulos, velocidades e acelerações como entradas, para obter os torques que posteriormente seriam utilizados na dinâmica direta. Essas equações de Lagrange também foram linearizadas e utilizadas para construir o espaço de estados e, nele, foram usados os torques obtidos anteriormente como entrada a fim de obter a cinemática calculada. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados obtidos experimentalmente (Winter, 2009) para verificar a validade do modelo utilizado.

Palavras-chave: Modelagem. Marcha humana. Dinâmica inversa. Dinâmica direta.

2 Objetivo

O presente trabalho se propõe à modelagem e análise inicial do comportamento dinâmico de um sistema que se assemelha ao da marcha humana, composto por quatro corpos rígidos (pernas e coxas) considerando o movimento plano de flexão e extensão destes. A dinâmica inversa é usada para encontrar as entradas do modelo por meio de dados tabelados, e a dinâmica direta aplica a sua resolução. Planeja-se futuramente a modelagem de um sistema com controle ativo. Pretende-se aproximar o modelo proposto o máximo possível de uma marcha humana real, permitindo o seu uso em pesquisas que possibilitem avanços na área da biomecânica.

3 Metodologia

Primeiramente serão apresentados os conceitos básicos da antropometria e da marcha humana necessários para o entendimento do presente trabalho. Após a introdução, será mostrada a revisão da literatura utilizada para construção de um modelo físico adequado para representação do sistema real. Para o equacionamento matemático, primeiramente, as equações cinemáticas serão calculadas para que sejam utilizadas, posteriormente, no método de Lagrange. O sistema de equações será linearizado em torno do ponto de equilíbrio, por meio do método de Taylor de primeira ordem, e escrito na forma de espaço de estados, permitindo a simulação em *MATLAB*[®] e análise dos resultados obtidos para

dados tabelados. Como será mostrado ao longo do presente trabalho, para o cálculo das entradas no sistemas se fará uso da dinâmica inversa aplicada ao modelo não-linear, vide a figura 1, este passo é necessário devido a característica instável do sistema, e também para suprimir a insipiência sobre a teoria de controle.

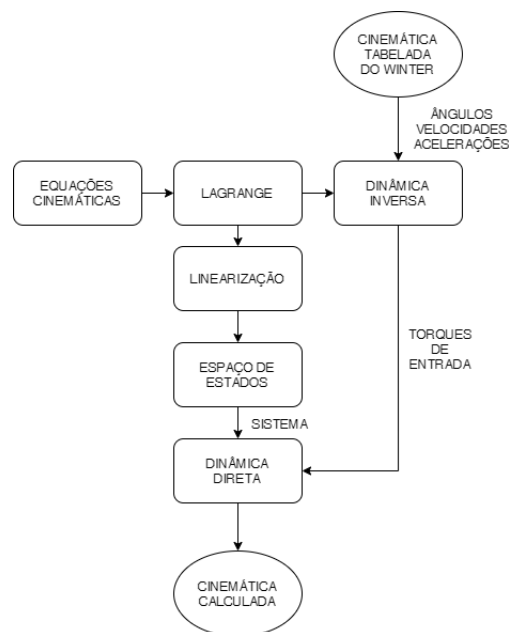


Figura 1 – Fluxograma das etapas para o equacionamento e resolução do problema

4 Introdução

O estudo da marcha antropomórfica é essencial para diagnosticar patologias de mobilidade e desenvolver próteses ou órteses para reabilitá-las. Ela parte de três premissas: progressão, estabilidade e adaptação.

- Progressão: padrão motor básico de movimentos rítmicos dos membros inferiores e tronco para movimentar o corpo na direção desejada.
- Estabilidade: necessidade de manter uma postura propícia para movimentação e garantir estabilidade dinâmica dos movimentos do corpo.
- Adaptação: habilidade de modificar o movimento de acordo com a necessidade, como evitar obstáculos ou alterar velocidade e direção.

A marcha também pode ser caracterizada através de variáveis temporais e de distância: a cadência, em média 110 passos/minuto para homens e 115 passos/minuto para mulheres; comprimento do passo médio de 76.3 cm; e velocidade média de 1.46m/s. (Newmann, 2011)

Segmento	Definição do comprimento do segmento	Peso do segmento / peso total do corpo	Centro de massa / comprimento do segmento		Raio de giro / comprimento do segmento
			Proximal	Distal	Centro de gravidade
Pé	Maléolo lateral/cabeça do metatarso ii	0.0145	0.5	0.5	0.475
Perna	Côndilos femorais/ maléolo mediano	0.0465	0.433	0.567	0.302
Coxa	Trocânter maior/ côndilos femorais	0.1	0.433	0.567	0.323
Perna e pé	Côndilos femorais/ maléolo mediano	0.061	0.606	0.394	0.416
Perna total	Trocânter maior/maléolo mediano	0.161	0.447	0.553	0.326

Figura 3 – Proporções de Massa e CG (Batista, 2013).

4.2 Movimento dos membros inferiores

Para um melhor entendimento do movimento dos membro do corpo humano é necessário dividi-lo em três planos e eixos conforme a figura 4:

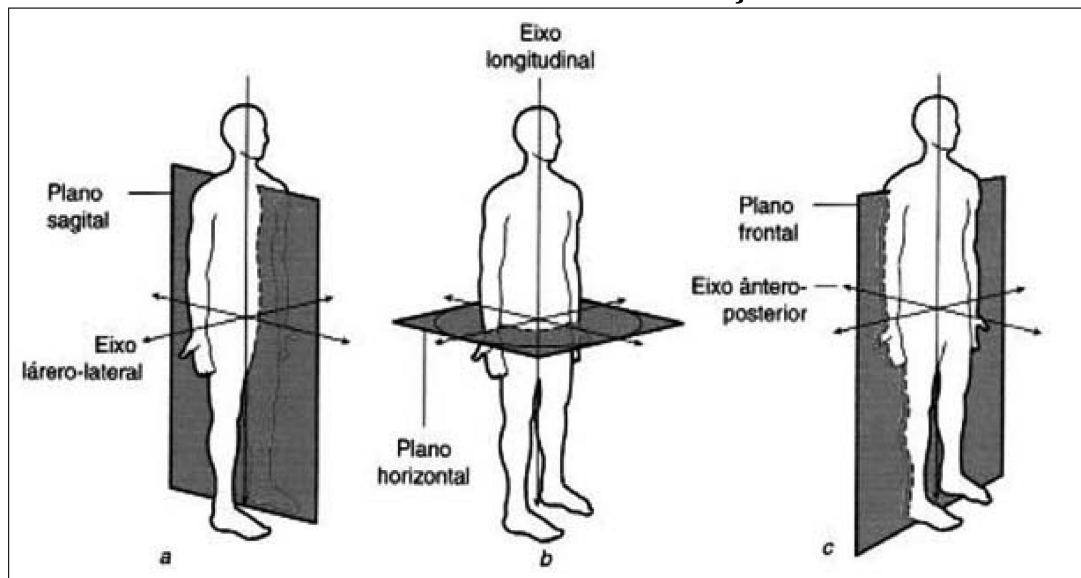


Figura 4 – Linhas Imaginárias dos Eixos de Movimento do Corpo Humano e Planos de Secção (Behnke, 2004).

- Plano sagital, que divide o corpo entre direita e esquerda;
- Plano frontal, que divide o corpo entre anterior e posterior;
- Plano transversal, que divide o corpo em parte superior e inferior.

O movimento de marcha humana possui no total oito graus de liberdade para cada perna, esses movimentos são explicados a seguir usando sempre como referencial o ponto de vista da pessoa.

4.2.1 O quadril

O quadril possui três graus de liberdade, sendo responsável pelo movimento das coxas. O primeiro grau é conhecido como movimento de flexão e extensão, ocorre no plano sagital e é responsável por deslocar a perna para frente no referencial da pessoa, quando ocorre distensão do ligamento, e para trás o que gera tensão nos ligamentos. Esse tipo de movimento permite ações como sentar e levantar. O segundo grau é o movimento de abdução e adução, acontecendo no plano frontal, movendo as pernas para fora e dentro do corpo respectivamente, sendo este movimento responsável pelo equilíbrio na marcha ao regular o posicionamento do centro de massa quando uma das pernas está em balanço. O terceiro grau é caracterizado pela rotação em torno do eixo longitudinal, dirige os pés para dentro e para fora, sendo este movimento o responsável pelas curvas. (Whittle, 2007)

4.2.2 O joelho

O joelho possui dois graus de liberdade, sendo seu movimento principal o de flexão e extensão que é a rotação em torno do eixo médio lateral, e é responsável por regular a altura do corpo em relação ao chão. Existe ainda o movimento de abdução e adução, que é a rotação sem carga e com as pernas levantadas em torno do eixo ântero-posterior. (Whittle, 2007)

4.2.3 O tornozelo

O tornozelo possui três graus de liberdade, permitindo rotação em torno dos três eixos do corpo. A rotação em torno do eixo longitudinal, conhecida como abdução e adução, realizando do ponto de vista da pessoa um movimento para fora e para dentro. O giro em torno do eixo ântero-posterior, conhecido como inversão e eversão, inclinado o pé para fora e para dentro. E por fim o a rotação em torno do eixo médio-lateral, conhecida como flexão dorsal e planar, movimentando o pé para cima e para baixo. Este último é o movimento mais relevante dos tornozelos para a locomoção. (Whittle, 2007)

4.3 Marcha

A marcha humana é a principal função dos membros inferiores, podendo ser dividida em duas fases principais, apoio e balanço, que quando analisadas de maneira mais minuciosa apresentam outras subdivisões. Um ciclo de marcha completo se caracteriza pela passagem pelas duas fases por ambas as pernas (Dollar e Herr, 2008).

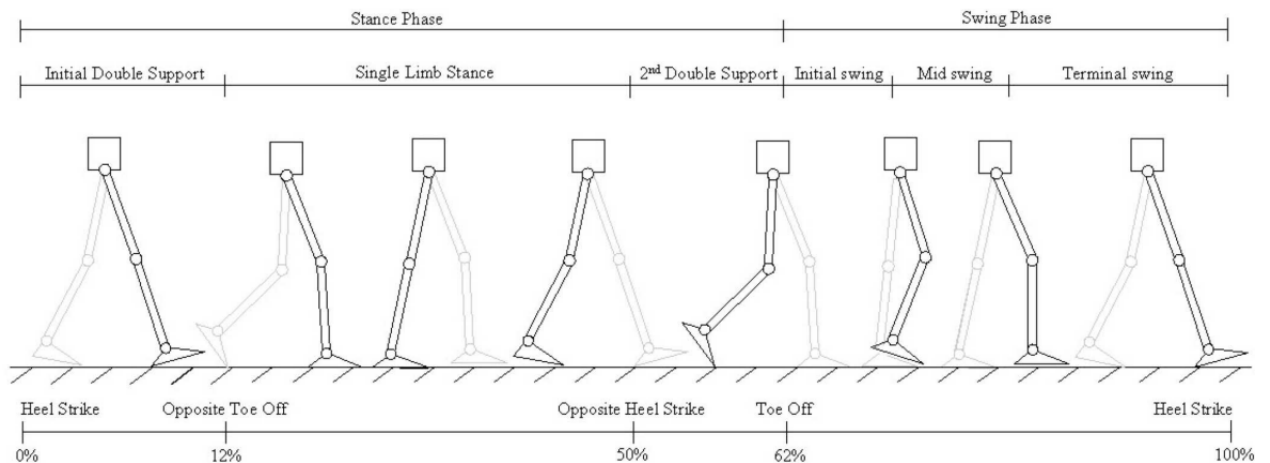


Figura 5 – Fases da marcha humana (Dollar e Herr, 2008).

4.3.1 Fase de Apoio

O ciclo é composto por 62% na fase de apoio, sendo esta caracterizada pela interação com o solo, passando pela sub-fases de suporte duplo onde os dois pés estão em contato com o solo, e suporte único onde apenas um pé está no chão (Dollar e Herr, 2008).

4.3.2 Fase de balanço

O resto do movimento é composto pela fase balanço, em que o pé não está em contato com o chão, sendo subdividida em balanço inicial, médio e final. O movimento é simétrico estando sempre uma perna 50% adiantada ou atrasada em relação a outra (Dollar e Herr, 2008).

5 Revisão Bibliográfica

Arthur D. Kuo (2007) explica um modelo antigo da marcha humana, chamado de "seis determinantes da marcha" (figura 6), o qual parte da premissa de que durante o movimento, o centro de massa não deveria oscilar verticalmente, haja vista, que é um gasto desnecessário de energia do corpo, sendo o gasto de energia do movimento explicado pelo torque nas pernas. Apesar de aceito como um fato por mais de 40 anos, esse modelo foi refutado com dados experimentais.

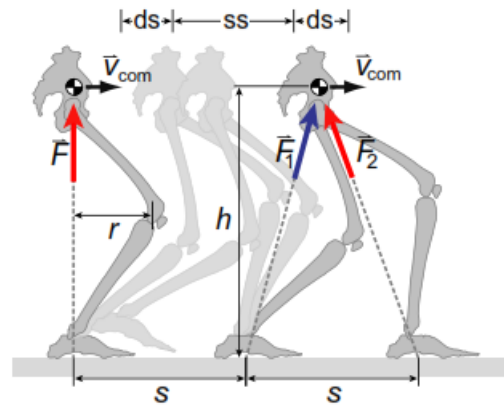


Figura 6 – Seis determinantes da marcha (Kuo, 2007)

O livro de David A. Winter: "Biomecânica e Controle Motor do Movimento Humano" (2009) é uma das maiores referências no mundo sobre o estudo da marcha humana. O autor, possui outros livros abordando temas parecidos, mas neste, conseguiu atrair a atenção de diversos pesquisadores, que usaram os conhecimentos do livro nas suas análises e modelos. Uma das simplificações propostas é o modelo da figura 7:

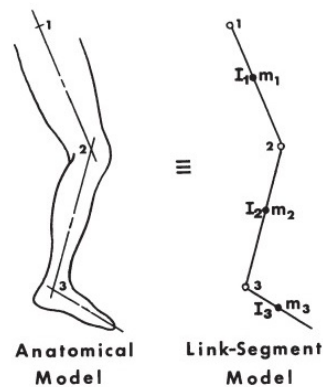


Figura 7 – Relação entre os modelos anatômico e elo-segmento. As junções são trocadas por dobradiças, e os segmentos são trocados por massas e momentos de inércia. (2009, Winter)

Diego Pedroso (2011) propõe um modelo para criar uma prótese para pessoas com lesões medulares nas vértebras T2 e L1, considerando ambas as pernas e as coxas, com o ângulo do tronco fixo, executando um movimento plano. As equações são encontradas por meio de Lagrange, usando a dinâmica inversa se compara os torques do modelo com dados experimentais.

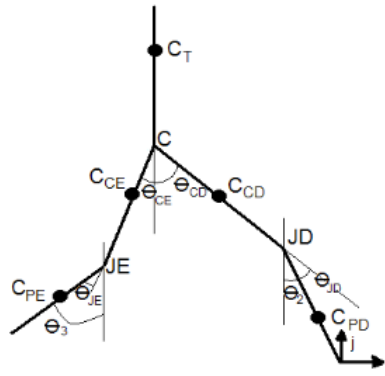


Figura 8 – Modelo proposto por Diego Pedroso (2011)

Floriano Batista (2013) modela a criação de um exoesqueleto robótico com dois modelos, simula a perna de apoio como um pêndulo duplo invertido, e a perna de balanço como um pêndulo duplo. As equações são encontradas por Lagrange, linearizadas, por fim é construído um sistema de controle para regulação dos torques impostos.

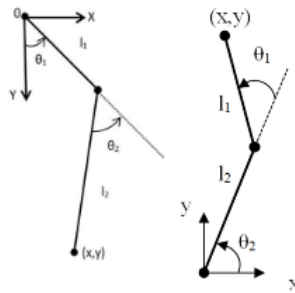


Figura 9 – Modelo proposto por Floriano Batista (2013)

Pedro Carlos Russi (2002) propõe dois modelos para o movimento, ficando um modelo para sua fase de oscilação (pêndulo duplo) e um para a sua fase de apoio (pêndulo triplo invertido). Justificando este modelo dada a hipótese de que o tronco só exerce alguma influência significativa na fase de apoio porque existe o contato com o solo, que acelera o sistema para frente. As equações são encontradas por Lagrange, e a dinâmica inversa é usada para encontrar os torques que são comparados com os da literatura.

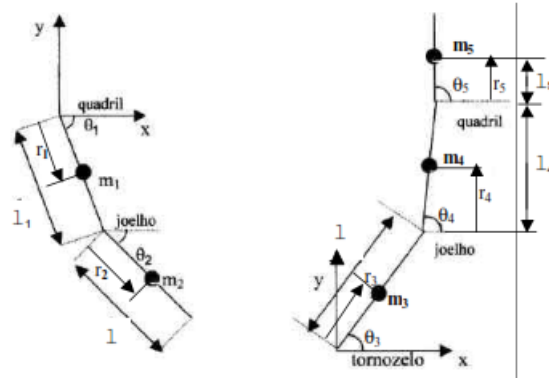


Figura 10 – Modelo proposto por Pedro Carlos Russi (2002)

Anna Rafaela Silva Ferreira (2017) criou um modelo bípede considerando ambos os pés, pernas e quadris. Porém com o mesmo ângulo para ambas as coxas, sendo este modelo separado em dois casos, um para o modelo de apoio duplo e outro para o de apoio simples. As posições são encontradas, e o sistema é resolvido por meio da dinâmica inversa com os multiplicadores de Lagrange. Por fim os torques são comparados com o de uma curva experimental.

6 Modelagem

6.1 Hipóteses

O primeiro passo para a modelagem é a adoção de hipóteses simplificadoras, por conta da complexidade que o corpo humano possui. Assim as seguintes hipóteses foram consideradas:

1. A localização do CM de cada segmento irá permanecer fixa durante o movimento;
2. O momento de inércia de cada segmento em relação ao seu CM é constante durante o movimento;
3. O tamanho de cada segmento permanece constante durante todo o movimento;
4. Os membros inferiores foram aproximados por barras delgadas;
5. Toda a massa dos membros superiores foram concentradas no tronco;
6. O tronco está sempre a 90 graus em relação ao solo;
7. O movimento da marcha estudada é limitado ao plano sagital;
8. O pé é desconsiderado da análise, por ter massa muito menor em relação aos outros membros e por não ser essencial para o movimento da marcha humana (Pedroso, 2011);

9. Forças resistivas serão desprezadas, assim como o impacto da colisão que o pé possui no contato com o chão ao final da fase de balanço.

6.2 Modelo Físico

O modelo para modelagem da marcha humana é apresentado na figura 11. Assim como dito nas hipóteses simplificadoras, os membros foram aproximados a barras delgadas. O modelo escolhido contém elementos dos modelos de Pedroso (2011) e Russi (2002). Dessa forma, o modelo resultante pode ser comparado a um pêndulo triplo invertido (perna de apoio) acoplado a um pêndulo duplo comum (perna de balanço). O sistema de coordenadas se encontra fixo na extremidade inferior do membro 1, ou seja, o tornozelo da perna em fase de apoio.

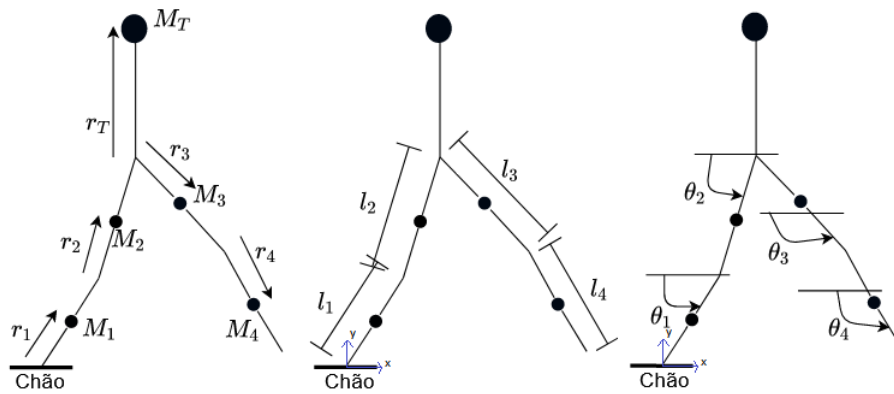


Figura 11 – Modelo utilizado

Os comprimentos das pernas e coxas são representados por l_1 , l_2 , l_3 e l_4 e a localização de seus centros de massa são r_1 , r_2 , r_3 , r_4 , sendo r_t o centro de massa do tronco. As massas de cada membro são M_1 , M_2 , M_3 , M_4 e M_t que é a massa do tronco. O sistema possui quatro variáveis independentes: θ_1 , θ_2 , θ_3 e θ_4 . Lembrando-se que o tronco é fixo em 90° em relação ao solo.

6.2.1 Parâmetros do sistema

Os parâmetros do sistema foram obtidos no livro de Winter (2009). Estudou-se a marcha de um indivíduo de 1,73m de altura e 56,7kg de massa. Dessa forma, por meio das Figura 2 e Figura 3 pode-se calcular todas as massas e comprimentos dos membros inferiores. A localização da massa do tronco foi obtida com a média de distância entre o quadril e costelas (veja a Figura 2). O peso dos pés foi desconsiderado por ser muito mais leve que os demais membros. Assim, obtém-se os seguintes valores.

Tabela 1 – Parâmetros iniciais do sistema

	Massa (kg)	Comprimento l (m)	Comprimento r (m)	Momento de inércia I (kg.m ²)
Perna de apoio	2,6933	0,4256	0,2413	0,0385
Coxa de apoio	5,9535	0,4239	0,2403	0,0843
Coxa de balanço	5,9535	0,4239	0,1835	0,0843
Perna de balanço	2,6933	0,4256	0,1843	0,08385
Tronco	37,76	-	0,1644	-

6.3 Equacionamento

6.3.1 Cinemática

O equacionamento do movimento é realizado pelo método de Lagrange. Assim, inicialmente realiza-se o equacionamento cinemático para os centros de massa, a fim de encontrar suas energias cinéticas e potenciais. Vale notar, também, que foi utilizada a biblioteca simbólica do *MATLAB*[®] para todo o equacionamento, pode-se encontrar os programas utilizados no Anexo B.

A posição de M_1 é:

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cos(\theta_1) \\ r_1 \text{sen}(\theta_1) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Derivando r_1 em relação ao tempo, obtém-se sua velocidade \dot{r}_1 .

$$\dot{R}_1 = \begin{bmatrix} -r_1 \text{sen}(\theta_1) \dot{\theta}_1 \\ r_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1 \text{sen}(\theta_1) \\ r_1 \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 \quad (2)$$

A posição de M_2 é:

$$R_2 = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) \\ l_1 \text{sen}(\theta_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) \\ \text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2) \\ l_1 \text{sen}(\theta_1) + r_2 \text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Derivando r_2 em relação ao tempo, obtém-se sua velocidade \dot{r}_2 .

$$\dot{R}_2 = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(\theta_1) \dot{\theta}_1 - r_2 \text{sen}(\theta_2) \dot{\theta}_2 \\ l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + r_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(\theta_1) & -r_2 \text{sen}(\theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) & r_2 \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

A posição de M_3 é:

$$R_3 = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2) - r_3 \cos(\theta_3) \\ l_1 \text{sen}(\theta_1) + l_2 \text{sen}(\theta_2) - r_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Derivando r_3 em relação ao tempo, obtém-se sua velocidade \dot{r}_3 .

$$\dot{R}_3 = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(\theta_1) & -l_2 \text{sen}(\theta_2) & r_3 \text{sen}(\theta_3) \\ l_1 \text{cos}(\theta_1) & l_2 \text{cos}(\theta_2) & -r_3 \text{cos}(\theta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

A posição de M_4 é:

$$R_4 = \begin{bmatrix} l_1 \text{cos}\theta_1 + l_2 \text{cos}\theta_2 - l_3 \text{cos}\theta_3 - r_4 \text{cos}\theta_4 \\ l_1 \text{sen}\theta_1 + l_2 \text{sen}\theta_2 - l_3 \text{sen}\theta_3 - r_4 \text{sen}\theta_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Derivando r_4 em relação ao tempo, obtém-se sua velocidade \dot{r}_4 .

$$\dot{R}_4 = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}\theta_1 & -l_2 \text{sen}\theta_2 & l_3 \text{sen}\theta_3 & r_4 \text{sen}\theta_4 \\ l_1 \text{cos}\theta_1 & l_2 \text{cos}\theta_2 & -l_3 \text{cos}\theta_3 & -r_4 \text{cos}\theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

A posição de M_t é:

$$\begin{aligned} R_t &= \begin{bmatrix} l_1 \text{cos}\theta_1 + l_2 \text{cos}\theta_2 \\ l_1 \text{sen}\theta_1 + l_2 \text{sen}\theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} l_1 \text{cos}\theta_1 + l_2 \text{cos}\theta_2 \\ l_1 \text{sen}\theta_1 + l_2 \text{sen}\theta_2 + r_t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Derivando R_t em relação ao tempo, obtém-se sua velocidade \dot{R}_t .

$$\begin{aligned} \dot{R}_t &= \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}\theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \text{sen}\theta_2 \dot{\theta}_2 \\ l_1 \text{cos}\theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \text{cos}\theta_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}\theta_1 & -l_2 \text{sen}\theta_2 \\ l_1 \text{cos}\theta_1 & l_2 \text{cos}\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

6.3.2 Energias cinéticas e potenciais

A energia cinética na forma matricial é dada por:

$$E_{C1} = \frac{1}{2} M_1 \dot{R}_1^T \dot{R}_1 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (11)$$

$$E_{C2} = \frac{1}{2} M_2 \dot{R}_2^T \dot{R}_2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (12)$$

$$E_{C3} = \frac{1}{2} M_3 \dot{R}_3^T \dot{R}_3 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2 \quad (13)$$

$$E_{C4} = \frac{1}{2} M_4 \dot{R}_4^T \dot{R}_4 + \frac{1}{2} I_4 \dot{\theta}_4^2 \quad (14)$$

$$E_{Ct} = \frac{1}{2} M_t \dot{R}_t^T \dot{R}_t \quad (15)$$

Desenvolvendo as expressões, vale lembrar que $l_3 = l_2$, $l_4 = l_1$, $M_3 = M_2$ e $M_4 = M_1$:

$$E_{C1} = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (M_1 r_1^2 + I_1) \quad (16)$$

$$E_{C2} = \frac{1}{2} (M_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \text{sen}\theta_1 + \dot{\theta}_2 r_2 \text{sen}\theta_2)^2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} (M_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \text{cos}\theta_1 + \dot{\theta}_2 r_2 \text{cos}\theta_2)^2) \quad (17)$$

$$E_{C3} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} (M_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \text{cos}\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \text{cos}\theta_2 - \dot{\theta}_3 r_3 \text{cos}\theta_3)^2) + \frac{1}{2} (M_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \text{sen}\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}\theta_2 - \dot{\theta}_3 r_3 \text{sen}\theta_3)^2) \quad (18)$$

$$E_{C4} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} (M_1 (l_1 \dot{\theta}_1 \text{cos}\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \text{cos}\theta_2 - l_2 \dot{\theta}_3 \text{cos}\theta_3 - \dot{\theta}_4 r_4 \text{cos}\theta_4)^2) + \frac{1}{2} (M_1 (l_1 \dot{\theta}_1 \text{sen}\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}\theta_2 - l_2 \dot{\theta}_3 \text{sen}\theta_3 - \dot{\theta}_4 r_4 \text{sen}\theta_4)^2) \quad (19)$$

$$E_{Ct} = (M_t (l_1 \dot{\theta}_1 \text{cos}\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \text{cos}\theta_2)^2) / 2 + (M_t (l_1 \dot{\theta}_1 \text{sen}\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}\theta_2)^2) / 2 \quad (20)$$

Então a energia cinética total é dada por:

$$E_C = E_{C1} + E_{C2} + E_{C3} + E_{C4} + E_{Ct} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
E_c = & \frac{1}{2}(M_2(l_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + \dot{\theta}_2 r_2 \sin(\theta_2))^2) + \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2(M_1 r_1^2 + I_1)) + \frac{1}{2}(I_2 \dot{\theta}_2^2) + \\
& + \frac{1}{2}(I_1 \dot{\theta}_4^2) + \frac{1}{2}(I_2 \dot{\theta}_3^2) + \frac{1}{2}(M_1(l_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - l_2\dot{\theta}_3 \cos(\theta_3) - \\
& - \dot{\theta}_4 r_4 \cos(\theta_4))^2) + \frac{1}{2}(M_1(l_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - l_2\dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) - \\
& - \dot{\theta}_4 r_4 \sin(\theta_4))^2) + \frac{1}{2}(M_2(l_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_3 r_3 \cos(\theta_3))^2) + \\
& + \frac{1}{2}(M_t(l_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2))^2) + \frac{1}{2}(M_2(l_1 * \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - \\
& - \dot{\theta}_3 r_3 \sin(\theta_3))^2) + \frac{1}{2}(M_t(l_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2))^2) + \\
& + \frac{1}{2}(M_2(l_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + \dot{\theta}_2 r_2 \cos(\theta_2))^2)
\end{aligned} \tag{22}$$

A energia potencial de cada um dos segmentos é:

$$E_{P1} = M_1 g r_1 \text{sen}\theta_1 \tag{23}$$

$$E_{P2} = M_2 g l_1 \text{sen}\theta_1 + M_2 g r_2 \text{sen}\theta_2 \tag{24}$$

$$E_{P3} = M_3 g (l_1 \text{sen}\theta_1 + l_2 \text{sen}\theta_2 - r_3 \text{sen}\theta_3) \tag{25}$$

$$E_{P4} = M_4 g (l_1 \text{sen}\theta_1 + l_2 \text{sen}\theta_2 - l_3 \text{sen}\theta_3 - r_4 \text{sen}\theta_4) \tag{26}$$

$$E_{Pt} = M_t g (r_t + l_1 \text{sen}\theta_1 + l_2 \text{sen}\theta_2) \tag{27}$$

Portanto, a energia potencial total é:

$$\begin{aligned}
E_P = & M_1 g (l_1 \text{sen}(\theta_1) + l_2 \text{sen}(\theta_2) - l_2 \text{sen}(\theta_3) - r_4 \text{sen}(\theta_4)) + \\
& + M_2 g (l_1 \text{sen}(\theta_1) + r_2 \text{sen}(\theta_2)) + M_t g (r_t + l_1 \text{sen}(\theta_1) + l_2 \text{sen}(\theta_2)) + \\
& + M_2 g (l_1 \text{sen}(\theta_1) + l_2 \text{sen}(\theta_2) - r_3 \text{sen}(\theta_3)) + M_1 g r_1 \text{sen}(\theta_1)
\end{aligned} \tag{28}$$

Como a equação de Lagrange é dada por $L = E_C - E_P$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
L = & (M_2(l_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + \dot{\theta}_2 r_2 \sin(\theta_2))^2)/2 + (\dot{\theta}_1^2(M_1 r_1^2 + I_1))/2 + (I_2\dot{\theta}_2^2)/2 \\
& +(I_1\dot{\theta}_4^2)/2 + (I_2\dot{\theta}_3^2)/2 + (M_1(l_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - l_2\dot{\theta}_3 \cos(\theta_3) \\
& - \dot{\theta}_4 r_4 \cos(\theta_4))^2)/2 + (M_1(l_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - l_2\dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) \\
& - \dot{\theta}_4 r_4 \sin(\theta_4))^2)/2 + (M_2(l_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_3 r_3 \cos(\theta_3))^2)/2 \\
& +(M_t(l_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2))^2)/2 \\
& +(M_2(l_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_3 r_3 \sin(\theta_3))^2)/2 \\
& +(M_t(l_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2))^2)/2 \\
& +(M_2(l_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + \dot{\theta}_2 r_2 \cos(\theta_2))^2)/2 \\
& - M_1 g(l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) - l_2 \sin(\theta_3) - r_4 \sin(\theta_4)) \\
& - M_2 g(l_1 \sin(\theta_1) + r_2 \sin(\theta_2)) - M_t g(r_t + l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2)) \\
& - M_2 g(l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) - r_3 \sin(\theta_3)) - M_1 g r_1 \sin(\theta_1)
\end{aligned} \tag{29}$$

Dado a extensão das expressões as derivadas parciais se encontram disponíveis em detalhes no apêndice A. Considerando que a equação de Lagrange é dada por $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i}$, pode-se obter a equação de Lagrange para cada uma das variáveis.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = & I_1 \ddot{\theta}_1 + l_1^2 M_1 \ddot{\theta}_1 + 2l_1^2 M_2 \ddot{\theta}_1 + l_1^2 M_t \ddot{\theta}_1 + M_1 r_1^2 \ddot{\theta}_1 + l_1 M_1 g \cos(\theta_1) + \\
& + 2l_1 M_2 g \cos(\theta_1) + l_1 M_t g \cos(\theta_1) + M_1 g r_1 \cos(\theta_1) + l_1 l_2 M_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \\
& + l_1 l_2 M_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - l_1 l_2 M_1 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 + l_1 l_2 M_t \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \\
& + l_1 M_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - l_1 M_2 r_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 - l_1 M_1 r_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) \dot{\theta}_4^2 + \\
& + l_1 l_2 M_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + l_1 l_2 M_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - l_1 l_2 M_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) \ddot{\theta}_3 + \\
& + l_1 l_2 M_t \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + l_1 M_2 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - l_1 M_2 r_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \ddot{\theta}_3 - \\
& - l_1 M_1 r_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) \ddot{\theta}_4
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = & I_2 \ddot{\theta}_2 + l_2^2 M_1 \ddot{\theta}_2 + l_2^2 M_2 \ddot{\theta}_2 + l_2^2 M_t \ddot{\theta}_2 + M_2 r_2^2 \ddot{\theta}_2 - \\
& - l_2^2 M_1 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 + l_2 M_1 g \cos(\theta_2) + l_2 M_2 g \cos(\theta_2) + l_2 M_t g \cos(\theta_2) + \\
& + M_2 g r_2 \cos(\theta_2) - l_2^2 M_1 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_3 - l_1 l_2 M_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - \\
& - l_1 l_2 M_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - l_1 l_2 M_t \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - l_1 M_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - \\
& - l_2 M_2 r_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 - l_2 M_1 r_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_4^2 + l_1 l_2 M_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \\
& + l_1 l_2 M_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + l_1 l_2 M_t \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + l_1 M_2 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - \\
& - l_2 M_2 r_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_3 - l_2 M_1 r_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) \ddot{\theta}_4
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = & I_2 \ddot{\theta}_3 + l_2^2 M_1 \ddot{\theta}_3 + M_2 r_3^2 \ddot{\theta}_3 + l_2^2 M_1 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2 - \\
& - l_2 M_1 g \cos(\theta_3) - M_2 g r_3 \cos(\theta_3) - l_2^2 M_1 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_2 + l_1 l_2 M_1 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + \\
& + l_1 M_2 r_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + l_2 M_2 r_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2 + l_2 M_1 r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_4^2 - \\
& - l_1 l_2 M_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) \ddot{\theta}_1 - l_1 M_2 r_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \ddot{\theta}_1 - l_2 M_2 r_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_2 + \\
& + l_2 M_1 r_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) \ddot{\theta}_4
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_4} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_4} = & I_1 \ddot{\theta}_4 + M_1 r_4^2 \ddot{\theta}_4 - M_1 g r_4 \cos(\theta_4) + l_1 M_1 r_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) \dot{\theta}_1^2 + \\
& + l_2 M_1 r_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_2^2 - l_2 M_1 r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_3^2 - l_1 M_1 r_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) \ddot{\theta}_1 - \\
& - l_2 M_1 r_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) \ddot{\theta}_2 + l_2 M_1 r_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) \ddot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{33}$$

6.4 Linearização

Para realizar a linearização do sistema, foi utilizado o polinômio de Taylor de primeiro grau em torno dos pontos de equilíbrio com velocidade e aceleração nulas.

$$\begin{aligned}
f(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = & f(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3, \bar{\theta}_4) + \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right|_{\bar{\theta}_1} (\theta_1 - \bar{\theta}_1) + \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right|_{\bar{\theta}_2} (\theta_2 - \bar{\theta}_2) + \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_3} \right|_{\bar{\theta}_3} (\theta_3 - \bar{\theta}_3) + \\
& + \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_4} \right|_{\bar{\theta}_4} (\theta_4 - \bar{\theta}_4)
\end{aligned} \tag{34}$$

Utilizou-se a biblioteca simbólica do MATLAB, como pode ser visto no programa do Anexo B - Linearização . Pontos para linearização:

- $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_3 = \bar{\theta}_4 = \pi/2$ rad
- $\dot{\bar{\theta}}_1 = \dot{\bar{\theta}}_2 = \dot{\bar{\theta}}_3 = \dot{\bar{\theta}}_4 = 0$
- $\ddot{\bar{\theta}}_1 = \ddot{\bar{\theta}}_2 = \ddot{\bar{\theta}}_3 = \ddot{\bar{\theta}}_4 = 0$

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & \ddot{\theta}_1 (I_1 + l_1^2 M_1 + 2l_1^2 M_2 + l_1^2 M_t + M_1 r_1^2) - l_1 \ddot{\theta}_3 (M_2 r_3 + l_2 M_1) + \\
& + l_1 \ddot{\theta}_2 (M_2 r_2 + M_t l_2 + l_2 M_1 + l_2 M_2) - \\
& - g \left(\theta_1 - \frac{\pi}{2} \right) (M_1 r_1 + l_1 M_1 + 2l_1 M_2 + l_1 M_t) - l_1 M_1 \ddot{\theta}_4 r_4
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & \ddot{\theta}_2(I_2 + l_2^2 M_1 + l_2^2 M_2 + M_2 r_2^2 + M_t l_2^2) - l_2 \ddot{\theta}_3(M_2 r_3 + l_2 M_1) + \\
& + l_1 \ddot{\theta}_1(M_2 r_2 + M_t l_2 + l_2 M_1 + l_2 M_2) - \\
& - g \left(\theta_2 - \frac{\pi}{2} \right) (M_2 r_2 + l_2 M_1 + l_2 M_2 + l_2 M_t) - l_2 M_1 \ddot{\theta}_4 r_4
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & \ddot{\theta}_3(M_1 l_2^2 + M_2 r_3^2 + I_2) - l_1 \ddot{\theta}_1(M_2 r_3 + l_2 M_1) - l_2 \ddot{\theta}_2(M_2 r_3 + l_2 M_1) + \\
& + g \left(\theta_3 - \frac{\pi}{2} \right) (M_2 r_3 + l_2 M_1) + l_2 M_1 \ddot{\theta}_4 r_4
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\tau_4 = \ddot{\theta}_4(M_1 r_4^2 + I_1) - l_1 M_1 \ddot{\theta}_1 r_4 - l_2 M_1 \ddot{\theta}_2 r_4 + l_2 M_1 \ddot{\theta}_3 r_4 + M_1 g r_4 \left(\theta_4 - \frac{\pi}{2} \right) \tag{38}$$

Dessa forma, pode-se representar a matriz de inércia como:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix} \tag{39}$$

Onde:

$$J_{11} = I_1 + l_1^2 M_1 + 2l_1^2 M_2 + l_1^2 M_t + M_1 r_1^2$$

$$J_{12} = l_1(M_2 r_2 + M_t l_2 + l_2 M_1 + l_2 M_2)$$

$$J_{13} = -l_1(M_2 r_3 + l_2 M_1)$$

$$J_{14} = -l_1 M_1 r_4$$

$$J_{21} = l_1(M_2 r_2 + M_t l_2 + l_2 M_1 + l_2 M_2)$$

$$J_{22} = I_2 + l_2^2 M_1 + l_2^2 M_2 + M_2 r_2^2 + M_t l_2^2$$

$$J_{23} = -l_2(M_2 r_3 + l_2 M_1)$$

$$J_{24} = -l_2 M_1 r_4$$

$$J_{31} = -l_1(M_2 r_3 + l_2 M_1)$$

$$J_{32} = -l_2(M_2 r_3 + l_2 M_1)$$

$$J_{33} = M_1 l_2^2 + M_2 r_3^2 + I_2$$

$$J_{34} = l_2 M_1 r_4$$

$$J_{41} = -l_1 M_1 r_4$$

$$J_{42} = -l_2 M_1 r_4$$

$$J_{43} = l_2 M_1 r_4$$

$$J_{44} = M_1 r_4^2 + I_1$$

De forma análoga, pode-se representar a matriz de rigidez K como:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Onde:

$$K_{11} = -g(M_1 r_1 + l_1 M_1 + 2l_1 M_2 + l_1 M_t)$$

$$K_{12} = 0$$

$$K_{13} = 0$$

$$K_{14} = 0$$

$$K_{21} = 0$$

$$K_{22} = -g(M_2 r_2 + l_2 M_1 + l_2 M_2 + l_2 M_t)$$

$$K_{23} = 0$$

$$K_{24} = 0$$

$$K_{31} = 0$$

$$K_{32} = 0$$

$$K_{33} = g(M_2 r_3 + l_2 M_1)$$

$$K_{34} = 0$$

$$K_{41} = 0$$

$$K_{42} = 0$$

$$K_{43} = 0$$

$$K_{44} = M_1 g r_4$$

Obtém-se finalmente, uma matriz constante que representa as forças gravitacionais provenientes da linearização:

$$O = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} g\pi(M_1 r_1 + l_1 M_1 + 2l_1 M_2 + l_1 M_t) \\ g\pi(M_2 r_2 + l_2 M_1 + l_2 M_2 + l_2 M_t) \\ -g\pi(M_2 r_3 + l_2 M_1) \\ -g\pi M_1 r_4 \end{bmatrix} \quad (41)$$

6.5 Espaço de Estados

As matrizes do espaço de estados serão apresentadas já em forma numérica por conta da indisponibilidade de espaço. A forma simbólica pode ser encontrada rodando o programa disponível no apêndice B -Linearização. Com os parâmetros iniciais, pode-se calcular os valores das matrizes J, K e O apresentadas na seção 6.4.

$$J = \begin{bmatrix} 9,6791 & 8,9802 & -0,9508 & -0,2112 \\ 8,9802 & 8,7655 & -0,9469 & -0,2104 \\ -0,9508 & -0,9469 & 0,7687 & 0,2104 \\ -0,2112 & -0,2104 & 0,2104 & 0,1299 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$K = \begin{bmatrix} -224,9855 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -207,0027 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21,9171 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,8687 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$O = \begin{bmatrix} 353,4064 \\ 325,1591 \\ -34,4274 \\ -7,6478 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Por conseguinte, define-se o vetor de estados como:

$$\Theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{\theta}_4]^T \quad (45)$$

e sua derivada:

$$\dot{\Theta} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{\theta}_4 \ \ddot{\theta}_1 \ \ddot{\theta}_2 \ \ddot{\theta}_3 \ \ddot{\theta}_4]^T \quad (46)$$

Define-se, também, o vetor de entradas. As constantes do vetor fazem parte da matriz de entradas do espaço de estados, por conta disso, o vetor de entradas possui um grau unitário, como pode ser visto a seguir:

$$u = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4 \ 1]^T \quad (47)$$

Sabendo o vetor de estados e de entradas, pode-se calcular as matrizes do espaço de estados. Para a matriz de estados de tamanho 8 x 8, onde I é a matriz identidade:

$$A = \begin{bmatrix} \text{zeros}(4,4) & I(4,4) \\ -J^{-1} * K & \text{zeros}(4,4) \end{bmatrix} \quad (48)$$

Resultando numericamente em:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 470,4533 & -444,8570 & 1,5356 & -0,1624 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -483,5027 & 484,5557 & -5,6812 & 0,06007 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15,7633 & 53,6576 & -57,0607 & 19,0351 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7,5036 & -25,5418 & 85,6888 & -67,5882 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Para a matriz de entradas de tamanho 8 x 5:

$$B = \begin{bmatrix} \text{zeros}(4,4) & \text{zeros}(4,1) \\ J^{-1} & -J^{-1} * O \end{bmatrix} \quad (50)$$

Resultando numericamente em:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,0910 & -2,1490 & -0,07 & 0,0333 & -42,3636 \\ -2,1490 & 2,3408 & 0,2592 & -0,1233 & 6,3261 \\ -0,07 & 0,2592 & 2,6034 & -3,9096 & 0,2062 \\ 0,0333 & -0,1233 & -3,9096 & 13,8821 & -0,0981 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Como estamos interessados nos ângulos de saída do espaço de estados, a matriz de saída fica igual a:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

E a matriz de transmissão direta é igual a uma matriz nula. Finalmente, chega-se ao seguinte espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{\Theta} = A\Theta + Bu \\ Y = C\Theta \end{cases} \quad (53)$$

Para a solução do espaço de estados, utilizou-se os comandos "sys" e "lsim" do *MATLAB*[®] como pode ser visto no Apêndice B - Solução numérica para marcha normal.

7 Análise

7.1 Critério de estabilidade

Calculou-se os pólos do sistema dinâmico para a análise da estabilidade do sistema estudado. Esse processo foi realizado com o cálculo dos autovalores da matriz A:

$$\det A - \lambda I = 0 \quad (54)$$

Os resultados obtidos foram:

Parte real	Parte imaginária
-30.6769	0
30.6769	0
3.5204	0
-3.5204	0
0	10.1211i
0	-10.1211i
0	4.5465i
0	-4.5465i

Tabela 2 – Pólos do sistema

Observa-se que dois dos polos do sistema são reais positivos. Assim, imediatamente conclui-se que o sistema é instável, algo que já era esperado por conta da aproximação de um pêndulo invertido para a perna de apoio da marcha humana.

7.2 Dinâmica Inversa

Como o sistema é instável é necessário definir corretamente as entradas do sistemas, para replicar um movimento que se assemelhe a marcha humana e mantenha o sistema estável, dessa maneira, é realizada a dinâmica inversa. Utilizou-se pontos cinemáticos registrados experimentalmente na tabela A da bibliografia (Winter, 2009). Realizando esse procedimento, calcula-se as curvas de torque por meio das equações de Lagrange não-lineares, que futuramente serão utilizadas no sistema linear para a réplica do movimento.

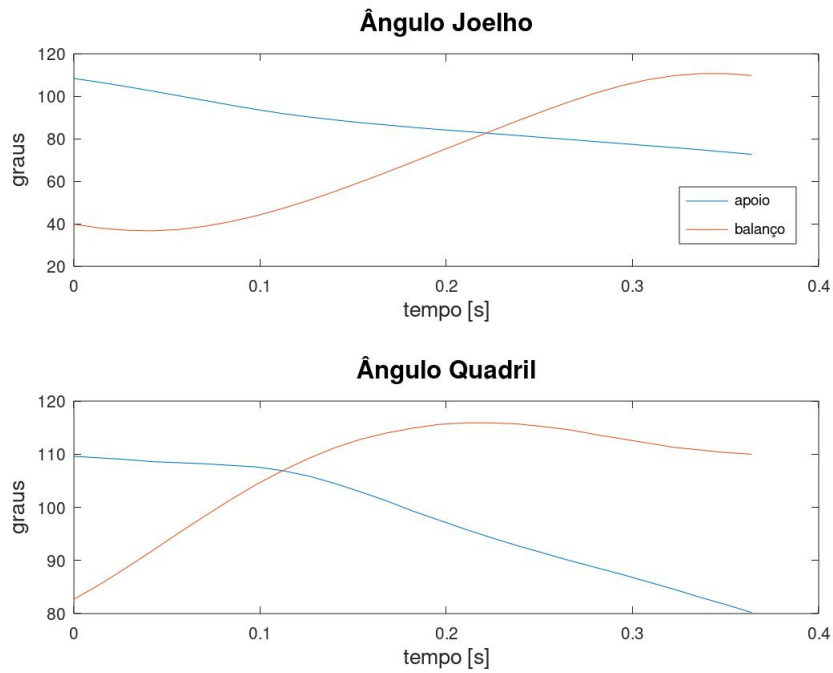


Figura 12 – Curva de movimento tabelada

Com intuito de validar o modelo calculado pelo método de Lagrange, os resultados de torque ao longo do tempo foram comparados com torques calculados experimentalmente (Winter, 2009).

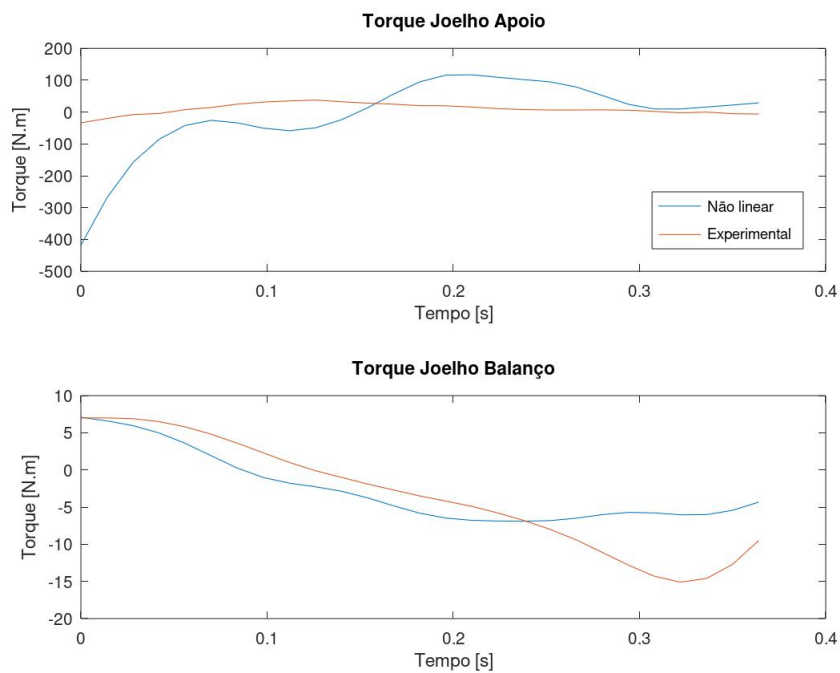


Figura 13 – Torque no joelho ao longo do tempo

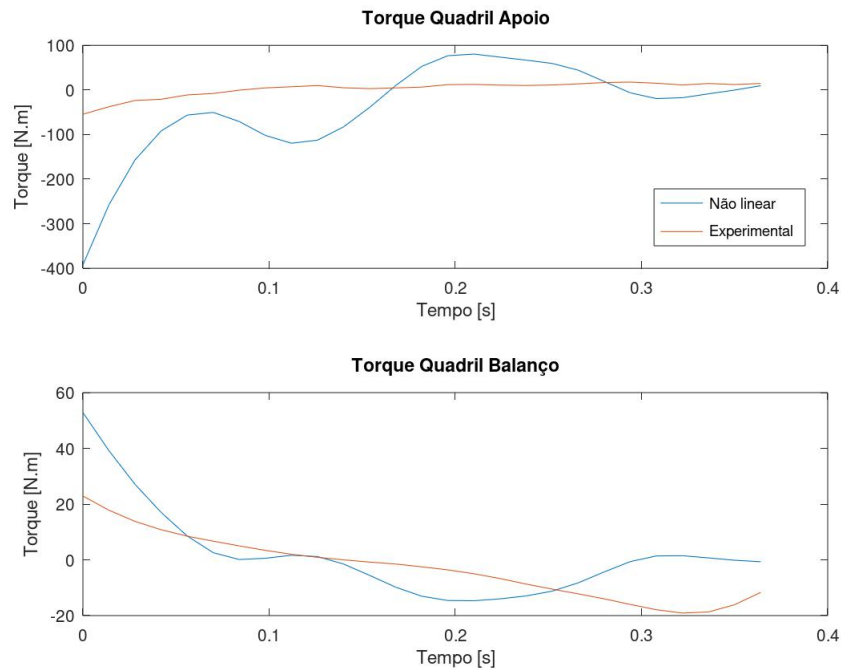


Figura 14 – Torque no quadril ao longo do tempo

Observa-se pelas Figuras 13 e 14, que os torques experimentais e calculados pela dinâmica inversa possuem algumas diferenças, isso pode ser explicado por conta das simplificações adotadas no modelo. Entretanto, pode-se observar que o comportamento de cada torque é semelhante ao experimental. Mesmo que haja algumas diferenças entre os valores dos torques, as grandezas numéricas são próximas e, ademais, os pontos em que os torques invertem de sinal estão parecidos. Dessa forma, pode-se considerar que o modelo está replicando, em parte, a realidade e, assim, validado.

7.3 Dinâmica Direta

A dinâmica direta é o contrário da inversa. Nesse cálculo, as entradas são os torques e as saídas são os valores cinemáticos. Com a curva de torques obtida no modelo não-linear é possível observar o comportamento do modelo linear quando submetido a essa entrada. Os resultados obtidos foram os seguintes:

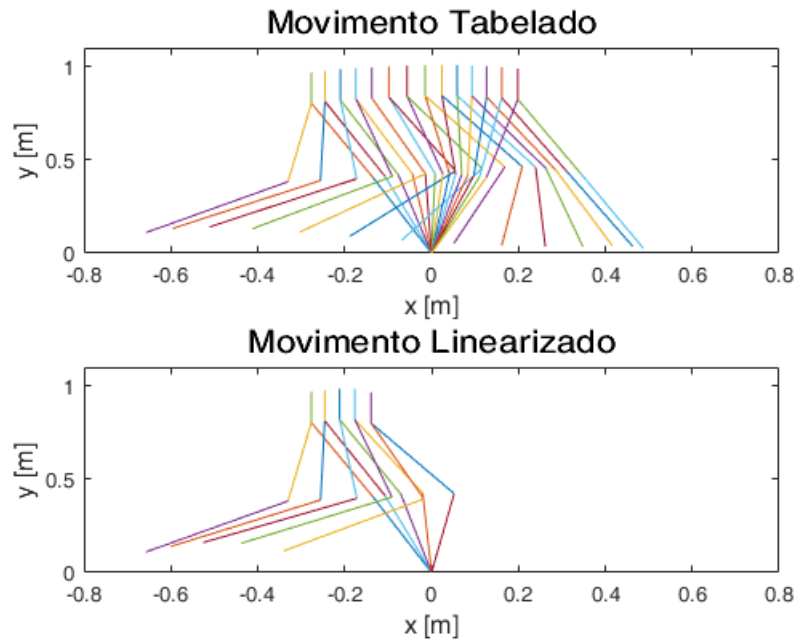


Figura 15 – Movimento experimental e linearizado

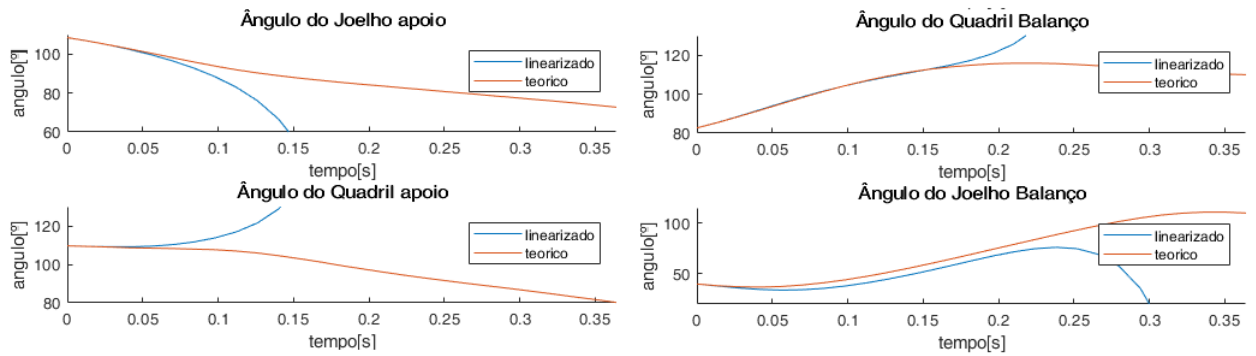


Figura 16 – Gráficos de ângulos

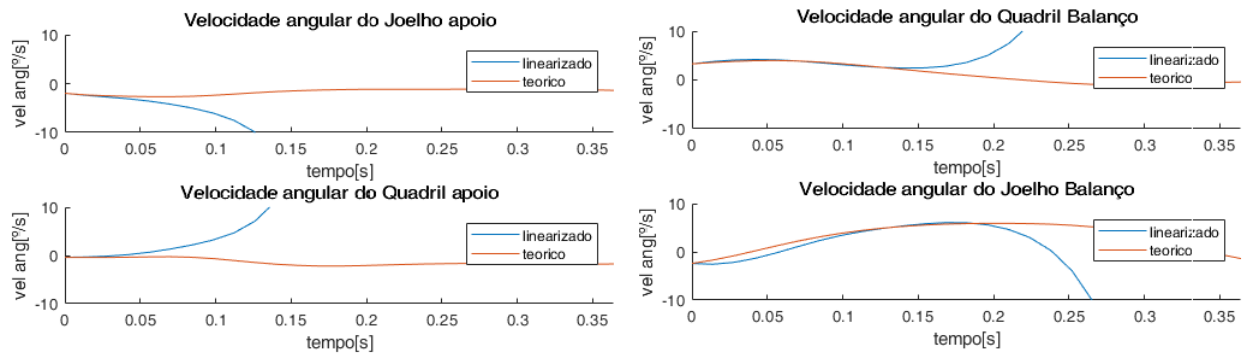


Figura 17 – Gráficos das velocidades angulares

Observa-se, pelos gráficos de resultados (Figura 17), que obteve-se um bom resultado do sistema linear para apenas os primeiros 0.06s aproximadamente. É importante notar

que a instabilidade do sistema se inicia pelas juntas da perna de apoio, isso era o esperado, pois a perna de apoio é aproximada para um pêndulo invertido triplo. A Figura 15 ilustra o movimento resultante do sistema linear até o ponto de desestabilização. Dessa forma, algumas hipóteses foram feitas para esse comportamento.

- Houve algum erro na linearização;
- Os ângulos utilizados para o cálculo dos torques de entrada estão fora do limite de ângulos pequenos;
- Pequenos erros se acumulam ao longo da integração e por isso o sistema se instabiliza.

Outro ponto a ser notado é que os ângulos experimentais iniciais estão fora da margem de pequenas angulações, como pode ser visto na Figura 12. Entretanto, da mesma maneira o sistema utilizado replicou o início do movimento. Assim, pode-se considerá-lo robusto.

7.3.1 Validação da linearização

Para verificar a primeira hipótese, calculou-se os torques lineares e comparou-os com os não lineares, ambos com os valores cinemáticos tabelados de Winter (2009). Observa-se pela Figura 18 que os torques linearizados estão semelhantes com os não linearizados, dessa forma, valida-se o modelo e a primeira hipótese é refutada.

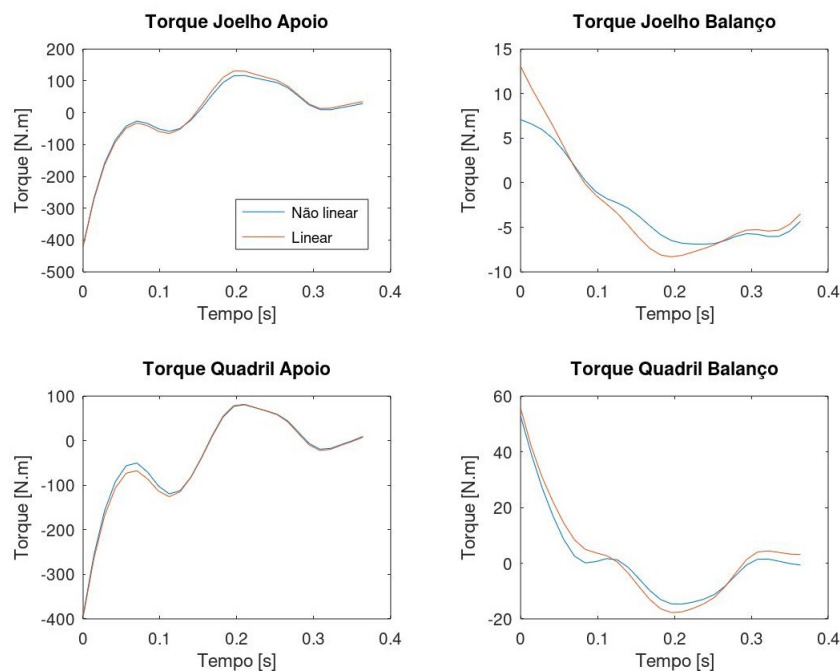


Figura 18 – Torques linearizados e não linearizados com entradas tabeladas de Winter (2009)

7.3.2 Teste da linearização para baixas angulações

Para a análise dessa hipótese, criou-se entradas com baixos ângulos para o sistema linear. Isso foi possível graças a replicação da curva de movimento experimental para um ciclo completo, traçada por Dollar e Herr (2008), vista na figura 20.

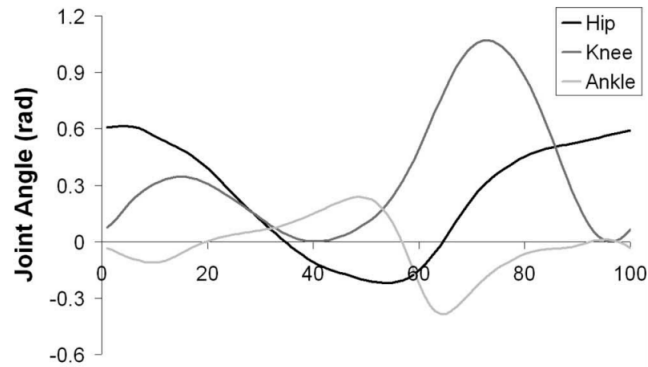


Figura 19 – Ângulos dos membros inferiores de acordo a porcentagem do ciclo (Dollar e Herr, 2008)

As curvas foram aproximadas por funções senoidais, e ajustadas ao referencial adotado. A partir disso é possível dividir ambas as curvas por um número conveniente, mantendo assim o formato do movimento, mas limitando a oscilação em torno do ponto de equilíbrio que se encontra em 90° e sua variação abaixo de 10° . Por fim, encontrando os torques necessários para realização deste movimento no sistema não-linear e aplicando-os ao linear.

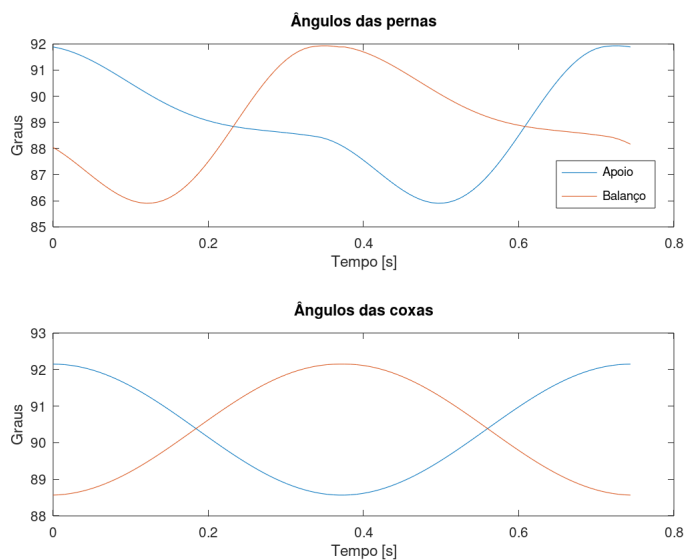


Figura 20 – Aproximação por funções senoidais dos ângulos dos membros inferiores de acordo a porcentagem do ciclo, com ajustes ao referencial adotado

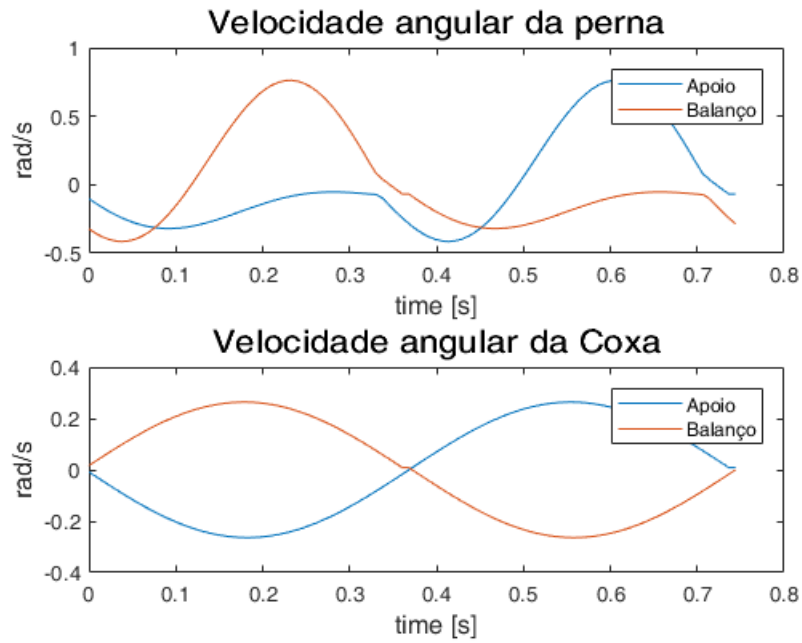


Figura 21 – Velocidades provenientes da curva senoidal aproximada

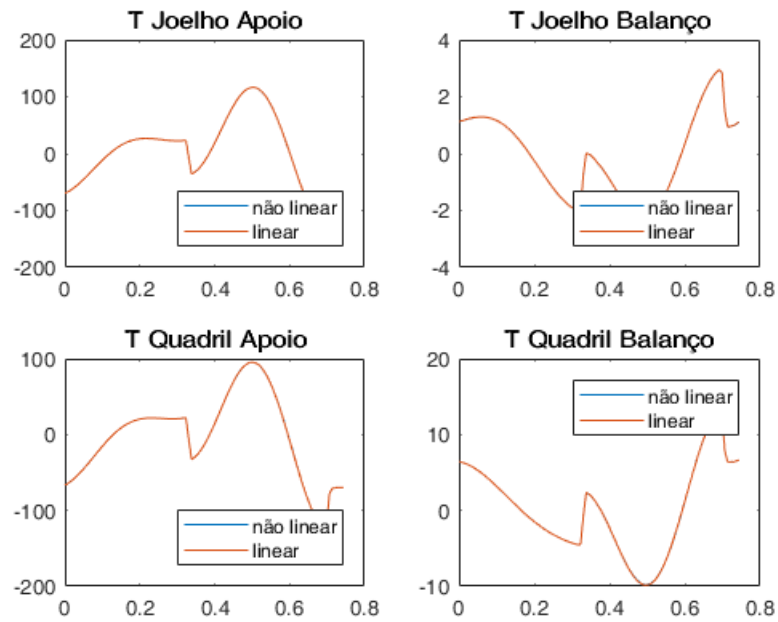


Figura 22 – Torques de entrada no espaço de estados

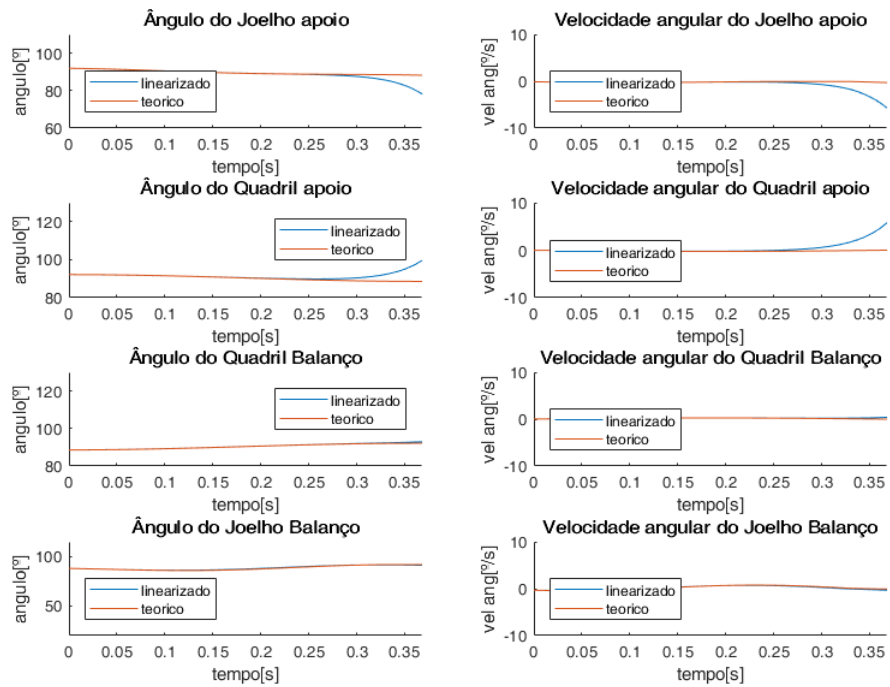


Figura 23 – Ângulos e velocidades angulares para baixas angulações resultantes do espaço de estados

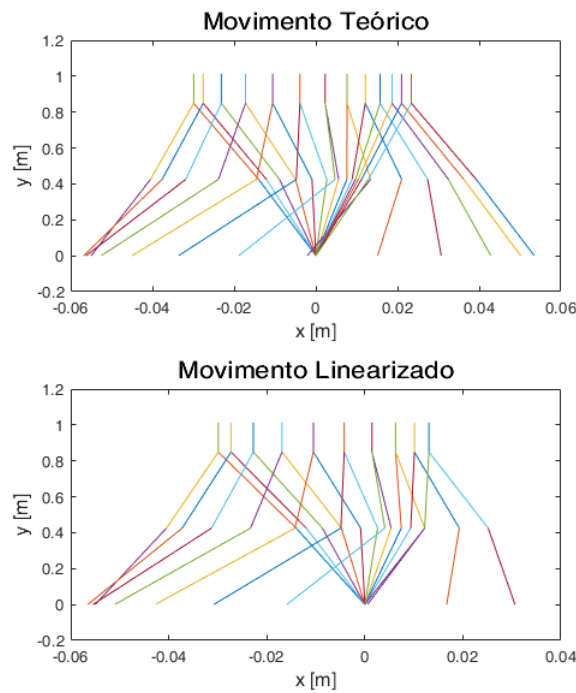


Figura 24 – Movimento teórico e linearizado para pequenas angulações

Ressalta-se que o movimento nessa simulação não está realístico, a figura 24 mostra que o comprimento de um passo é de aproximadamente 0,08m, valor que não condiz com

um passo real. Entretanto, observa-se uma grande melhoria em relação ao sistema com grandes angulações. Segundo a Figura 23, o sistema se desestabiliza em aproximadamente 2s. Ademais, atenta-se que o movimento quase alcança uma passada inteira dessa vez.

Dessa maneira, após essa simulação, conclui-se que os altos ângulos estavam interferindo nos resultados do primeiro sistema, dessa forma, valida-se a hipótese 2.

7.3.3 Acúmulo de erros

Por mais que haja uma melhoria na replicação do movimento com baixos ângulos, a seção anterior expõe a instabilidade para o sistema com pequenas angulações também. Observa-se tal comportamento pela Figura 20, o sistema se instabiliza perto de 0.3s nessa simulação. Vale notar que o sistema possui ângulos muito abaixo do limite de pequenos ângulos imposto pela linearização. Dessa forma, pode-se afirmar que a hipótese 3 é válida. Pequenos erros vão se somando ao longo da trajetória da marcha linearizada, essa integração dos erros resulta na instabilidade do sistema em algum momento. Para consertar tal problema será necessário a implementação de uma malha fechada no sistema, que será tratada futuramente na disciplina de Controle.

7.4 Função de Transferência

Foi possível determinar as funções de transferência a partir do espaço de estados, sendo os quatro torques mais uma degrau (constantes gravitacionais) as entradas e os quatro ângulos as saídas. Esta função permite encontrar os pólos do sistema, outorgando uma análise da frequência e estabilidade do sistema. Obtém-se uma matriz com 20 funções de transferência, o código para encontrá-las se encontra no apêndice B - Solução numérica para marcha normal.

7.5 Diagrama de Bode

Foram analisados apenas os Diagramas de Bode para a diagonal principal do espaço de estados no presente trabalho. Os demais diagramas possuem um comportamento semelhante e podem ser encontrados no rodando o código do apêndice B - Solução numérica para marcha normal.

Pode-se notar pelos gráficos abaixo a frequência natural nos Diagramas de Bode, proveniente dos polos marginalmente estáveis. Importante ressaltar também que todas as magnitudes possuem uma diminuição nas amplitudes de entrada. Isso ocorre, pois as entradas do sistema são torques em N.m que possuem grandeza na casa das dezenas e centenas. Já as saídas são os ângulos em radianos que possuem grandeza na casa de unidades. Dessa forma, o diagrama de bode ilustra essa diminuição com os valores negativos em grandeza decibel.

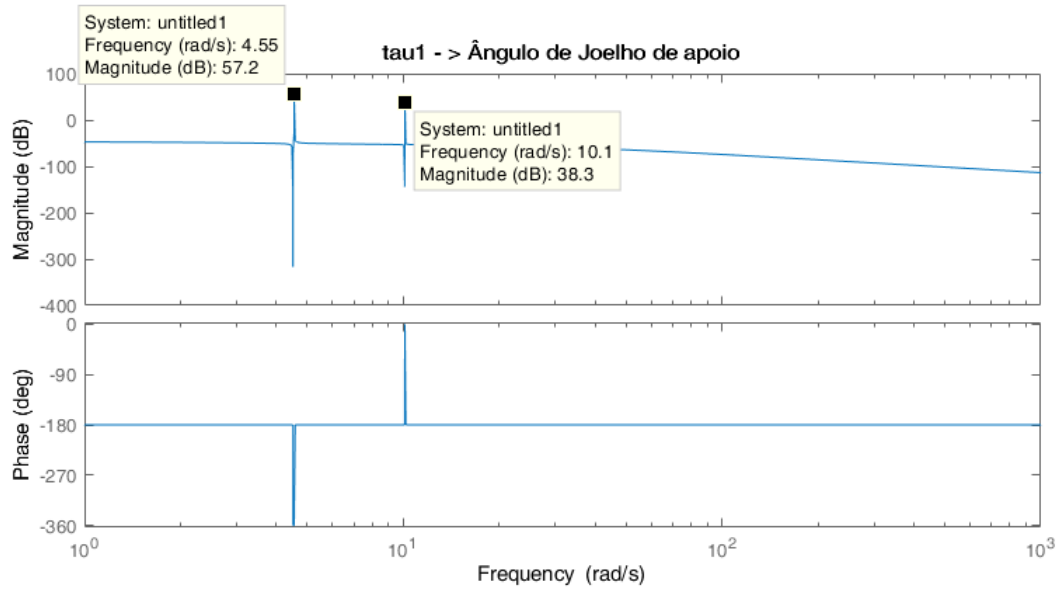


Figura 25 – Diagrama de Bode para a torque no joelho apoio para o ângulo do joelho de apoio

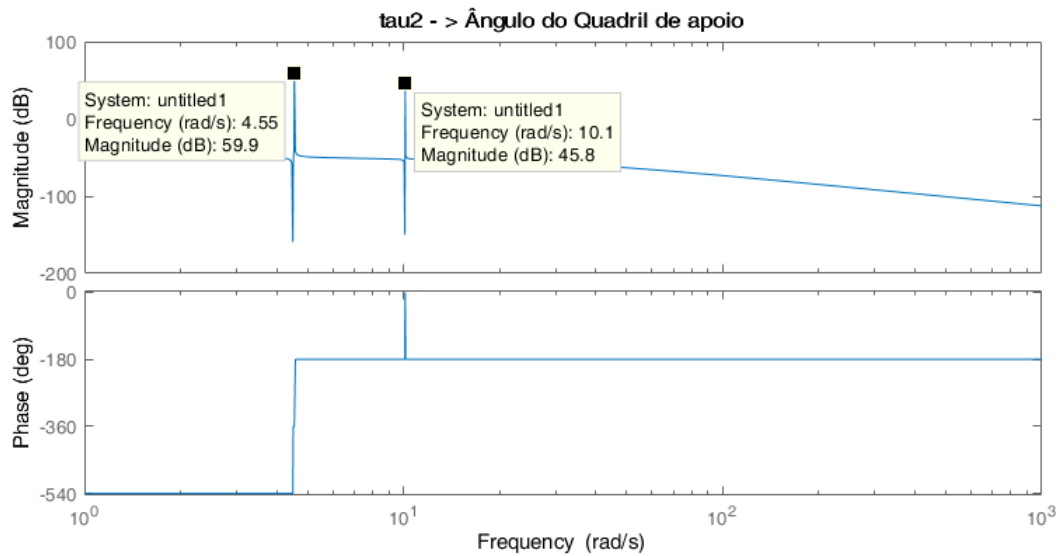


Figura 26 – Diagrama de Bode para a torque no quadril de apoio para o ângulo do quadril de apoio

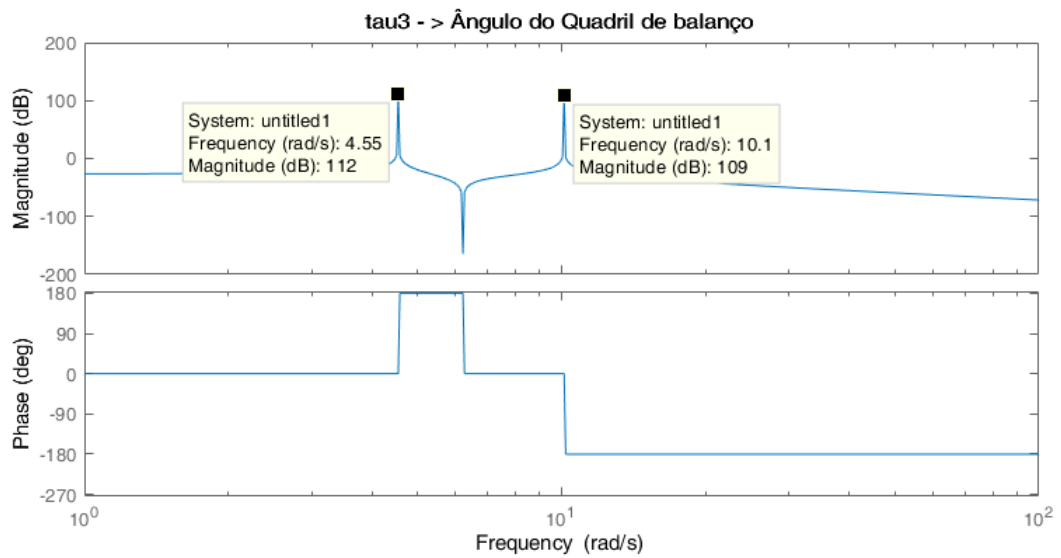


Figura 27 – Diagrama de Bode para a torque no quadril de balanço para o ângulo do quadril de balanço

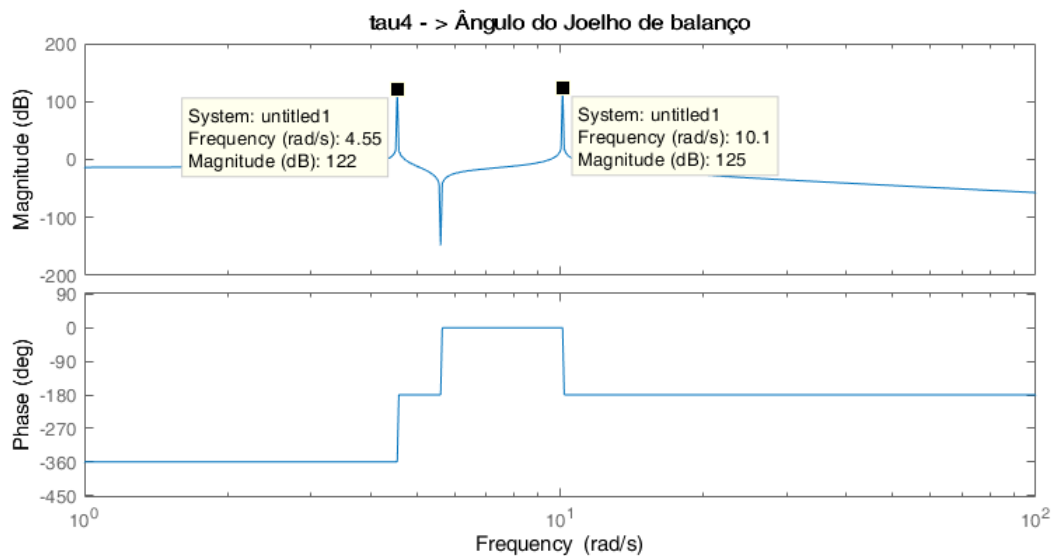


Figura 28 – Diagrama de Bode para a torque no joelho de balanço para o ângulo do joelho de balanço

8 Conclusão

No trabalho desenvolvido, foi analisado um comportamento esperado do modelo proposto se comparado com os dados experimentais. Mostrando resultados satisfatórios e resultados esperados para um sistema instável, com a replicação do movimento conjecturado nos primeiros instantes e a destabilização do sistema em seguida; para trabalhos futuros será necessária a teoria do controle para garantir a reprodução do movimento completo da

marcha. O modelo utilizado provou-se robusto por atender as altas angulações iniciais, conseguindo, assim, cumprir com o objetivo proposto.

Referências bibliográficas

BATISTA, Rayanne Floriano. **Proposta de arquitetura de controle para exoesqueleto robótico de reabilitação da marcha antropomórfica**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Campinas, 2013.

BEHNKE, Robert. **Anatomia do Movimento**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

DOLLAR, Aaron M., HERR, Hugh. **Lower Extremity Exoskeletons and Active Orthoses: Challenges and State-of-the-Art**, IEEE Transactions on Robotics, Vol.24, Fevereiro de 2008.

FERREIRA, Anna R. F. **Prescrição da Marcha Humana por Meio da Dinâmica Inversa**, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2017.

HALL, Susan J. **Biomecânica básica**. 7. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2016.

JÚNIOR, Glicerinho Danter Lopes Soares. **Desenvolvimento de um exoesqueleto para movimentação/reabilitação de paraplégicos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Uberlândia, 2015.

KUO, Arthur D. **The six determinants of gait and the inverted pendulum analogy: A dynamic walking perspective**, Science Direct, Vol.26, 6 de Julho de 2007.

LIMA, Jéssica Paola Souza. **Avaliação biomecânica da marcha com exoesqueleto robótico em sujeitos com AVC crônico**. Dissertação de Mestrado em Biotecnologia do Centro de Ciências da Saúde da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES). Vitória, 2018.

NEUMANN, D. A. **Cinesiologia do Aparelho Musculoesquelético: Fundamentos para Reabilitação**, 2a edição. Rio de Janeiro, 2011.

SANTOS, Diego Pedroso dos. **Projeto mecânico de exoesqueleto robótico para membros inferiores**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Controle e Automação Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2011.

WHITTLE, Michael W. **Gait Analysis an Introduction**, Philadelphia: Elsevier, 4a edição, 2007.

WINTER, David A. **Biomechanics and Motor Control of Human Movement**, 4th ed., Universidade de Waterloo, Ontario, Canadá, 2009.

Apêndices

APÊNDICE A – Derivadas parciais do sistema

Derivadas parciais do sistema

Derivando L em função de θ_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = & l_1 l_2 M_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) - 2l_1 M_2 g \cos(\theta_1) - l_1 M_t g \cos(\theta_1) - M_1 g r_1 \cos(\theta_1) - \\ & - l_1 l_2 M_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_2 M_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 M_1 g \cos(\theta_1) - \\ & - l_1 l_2 M_t \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 M_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_1 M_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 r_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + \\ & + l_1 M_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 r_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Derivando L em função de $\dot{\theta}_1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = & \dot{\theta}_1 (M_1 r_1^2 + I_1) + l_1 M_1 \cos(\theta_1) (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - l_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3) - \\ & - \dot{\theta}_4 r_4 \cos(\theta_4)) + l_1 M_2 \cos(\theta_1) (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_3 r_3 \cos(\theta_3)) + \\ & + l_1 M_1 \sin(\theta_1) (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - l_2 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) - \dot{\theta}_4 r_4 \sin(\theta_4)) + \\ & + l_1 M_t \cos(\theta_1) (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)) + l_1 M_2 \sin(\theta_1) (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + \\ & + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_3 r_3 \sin(\theta_3)) + l_1 M_2 \cos(\theta_1) (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + \dot{\theta}_2 r_2 \cos(\theta_2)) + \\ & + l_1 M_t \sin(\theta_1) (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)) + l_1 M_2 \sin(\theta_1) (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + \\ & + \dot{\theta}_2 r_2 \sin(\theta_2)) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Derivando L em função de θ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = & l_2^2 M_1 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) - l_2 M_2 g \cos(\theta_2) - l_2 M_t g \cos(\theta_2) - M_2 g r_2 \cos(\theta_2) - \\ & - l_2 M_1 g \cos(\theta_2) + l_1 l_2 M_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 M_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ & + l_1 l_2 M_t \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_1 M_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 M_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 r_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) + \\ & + l_2 M_1 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 r_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Derivando L em função de $\dot{\theta}_2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = & I_2 \dot{\theta}_2 + l_2 M_1 \cos(\theta_2) (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - l_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3) - \\
& - \dot{\theta}_4 r_4 \cos(\theta_4)) + l_2 M_2 \cos(\theta_2) (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_3 r_3 \cos(\theta_3)) + \\
& + l_2 M_1 \sin(\theta_2) (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - l_2 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) - \dot{\theta}_4 r_4 \sin(\theta_4)) + \\
& + l_2 M_t \cos(\theta_2) (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)) + l_2 M_2 \sin(\theta_2) (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + \\
& + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_3 r_3 \sin(\theta_3)) + l_2 M_t \sin(\theta_2) (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)) + \\
& + M_2 r_2 \cos(\theta_2) (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + \dot{\theta}_2 r_2 \cos(\theta_2)) + \\
& + M_2 r_2 \sin(\theta_2) (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + \dot{\theta}_2 r_2 \sin(\theta_2))
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Derivando L em função de θ_3 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_3} = & l_2 M_1 g \cos(\theta_3) + M_2 g r_3 \cos(\theta_3) - l_2^2 M_1 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) - \\
& - l_1 l_2 M_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) - l_1 M_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 r_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) - l_2 M_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 r_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) - \\
& - l_2 M_1 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Derivando L em função de $\dot{\theta}_3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} = & I_2 \dot{\theta}_3 - l_2 M_1 \cos(\theta_3) (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - l_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3) - \dot{\theta}_4 r_4 \cos(\theta_4)) \\
& - l_2 M_1 \sin(\theta_3) (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - l_2 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) - \dot{\theta}_4 r_4 \sin(\theta_4)) \\
& - M_2 r_3 \cos(\theta_3) (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_3 r_3 \cos(\theta_3)) \\
& - M_2 r_3 \sin(\theta_3) (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_3 r_3 \sin(\theta_3))
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Derivando L em função de θ_4 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_4} = & M_1 r_4 (g \cos \theta_4 - l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) - l_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) + \\
& + l_2 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_3 - \theta_4))
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Derivando L em função de $\dot{\theta}_4$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_4} = & I_1 \dot{\theta}_4 - M_1 r_4 \cos(\theta_4) (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - l_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3) - \\
& - \dot{\theta}_4 r_4 \cos(\theta_4)) - M_1 r_4 \sin(\theta_4) (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - l_2 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) - \\
& - \dot{\theta}_4 r_4 \sin(\theta_4))
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Fazendo a derivada pelo tempo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= I_1 \ddot{\theta}_1 + l_1^2 M_1 \ddot{\theta}_1 + 2l_1^2 M_2 \ddot{\theta}_1 + l_1^2 M_t \ddot{\theta}_1 + M_1 r_1^2 \ddot{\theta}_1 + l_1 M_1 g \cos(\theta_1) + \\
&+ 2l_1 M_2 g \cos(\theta_1) + l_1 M_t g \cos(\theta_1) + M_1 g r_1 \cos(\theta_1) + l_1 l_2 M_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \\
&+ l_1 l_2 M_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - l_1 l_2 M_1 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 + l_1 l_2 M_t \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \\
&+ l_1 M_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - l_1 M_2 r_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 - l_1 M_1 r_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) \dot{\theta}_4^2 + \\
&+ l_1 l_2 M_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + l_1 l_2 M_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - l_1 l_2 M_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) \ddot{\theta}_3 + \\
&+ l_1 l_2 M_t \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + l_1 M_2 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - l_1 M_2 r_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \ddot{\theta}_3 - \\
&- l_1 M_1 r_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) \ddot{\theta}_4
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= I_2 \ddot{\theta}_2 + l_2^2 M_1 \ddot{\theta}_2 + l_2^2 M_2 \ddot{\theta}_2 + l_2^2 M_t \ddot{\theta}_2 + M_2 r_2^2 \ddot{\theta}_2 - l_2^2 M_1 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 + \\
&+ l_2 M_1 g \cos(\theta_2) + l_2 M_2 g \cos(\theta_2) + l_2 M_t g \cos(\theta_2) + M_2 g r_2 \cos(\theta_2) - \\
&- l_2^2 M_1 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_3 - l_1 l_2 M_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - l_1 l_2 M_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - \\
&- l_1 l_2 M_t \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - l_1 M_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - l_2 M_2 r_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 - \\
&- l_2 M_1 r_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_4^2 + l_1 l_2 M_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + l_1 l_2 M_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \\
&+ l_1 l_2 M_t \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + l_1 M_2 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - l_2 M_2 r_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_3 - \\
&- l_2 M_1 r_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) \ddot{\theta}_4
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) &= I_2 \ddot{\theta}_3 + l_2^2 M_1 \ddot{\theta}_3 + M_2 r_3^2 \ddot{\theta}_3 + l_2^2 M_1 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2 - l_2 M_1 g \cos(\theta_3) - \\
&- M_2 g r_3 \cos(\theta_3) - l_2^2 M_1 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_2 + l_1 l_2 M_1 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + \\
&+ l_1 M_2 r_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + l_2 M_2 r_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2 + l_2 M_1 r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_4^2 - \\
&- l_1 l_2 M_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) \ddot{\theta}_1 - l_1 M_2 r_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \ddot{\theta}_1 - l_2 M_2 r_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_2 + \\
&+ l_2 M_1 r_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) \ddot{\theta}_4
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_4} \right) &= I_1 \ddot{\theta}_4 + M_1 r_4^2 \ddot{\theta}_4 - M_1 g r_4 \cos(\theta_4) + l_1 M_1 r_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) \dot{\theta}_1^2 + \\
&+ l_2 M_1 r_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_2^2 - l_2 M_1 r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_3^2 - l_1 M_1 r_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) \ddot{\theta}_1 - \\
&- l_2 M_1 r_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) \ddot{\theta}_2 + l_2 M_1 r_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) \ddot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{A.12}$$

APÊNDICE B – Códigos

Equacionamento da Marcha

```

1 clear all
2 clc
3 close all
4
5 syms r1 r2 r3 r4 r5 r6 r7 rt L1 L2 L3 L5 L6 I1 I2 I3 I5 I6 I7 M1 M2 M3 M4
   M5 M6 M7 Mt g
6 syms T1 T1p T1pp T2 T2p T2pp T3 T3p T3pp T4 T4p T4pp T6 T6p T6pp T7 T7p
   T7pp
7
8 I3=I2 %momento de inercia de 2 e 3 são iguais
9 I4=I1 %momento de inercia de 4 e 1 são iguais
10
11 M3=M2 %Massas de inercia de 3 e 2 são iguais
12 M4=M1 %Massas de inercia de 4 e 1 são iguais
13
14 L3=L2 %Comprimento de inercia de 3 e 2 são iguais
15 L4=L1 %Comprimento de inercia de 4 e 1 são iguais
16
17 %posições dos centros de massa
18 R1=[+r1*cos(T1);
19     +r1*sin(T1)]
20
21 R2=[+L1*cos(T1)+r2*cos(T2);
22     +L1*sin(T1)+r2*sin(T2)]
23
24 R3=[+L1*cos(T1)+L2*cos(T2)-r3*cos(T3);
25     +L1*sin(T1)+L2*sin(T2)-r3*sin(T3)]
26
27 R4=[+L1*cos(T1)+L2*cos(T2)-L3*cos(T3)-r4*cos(T4);
28     +L1*sin(T1)+L2*sin(T2)-L3*sin(T3)-r4*sin(T4)]
29
30 Rt=[+L1*cos(T1)+L2*cos(T2)+0;
31     +L1*sin(T1)+L2*sin(T2)+rt]
32
33 %velocidades dos centros de massa
34 R1p=[-r1*sin(T1);
35     +r1*cos(T1)]*[T1p]
36
37 R2p=[-L1*sin(T1),-r2*sin(T2);
38     +L1*cos(T1),+r2*cos(T2)]*[T1p;T2p]

```

```

39
40 R3p=[-L1*sin (T1),-L2*sin (T2),+r3*sin (T3);
41      +L1*cos (T1),+L2*cos (T2),-r3*cos (T3)]*[T1p;T2p;T3p]
42
43 R4p=[-L1*sin (T1),-L2*sin (T2),+L3*sin (T3),+r4*sin (T4);
44      +L1*cos (T1),+L2*cos (T2),-L3*cos (T3),-r4*cos (T4)]*[T1p;T2p;T3p;T4p]
45
46 Rtp=[-L1*sin (T1),-L2*sin (T2);
47      +L1*cos (T1),+L2*cos (T2)]*[T1p;T2p]
48
49 %calculo das energias cineticas
50 Ec1=0.5*M1*R1p.'*R1p + 0.5*I1*T1p^2;
51 Ec2=0.5*M2*R2p.'*R2p + 0.5*I2*T2p^2;
52 Ec3=0.5*M3*R3p.'*R3p + 0.5*I3*T3p^2;
53 Ec4=0.5*M4*R4p.'*R4p + 0.5*I4*T4p^2;
54 Ect=0.5*Mt*Rtp.'*Rtp
55
56 %Simplificando as expressoes
57 Ec1=simplify (Ec1)
58 Ec2=simplify (Ec2)
59 Ec3=simplify (Ec3)
60 Ec4=simplify (Ec4)
61
62
63 Ec=simplify (Ec1+Ec2+Ec3+Ec4+Ect) %energia cinetica total
64
65 %calculo da energia potencial
66 Ep1=M1*g*R1(2)
67 Ep2=M2*g*R2(2)
68 Ep3=M3*g*R3(2)
69 Ep4=M4*g*R4(2)
70 Ept=Mt*g*Rt(2)
71
72 Ep=simplify (Ep1+Ep2+Ep3+Ep4+Ept) %Energia potencial total
73
74 %equação L
75 L=simplify (Ec-Ep)
76
77 %Lagrange T1
78 L_T1p=simplify (diff (L,T1p)) %derivada parcial em velocidade de 1
79 L_T1=simplify (diff (L,T1)) %derivada parcial em angulo de 1
80
81 %Lagrange T2
82 L_T2p=simplify (diff (L,T2p)) %derivada parcial em velocidade de 2
83 L_T2=simplify (diff (L,T2)) %derivada parcial em angulo de 2
84
85 %Lagrange T3

```

```

86 L_T3p=simplify(diff(L,T3p)) %derivada parcial em velocidade de 3
87 L_T3=simplify(diff(L,T3)) %derivada parcial em angulo de 3
88
89 %Lagrange T4
90 L_T4p=simplify(diff(L,T4p)) %derivada parcial em velocidade de 4
91 L_T4=simplify(diff(L,T4)) %derivada parcial em angulo de 4

```

Equações de Lagrange para a Marcha

```

1 clear all
2 clc
3 close all
4
5 syms r1 r2 r3 r4 r5 r6 r7 rt L1 L2 L3 L5 L6 I1 I2 I3 I5 I6 I7 M1 M2 M3 M4
   M5 M6 M7 Mt g
6 syms T1(t) T1p(t) T1pp(t) T2(t) T2p(t) T2pp(t) T3(t) T3p(t) T3pp(t) T4(t)
   T4p(t) T4pp(t) T5(t) T5p(t) T5pp(t) T6(t) T6p(t) T6pp(t) T7(t) T7p(t)
   T7pp(t)
7
8
9 %coloque as derivadas parciais aqui (Mudar aqui)
10 L_T1p = T1p*(M1*r1^2 + I1) + L1*M1*cos(T1)*(L1*T1p*cos(T1) + L2*T2p*cos(T2)
   - L2*T3p*cos(T3) - T4p*r4*cos(T4)) + L1*M2*cos(T1)*(L1*T1p*cos(T1) + L2
   *T2p*cos(T2) - T3p*r3*cos(T3)) + L1*M1*sin(T1)*(L1*T1p*sin(T1) + L2*T2p*
   sin(T2) - L2*T3p*sin(T3) - T4p*r4*sin(T4)) + L1*Mt*cos(T1)*(L1*T1p*cos(
   T1) + L2*T2p*cos(T2)) + L1*M2*sin(T1)*(L1*T1p*sin(T1) + L2*T2p*sin(T2) -
   T3p*r3*sin(T3)) + L1*M2*cos(T1)*(L1*T1p*cos(T1) + T2p*r2*cos(T2)) + L1*
   Mt*sin(T1)*(L1*T1p*sin(T1) + L2*T2p*sin(T2)) + L1*M2*sin(T1)*(L1*T1p*sin
   (T1) + T2p*r2*sin(T2))
11 L_T1 = L1*L2*M1*T1p*T3p*sin(T1 - T3) - 2*L1*M2*g*cos(T1) - L1*Mt*g*cos(T1)
   - M1*g*r1*cos(T1) - L1*L2*M1*T1p*T2p*sin(T1 - T2) - L1*L2*M2*T1p*T2p*sin
   (T1 - T2) - L1*M1*g*cos(T1) - L1*L2*Mt*T1p*T2p*sin(T1 - T2) - L1*M2*T1p*
   T2p*r2*sin(T1 - T2) + L1*M2*T1p*T3p*r3*sin(T1 - T3) + L1*M1*T1p*T4p*r4*
   sin(T1 - T4)
12
13 L_T2p = I2*T2p + L2*M1*cos(T2)*(L1*T1p*cos(T1) + L2*T2p*cos(T2) - L2*T3p*
   cos(T3) - T4p*r4*cos(T4)) + L2*M2*cos(T2)*(L1*T1p*cos(T1) + L2*T2p*cos(
   T2) - T3p*r3*cos(T3)) + L2*M1*sin(T2)*(L1*T1p*sin(T1) + L2*T2p*sin(T2) -
   L2*T3p*sin(T3) - T4p*r4*sin(T4)) + L2*Mt*cos(T2)*(L1*T1p*cos(T1) + L2*
   T2p*cos(T2)) + L2*M2*sin(T2)*(L1*T1p*sin(T1) + L2*T2p*sin(T2) - T3p*r3*
   sin(T3)) + L2*Mt*sin(T2)*(L1*T1p*sin(T1) + L2*T2p*sin(T2)) + M2*r2*cos(
   T2)*(L1*T1p*cos(T1) + T2p*r2*cos(T2)) + M2*r2*sin(T2)*(L1*T1p*sin(T1) +
   T2p*r2*sin(T2))
14 L_T2 = L2^2*M1*T2p*T3p*sin(T2 - T3) - L2*M2*g*cos(T2) - L2*Mt*g*cos(T2) -
   M2*g*r2*cos(T2) - L2*M1*g*cos(T2) + L1*L2*M1*T1p*T2p*sin(T1 - T2) + L1*
   L2*M2*T1p*T2p*sin(T1 - T2) + L1*L2*Mt*T1p*T2p*sin(T1 - T2) + L1*M2*T1p*
   T2p*r2*sin(T1 - T2) + L2*M2*T2p*T3p*r3*sin(T2 - T3) + L2*M1*T2p*T4p*r4*

```

```

    sin(T2 - T4)
15
16 L_T3p = I2*T3p - L2*M1*cos(T3)*(L1*T1p*cos(T1) + L2*T2p*cos(T2) - L2*T3p*
    cos(T3) - T4p*r4*cos(T4)) - L2*M1*sin(T3)*(L1*T1p*sin(T1) + L2*T2p*sin(
    T2) - L2*T3p*sin(T3) - T4p*r4*sin(T4)) - M2*r3*cos(T3)*(L1*T1p*cos(T1) +
    L2*T2p*cos(T2) - T3p*r3*cos(T3)) - M2*r3*sin(T3)*(L1*T1p*sin(T1) + L2*
    T2p*sin(T2) - T3p*r3*sin(T3))
17 L_T3 = L2*M1*g*cos(T3) + M2*g*r3*cos(T3) - L2^2*M1*T2p*T3p*sin(T2 - T3) -
    L1*L2*M1*T1p*T3p*sin(T1 - T3) - L1*M2*T1p*T3p*r3*sin(T1 - T3) - L2*M2*
    T2p*T3p*r3*sin(T2 - T3) - L2*M1*T3p*T4p*r4*sin(T3 - T4)
18
19 L_T4p = I1*T4p - M1*r4*cos(T4)*(L1*T1p*cos(T1) + L2*T2p*cos(T2) - L2*T3p*
    cos(T3) - T4p*r4*cos(T4)) - M1*r4*sin(T4)*(L1*T1p*sin(T1) + L2*T2p*sin(
    T2) - L2*T3p*sin(T3) - T4p*r4*sin(T4))
20 L_T4 = M1*r4*(g*cos(T4) - L1*T1p*T4p*sin(T1 - T4) - L2*T2p*T4p*sin(T2 - T4)
    + L2*T3p*T4p*sin(T3 - T4))
21
22 %Derivadas no tempo
23 LT1_t=diff(L_T1p,t)
24 LT2_t=diff(L_T2p,t)
25 LT3_t=diff(L_T3p,t)
26 LT4_t=diff(L_T4p,t)
27
28 %Arrumando as equações para um formato facil de entender
29 LT1_t=subs(LT1_t,[diff(T1(t),t),diff(T1p(t),t),diff(T2(t),t),diff(T2p(t)
    ,t),diff(T3(t),t),diff(T3p(t),t),diff(T4(t),t),diff(T4p(t),t),diff(
    T5(t),t),diff(T5p(t),t),diff(T6(t),t),diff(T6p(t),t),diff(T7(t),t),
    diff(T7p(t),t)], [T1p,T1pp,T2p,T2pp,T3p,T3pp,T4p,T4pp,T5p,T5pp,T6p,T6pp,
    T7p,T7pp])
30 LT2_t=subs(LT2_t,[diff(T1(t),t),diff(T1p(t),t),diff(T2(t),t),diff(T2p(t)
    ,t),diff(T3(t),t),diff(T3p(t),t),diff(T4(t),t),diff(T4p(t),t),diff(
    T5(t),t),diff(T5p(t),t),diff(T6(t),t),diff(T6p(t),t),diff(T7(t),t),
    diff(T7p(t),t)], [T1p,T1pp,T2p,T2pp,T3p,T3pp,T4p,T4pp,T5p,T5pp,T6p,T6pp,
    T7p,T7pp])
31 LT3_t=subs(LT3_t,[diff(T1(t),t),diff(T1p(t),t),diff(T2(t),t),diff(T2p(t)
    ,t),diff(T3(t),t),diff(T3p(t),t),diff(T4(t),t),diff(T4p(t),t),diff(
    T5(t),t),diff(T5p(t),t),diff(T6(t),t),diff(T6p(t),t),diff(T7(t),t),
    diff(T7p(t),t)], [T1p,T1pp,T2p,T2pp,T3p,T3pp,T4p,T4pp,T5p,T5pp,T6p,T6pp,
    T7p,T7pp])
32 LT4_t=subs(LT4_t,[diff(T1(t),t),diff(T1p(t),t),diff(T2(t),t),diff(T2p(t)
    ,t),diff(T3(t),t),diff(T3p(t),t),diff(T4(t),t),diff(T4p(t),t),diff(
    T5(t),t),diff(T5p(t),t),diff(T6(t),t),diff(T6p(t),t),diff(T7(t),t),
    diff(T7p(t),t)], [T1p,T1pp,T2p,T2pp,T3p,T3pp,T4p,T4pp,T5p,T5pp,T6p,T6pp,
    T7p,T7pp])
33
34 %equacoes de lagrange
35 LagrangeT1=simplify(LT1_t-L_T1)

```



```

36 LagrangeT2=simplify (LT2_t-L_T2)
37 LagrangeT3=simplify (LT3_t-L_T3)
38 LagrangeT4=simplify (LT4_t-L_T4)

```

Linearização

```

1  clear all
2  clc
3  close all
4
5  syms r1 r2 r3 r4 r5 r6 r7 rt L1 L2 L3 L5 L6 I1 I2 I3 I5 I6 I7 M1 M2 M3 M4
   M5 M6 M7 Mt g
6  syms T1 T1p T1pp T2 T2p T2pp T3 T3p T3pp T4 T4p T4pp T5 T5p T5pp T6 T6p
   T6pp T7 T7p T7pp
7  syms torque1 torque2 torque3 torque5 torque6 torque7
8
9  %Colocar as equações de Lagrange não linearizadas (Mudar aqui)
10 LagrangeT1 = I1*T1pp + L1^2*M1*T1pp + 2*L1^2*M2*T1pp + L1^2*Mt*T1pp + M1*r1
   ^2*T1pp + L1*M1*g*cos(T1) + 2*L1*M2*g*cos(T1) + L1*Mt*g*cos(T1) + M1*g*
   r1*cos(T1) + L1*L2*M1*sin(T1 - T2)*T2p^2 + L1*L2*M2*sin(T1 - T2)*T2p^2 -
   L1*L2*M1*sin(T1 - T3)*T3p^2 + L1*L2*Mt*sin(T1 - T2)*T2p^2 + L1*M2*r2*
   sin(T1 - T2)*T2p^2 - L1*M2*r3*sin(T1 - T3)*T3p^2 - L1*M1*r4*sin(T1 - T4)
   *T4p^2 + L1*L2*M1*cos(T1 - T2)*T2pp + L1*L2*M2*cos(T1 - T2)*T2pp - L1*L2
   *M1*cos(T1 - T3)*T3pp + L1*L2*Mt*cos(T1 - T2)*T2pp + L1*M2*r2*cos(T1 -
   T2)*T2pp - L1*M2*r3*cos(T1 - T3)*T3pp - L1*M1*r4*cos(T1 - T4)*T4pp
11 LagrangeT2 = I2*T2pp + L2^2*M1*T2pp + L2^2*M2*T2pp + L2^2*Mt*T2pp + M2*r2
   ^2*T2pp - L2^2*M1*sin(T2 - T3)*T3p^2 + L2*M1*g*cos(T2) + L2*M2*g*cos(T2)
   + L2*Mt*g*cos(T2) + M2*g*r2*cos(T2) - L2^2*M1*cos(T2 - T3)*T3pp - L1*L2
   *M1*sin(T1 - T2)*T1p^2 - L1*L2*M2*sin(T1 - T2)*T1p^2 - L1*L2*Mt*sin(T1 -
   T2)*T1p^2 - L1*M2*r2*sin(T1 - T2)*T1p^2 - L2*M2*r3*sin(T2 - T3)*T3p^2 -
   L2*M1*r4*sin(T2 - T4)*T4p^2 + L1*L2*M1*cos(T1 - T2)*T1pp + L1*L2*M2*cos
   (T1 - T2)*T1pp + L1*L2*Mt*cos(T1 - T2)*T1pp + L1*M2*r2*cos(T1 - T2)*T1pp
   - L2*M2*r3*cos(T2 - T3)*T3pp - L2*M1*r4*cos(T2 - T4)*T4pp
12 LagrangeT3 = I2*T3pp + L2^2*M1*T3pp + M2*r3^2*T3pp + L2^2*M1*sin(T2 - T3)*
   T2p^2 - L2*M1*g*cos(T3) - M2*g*r3*cos(T3) - L2^2*M1*cos(T2 - T3)*T2pp +
   L1*L2*M1*sin(T1 - T3)*T1p^2 + L1*M2*r3*sin(T1 - T3)*T1p^2 + L2*M2*r3*sin
   (T2 - T3)*T2p^2 + L2*M1*r4*sin(T3 - T4)*T4p^2 - L1*L2*M1*cos(T1 - T3)*
   T1pp - L1*M2*r3*cos(T1 - T3)*T1pp - L2*M2*r3*cos(T2 - T3)*T2pp + L2*M1*
   r4*cos(T3 - T4)*T4pp
13 LagrangeT4 = I1*T4pp + M1*r4^2*T4pp - M1*g*r4*cos(T4) + L1*M1*r4*sin(T1 -
   T4)*T1p^2 + L2*M1*r4*sin(T2 - T4)*T2p^2 - L2*M1*r4*sin(T3 - T4)*T3p^2 -
   L1*M1*r4*cos(T1 - T4)*T1pp - L2*M1*r4*cos(T2 - T4)*T2pp + L2*M1*r4*cos(
   T3 - T4)*T3pp
14
15 %Linearização (Mudar os valores iniciais)
16 Lineart1=taylor (LagrangeT1, [T1, T1p, T1pp, T2, T2p, T2pp, T3, T3p, T3pp, T4, T4p, T4pp
   ], [pi/2, 0, 0, pi/2, 0, 0, pi/2, 0, 0, pi/2, 0, 0], 'Order', 2);

```

```

17 Lineart2=taylor (LagrangeT2 , [ T1, T1p, T1pp, T2, T2p, T2pp, T3, T3p, T3pp, T4, T4p, T4pp
    ] , [ pi/2, 0, 0, pi/2, 0, 0, pi/2, 0, 0, pi/2, 0, 0] , 'Order' , 2);
18 Lineart3=taylor (LagrangeT3 , [ T1, T1p, T1pp, T2, T2p, T2pp, T3, T3p, T3pp, T4, T4p, T4pp
    ] , [ pi/2, 0, 0, pi/2, 0, 0, pi/2, 0, 0, pi/2, 0, 0] , 'Order' , 2);
19 Lineart4=taylor (LagrangeT4 , [ T1, T1p, T1pp, T2, T2p, T2pp, T3, T3p, T3pp, T4, T4p, T4pp
    ] , [ pi/2, 0, 0, pi/2, 0, 0, pi/2, 0, 0, pi/2, 0, 0] , 'Order' , 2);
20
21 %Simplificando as equações
22 Lineart1=simplify (Lineart1)
23 Lineart2=simplify (Lineart2)
24 Lineart3=simplify (Lineart3)
25 Lineart4=simplify (Lineart4)
26
27 %Matriz de inercia
28 M=[ diff (Lineart1 , T1pp) , diff (Lineart1 , T2pp) , diff (Lineart1 , T3pp) , diff (
    Lineart1 , T4pp);
29     diff (Lineart2 , T1pp) , diff (Lineart2 , T2pp) , diff (Lineart2 , T3pp) , diff (
    Lineart2 , T4pp);
30     diff (Lineart3 , T1pp) , diff (Lineart3 , T2pp) , diff (Lineart3 , T3pp) , diff (
    Lineart3 , T4pp);
31     diff (Lineart4 , T1pp) , diff (Lineart4 , T2pp) , diff (Lineart4 , T3pp) , diff (
    Lineart4 , T4pp) ];
32 M=simplify (M)
33
34 %Matriz Elasticidade
35 K=[ diff (Lineart1 , T1) , diff (Lineart1 , T2) , diff (Lineart1 , T3) , diff (Lineart1 , T4) ;
36     diff (Lineart2 , T1) , diff (Lineart2 , T2) , diff (Lineart2 , T3) , diff (Lineart2 , T4) ;
37     diff (Lineart3 , T1) , diff (Lineart3 , T2) , diff (Lineart3 , T3) , diff (Lineart3 , T4) ;
38     diff (Lineart4 , T1) , diff (Lineart4 , T2) , diff (Lineart4 , T3) , diff (Lineart4 , T4)
    ];
39 K=simplify (K)
40
41 %Matriz de constantes Constantes
42 O(1,1)=simplify (Lineart1 -diff (Lineart1 , T1pp)*T1pp -diff (Lineart1 , T2pp)*
    T2pp -diff (Lineart1 , T3pp)*T3pp -diff (Lineart1 , T4pp)*T4pp -diff (Lineart1 ,
    T1)*T1 -diff (Lineart1 , T2)*T2 -diff (Lineart1 , T3)*T3 -diff (Lineart1 , T4)*T4
    );
43 O(2,1)=simplify (Lineart2 -diff (Lineart2 , T1pp)*T1pp -diff (Lineart2 , T2pp)*
    T2pp -diff (Lineart2 , T3pp)*T3pp -diff (Lineart2 , T4pp)*T4pp -diff (Lineart2 ,
    T1)*T1 -diff (Lineart2 , T2)*T2 -diff (Lineart2 , T3)*T3 -diff (Lineart2 , T4)*T4
    );
44 O(3,1)=simplify (Lineart3 -diff (Lineart3 , T1pp)*T1pp -diff (Lineart3 , T2pp)*
    T2pp -diff (Lineart3 , T3pp)*T3pp -diff (Lineart3 , T4pp)*T4pp -diff (Lineart3 ,
    T1)*T1 -diff (Lineart3 , T2)*T2 -diff (Lineart3 , T3)*T3 -diff (Lineart3 , T4)*T4
    );
45 O(4,1)=simplify (Lineart4 -diff (Lineart4 , T1pp)*T1pp -diff (Lineart4 , T2pp)*
    T2pp -diff (Lineart4 , T3pp)*T3pp -diff (Lineart4 , T4pp)*T4pp -diff (Lineart4 ,

```

```

T1)*T1 -diff(Lineart4 ,T2)*T2 -diff(Lineart4 ,T3)*T3 -diff(Lineart4 ,T4)*T4
)
46
47 %Matrizes para o espaço de estados
48 A=[zeros(4,4) eye(4); -inv(M)*K zeros(4,4)]
49 B=[zeros(4,5); inv(M) -inv(M)*O]
50 C=[eye(4) zeros(4,4); zeros(4,8)]
51 D=0

```

Solução numérica para marcha normal

```

1 clc;
2 close all;
3 clear all;
4
5 % Vetor de tempo
6 time=0:0.014:0.372; %vetor tempo
7
8 % Par metros
9 g=9.81; %gravidade
10 h=1.73; %altura do individuo
11 M=56.7; %Massa do individuo
12
13 % Comprimento de cada eixo (porcentagens no livro do winter)
14 L1=0.246*h; %Comprimento da perna de apoio
15 L2=0.245*h; %Comprimento da coxa de apoio
16 L3=L2; %Comprimento da coxa de balanço
17 L4=L1; %Comprimento da perna de balanço
18
19 % Massas de cada membro (porcentagens no livro do winter)
20 M1=0.0475*M; %massa da perna apoio
21 M2=0.105*M; %massa da coxa apoio
22 M3=M2; %massa da perna balanço
23 M4=M1; %massa da coxa balanço
24 Mpe=0.0145*M; %massa do pe
25 Mt=M-M1-M2-M3-M4-2*Mpe; %Massa do tronco
26
27 % Posições dos centros de massa (porcentagens no livro do winter)
28 r1=0.567*L1; %distancia do centro de massa para a perna de apoio
29 r2=0.567*L2; %distancia do centro de massa para a coxa de apoio
30 r3=0.433*L3; %distancia do centro de massa para a coxa de balanço
31 r4=0.433*L4; %distancia do centro de massa para a perna de balanço
32 rt=0.095*h; %distancia do centro de massa para o tronco
33
34 % Momentos de Inercia (teorema dos eixos paralelos)
35 I1=M1*L1^2/12-M1*(L1/2-r1)^2; %Momento de inércia da perna apoio
36 I2=M2*L2^2/12-M2*(L2/2-r2)^2; %Momento de inércia da coxa apoio

```

```

37 I3=M3*L3^2/12-M3*(L3/2-r3)^2; %Momento de inércia da coxa balanço
38 I4=M4*L4^2/12-M4*(L4/2-r4)^2; %Momento de inércia da perna balanço
39
40 % ngulos tabelados (em graus)
41 T1=[108.4 106.6 104.6 102.5 100.3 98.1 95.9 93.8 91.9 90.3 88.9 87.6
      86.5 85.4 84.4 83.5 82.5 81.6 80.6 79.7 78.7 77.8 76.8 75.9
      74.9 73.8 72.7];
42 T2=[109.6 109.3 109.0 108.6 108.4 108.2 107.9 107.6 106.9 105.9 104.5 102.9
      101.2 99.3 97.6 95.9 94.3 92.8 91.4 90.0 88.7 87.4 86.0 84.6
      83.1 81.7 80.2];
43 T3=[82.7 85.5 88.6 91.8 95.1 98.3 101.4 104.3 106.9 109.2 111.2 112.8
      114.0 114.9 115.6 115.9 115.9 115.7 115.2 114.6 113.7 112.9 112.1 111.3
      110.8 110.3 110.0];
44 T4=[39.8 38.0 37.0 36.7 37.3 38.8 41.0 43.8 47.2 51.0 55.2 59.7
      64.3 69.1 74.0 78.8 83.6 88.4 93.0 97.4 101.5 105.0 107.8
      109.7 110.7 110.7 109.8];
45
46 % Transformando em radianos
47 T1=T1*pi/180; % ngulos do joelho de apoio
48 T2=T2*pi/180; % ngulos do quadril de apoio
49 T3=T3*pi/180; % ngulos do quadril de balanço
50 T4=T4*pi/180; % ngulos do joelho de balanço
51
52
53 % Velocidades angulares tabeladas (rad/s)
54 T1p=[-1.99 -2.33 -2.50 -2.61 -2.68 -2.69 -2.60 -2.41 -2.15 -1.88 -1.64
      -1.46 -1.33 -1.24 -1.18 -1.16 -1.17 -1.17 -1.16 -1.15 -1.14 -1.16 -1.18
      -1.20 -1.23 -1.29 -1.39];
55 T2p=[-0.39 -0.41 -0.41 -0.36 -0.29 -0.26 -0.37 -0.64 -1.04 -1.45 -1.81
      -2.05 -2.18 -2.19 -2.11 -1.99 -1.87 -1.77 -1.70 -1.65 -1.63 -1.65 -1.69
      -1.75 -1.79 -1.79 -1.76];
56 T3p=[3.29 3.59 3.81 3.95 3.98 3.89 3.68 3.36 2.99 2.58 2.16 1.74
      1.33 0.94 0.58 0.23 -0.11 -0.43 -0.70 -0.91 -1.02 -1.03 -0.94
      -0.79 -0.63 -0.49 -0.41];
57 T4p=[-2.41 -1.70 -0.80 0.21 1.24 2.21 3.08 3.81 4.41 4.90 5.28
      5.56 5.75 5.86 5.91 5.91 5.85 5.73 5.51 5.16 4.61 3.85 2.88
      1.75 0.58 -0.51 -1.39];
58
59 % Acelerações (rad/s)
60 T1pp=[-32.87 -18.01 -9.85 -6.21 -2.78 2.90 10.00 15.87 18.47 17.56 14.51
      10.97 7.87 5.13 2.56 0.58 -0.22 0.10 0.69 0.65 -0.22 -1.19 -1.64
      -1.93 -2.99 -5.30 -8.47];
61 T2pp=[0.13 -0.49 1.69 4.27 3.58 -2.78 -13.38 -23.43 -28.36 -26.92
      -20.92 -12.96 -4.84 2.16 6.84 8.52 7.81 6.10 4.22 2.22 0.01
      -2.10 -3.38 -3.24 -1.71 0.98 4.63];
62 T3pp=[24.42 18.34 12.48 5.97 -1.93 -10.64 -18.57 -24.25 -27.38 -28.82
      -29.42 -29.22 -27.99 -26.18 -24.68 -23.85 -23.01 -20.96 -16.94

```

```

-11.04 -4.04 2.83 8.12 10.77 10.49 7.65 3.48];
63 T4pp=[40.67 56.27 66.77 71.22 70.05 64.35 55.75 46.45 38.02 30.50 23.32
16.47 10.44 5.57 1.65 -2.00 -6.16 -11.89 -20.20 -31.54 -45.55
-60.60 -73.46 -80.46 -79.07 -68.79 -51.73];
64
65
66 % Posições das juntas
67 R1=[+L1.*cos(T1);+L1.*sin(T1)]; %posição do joelho de apoio
68 R2=R1+[L2.*cos(T2);L2.*sin(T2)]; %posição do quadril
69 R3=R2+[-L3.*cos(T3);-L3.*sin(T3)]; %posição do joelho de balanço
70 R4=R3+[-L4.*cos(T4);-L4.*sin(T4)]; %posição do tornozelo de balanço
71 Rt=R2+[0;rt]; %posição do cg do tronco
72
73 % Plot da pessoa andando
74 figure(1)
75 subplot(2,1,1)
76 for i=1:2:27
77 %clf
78 plot([0,R1(1,i)],[0,R1(2,i)])
79 axis([-0.8,0.8,0,1.1])
80 hold on
81 plot([R2(1,i),R1(1,i)],[R2(2,i),R1(2,i)])
82 plot([R2(1,i),R3(1,i)],[R2(2,i),R3(2,i)])
83 plot([R4(1,i),R3(1,i)],[R4(2,i),R3(2,i)])
84 plot([Rt(1,i),R2(1,i)],[Rt(2,i),R2(2,i)])
85 title("Movimento Tabelado","fontsize",15)
86 xlabel("x [m]","fontsize",12)
87 ylabel("y [m]","fontsize",12)
88 pause(0.1)
89 end
90
91 % Cálculo dos torques não lineares
92 for t=1:27
93 LagrangeT1(t) = I1*T1pp(t) + L1^2*M1*T1pp(t) + 2*L1^2*M2*T1pp(t) + L1^2*Mt*
T1pp(t) + M1*r1^2*T1pp(t) + L1*M1*g*cos(T1(t)) + 2*L1*M2*g*cos(T1(t)) +
L1*Mt*g*cos(T1(t)) + M1*g*r1*cos(T1(t)) + L1*L2*M1*sin(T1(t) - T2(t))*
T2p(t)^2 + L1*L2*M2*sin(T1(t) - T2(t))*T2p(t)^2 - L1*L2*M1*sin(T1(t) -
T3(t))*T3p(t)^2 + L1*L2*Mt*sin(T1(t) - T2(t))*T2p(t)^2 + L1*M2*r2*sin(T1
(t) - T2(t))*T2p(t)^2 - L1*M2*r3*sin(T1(t) - T3(t))*T3p(t)^2 - L1*M1*r4*
sin(T1(t) - T4(t))*T4p(t)^2 + L1*L2*M1*cos(T1(t) - T2(t))*T2pp(t) + L1*
L2*M2*cos(T1(t) - T2(t))*T2pp(t) - L1*L2*M1*cos(T1(t) - T3(t))*T3pp(t) +
L1*L2*Mt*cos(T1(t) - T2(t))*T2pp(t) + L1*M2*r2*cos(T1(t) - T2(t))*T2pp(
t) - L1*M2*r3*cos(T1(t) - T3(t))*T3pp(t) - L1*M1*r4*cos(T1(t) - T4(t))*
T4pp(t)
94 LagrangeT2(t) = I2*T2pp(t) + L2^2*M1*T2pp(t) + L2^2*M2*T2pp(t) + L2^2*Mt*
T2pp(t) + M2*r2^2*T2pp(t) - L2^2*M1*sin(T2(t) - T3(t))*T3p(t)^2 + L2*M1*
g*cos(T2(t)) + L2*M2*g*cos(T2(t)) + L2*Mt*g*cos(T2(t)) + M2*g*r2*cos(T2(

```

```

t)) - L2^2*M1*cos(T2(t) - T3(t))*T3pp(t) - L1*L2*M1*sin(T1(t) - T2(t))*
T1p(t)^2 - L1*L2*M2*sin(T1(t) - T2(t))*T1p(t)^2 - L1*L2*Mt*sin(T1(t) -
T2(t))*T1p(t)^2 - L1*M2*r2*sin(T1(t) - T2(t))*T1p(t)^2 - L2*M2*r3*sin(T2
(t) - T3(t))*T3p(t)^2 - L2*M1*r4*sin(T2(t) - T4(t))*T4p(t)^2 + L1*L2*M1*
cos(T1(t) - T2(t))*T1pp(t) + L1*L2*M2*cos(T1(t) - T2(t))*T1pp(t) + L1*L2
*Mt*cos(T1(t) - T2(t))*T1pp(t) + L1*M2*r2*cos(T1(t) - T2(t))*T1pp(t) -
L2*M2*r3*cos(T2(t) - T3(t))*T3pp(t) - L2*M1*r4*cos(T2(t) - T4(t))*T4pp(t
)
95 LagrangeT3(t) = I2*T3pp(t) + L2^2*M1*T3pp(t) + M2*r3^2*T3pp(t) + L2^2*M1*
sin(T2(t) - T3(t))*T2p(t)^2 - L2*M1*g*cos(T3(t)) - M2*g*r3*cos(T3(t)) -
L2^2*M1*cos(T2(t) - T3(t))*T2pp(t) + L1*L2*M1*sin(T1(t) - T3(t))*T1p(t)
^2 + L1*M2*r3*sin(T1(t) - T3(t))*T1p(t)^2 + L2*M2*r3*sin(T2(t) - T3(t))*
T2p(t)^2 + L2*M1*r4*sin(T3(t) - T4(t))*T4p(t)^2 - L1*L2*M1*cos(T1(t) -
T3(t))*T1pp(t) - L1*M2*r3*cos(T1(t) - T3(t))*T1pp(t) - L2*M2*r3*cos(T2(t)
) - T3(t))*T2pp(t) + L2*M1*r4*cos(T3(t) - T4(t))*T4pp(t)
96 LagrangeT4(t) = I1*T4pp(t) + M1*r4^2*T4pp(t) - M1*g*r4*cos(T4(t)) + L1*M1*
r4*sin(T1(t) - T4(t))*T1p(t)^2 + L2*M1*r4*sin(T2(t) - T4(t))*T2p(t)^2 -
L2*M1*r4*sin(T3(t) - T4(t))*T3p(t)^2 - L1*M1*r4*cos(T1(t) - T4(t))*T1pp(
t) - L2*M1*r4*cos(T2(t) - T4(t))*T2pp(t) + L2*M1*r4*cos(T3(t) - T4(t))*
T3pp(t)
97 end
98
99 % Cálculo dos torques lineares
100 LinearT1 = T1pp*(I1 + L1^2*M1 + 2*L1^2*M2 + L1^2*Mt + M1*r1^2) + L1*T2pp*(
M2*r2 + L2*M1 + L2*M2 + L2*Mt) - L1*T3pp*(M2*r3 + L2*M1) - g*(T1 - pi/2)
*(M1*r1 + L1*M1 + 2*L1*M2 + L1*Mt) - L1*M1*T4pp*r4
101 LinearT2 = T2pp*(I2 + L2^2*M1 + L2^2*M2 + L2^2*Mt + M2*r2^2) + L1*T1pp*(M2*
r2 + L2*M1 + L2*M2 + L2*Mt) - L2*T3pp*(M2*r3 + L2*M1) - g*(T2 - pi/2)*(
M2*r2 + L2*M1 + L2*M2 + L2*Mt) - L2*M1*T4pp*r4
102 LinearT3 = T3pp*(M1*L2^2 + M2*r3^2 + I2) - L1*T1pp*(M2*r3 + L2*M1) - L2*
T2pp*(M2*r3 + L2*M1) + g*(T3 - pi/2)*(M2*r3 + L2*M1) + L2*M1*T4pp*r4
103 LinearT4 = T4pp*(M1*r4^2 + I1) - L1*M1*T1pp*r4 - L2*M1*T2pp*r4 + L2*M1*T3pp
*r4 + M1*g*r4*(T4 - pi/2)
104
105
106 %Valores teóricos de torques (tabelados no livro do winter)
107 %para a perna TJB—torque joelho de balanço TJA—torque joelho de apoio
108 %(Tabela A.5a)
109 TJB=[7.0 7.0 6.9 6.5 5.8 4.8 3.6 2.3 1.0 -0.1 -1.0 -1.9 -2.7 -3.5
-4.2 -4.9 -5.8 -6.8 -8.0 -9.4 -11.1 -12.8 -14.3 -15.1 -14.6 -12.7
-9.5];
110 TJA=[-33.8 -19.9 -7.6 -4.5 7.8 14.5 24.8 31.6 35.0 37.8 32.5 28.1
24.8 20.2 19.8 15.8 10.9 7.8 6.6 6.6 7.0 5.9 2.3 -2.3 -0.1 -5.0
-6.2];
111 %para a coxa (Tabela A.5b)
112 TQB=[22.9 17.8 13.8 10.8 8.5 6.7 5.0 3.4 2.0 0.9 0.0 -0.8 -1.5 -2.5
-3.6 -5.0 -6.7 -8.7 -10.5 -12.2 -14.0 -16.0 -17.9 -19.1 -18.7 -16.1

```

```

-11.7];
113 TQA=[-54.4  -37.6  -23.5  -20.8  -11.1  -7.8   -0.4   4.7  7.3  9.9  5.0  3.0  4.7  6.5
      12.0  12.5  10.9  10.1  11.2  13.8  16.7  17.7  15.2  11.2  14.6  12.2
      14.7];
114
115 %plot dos torques do joelho de apoio
116 figure(2)
117 subplot(2,2,1)
118 plot(time,LagrangeT1) %torques não-lineares
119 hold on
120 plot(time,LinearT1) %torques lineares
121 plot(time,TJA) %plot dos torques tabelados
122 legend({'Não linear','Linear'})%,'experimental'],'Location','southeast')
123 title('T Joelho Apoio')
124 xlabel('Tempo [s]')
125 ylabel('Torque [N.m]')
126
127 %plot dos torques do joelho de balanço
128 subplot(2,2,2)
129 plot(time,LagrangeT4) %plot dos torques não-lineares
130 hold on
131 plot(time,LinearT4) %linearizado
132 plot(time,TJB) %tabelado
133 legend('Não linear','Linear')%,'experimental')
134 title('T Joelho Balanço')
135 xlabel('Tempo [s]')
136 ylabel('Torque [N.m]')
137
138
139 %plot dos torques da coxa de apoio
140 subplot(2,2,3)
141 plot(time,LagrangeT2) %não-lineares
142 hold on
143 plot(time,LinearT2) %linearizados
144 plot(time,TQA) %tabelados
145 legend({'Não linear','Linear'})%,'experimental'],'Location','southeast')
146 title('T Quadril Apoio')
147 xlabel('Tempo [s]')
148 ylabel('Torque [N.m]')
149
150 %plot dos torques da coxa de balanço
151 subplot(2,2,4)
152 plot(time,LagrangeT3) %não linearizados
153 hold on
154 plot(time,LinearT3) %linearizados
155 plot(time,TQB) %tabelado
156 legend('Não linear','Linear')%,'experimental')

```

```

157 title('T Quadril Balanço')
158 xlabel('Tempo [s]')
159 ylabel('Torque [N.m]')
160
161 %Matrizes do sistema de equacoes diferenciais
162 %Matriz de inercia
163 M =[[ I1 + L1^2*M1 + 2*L1^2*M2 + L1^2*Mt + M1*r1^2,          L1*(M2*r2 + L2*
      M1 + L2*M2 + L2*Mt),          -L1*(M2*r3 + L2*M1),          -L1*M1*r4 ];
164 [          L1*(M2*r2 + L2*M1 + L2*M2 + L2*Mt), I2 + L2^2*M1 + L2^2*M2 + L2
      ^2*Mt + M2*r2^2,          -L2*(M2*r3 + L2*M1),          -L2*M1*r4 ];
165 [          -L1*(M2*r3 + L2*M1),          -L2
      *(M2*r3 + L2*M1), M1*L2^2 + M2*r3^2 + I2,          L2*M1*r4 ];
166 [          -L1*M1*r4,
      -L2*M1*r4,          L2*M1*r4, M1*r4^2 + I1 ]]
167
168 %matriz de Rigidez
169 K =[[ -g*(M1*r1 + L1*M1 + 2*L1*M2 + L1*Mt),
      0,          0,          0];
170 [          0, -g*(M2*r2 + L2*M1 + L2*M2 + L2*Mt),
      0,          0];
171 [          0,          0,
      g*(M2*r3 + L2*M1),          0];
172 [          0,          0,
      0, M1*g*r4 ]]
173
174 %constantes
175 O =[(g*pi*(M1*r1 + L1*M1 + 2*L1*M2 + L1*Mt))/2;
      (pi*g*(M2*r2 + L2*M1 + L2*M2 + L2*Mt))/2;
      -(pi*g*(M2*r3 + L2*M1))/2;
      -(pi*M1*g*r4)/2]
176
177
178
179
180 %Jogando os torques lineares no sistema não linear
181 A=[zeros(4,4) eye(4); -inv(M)*K zeros(4,4)]
182 B=[zeros(4,5); inv(M) -inv(M)*O]
183 C=[eye(8)]
184 D=0
185
186 %vetor de entradas
187 u=[LagrangeT1;LagrangeT2;LagrangeT3;LagrangeT4;ones(1,length(time))]
188
189
190 %solucionando o espaço de estados
191 sys = ss(A,B,C,D);
192 system = lsim(sys,u,time,[T1(1),T2(1),T3(1),T4(1),T1p(1),T2p(1),T3p(1),T4p
      (1)]);
193
194 %Respostas do espaço de estados

```



```

195 LT1=system (:,1) ' % ngulos de Joelho de apoio
196 LT2=system (:,2) ' % ngulos de quadril de apoio
197 LT3=system (:,3) ' % ngulos de quadril de balanço
198 LT4=system (:,4) ' % ngulos de Joelho de balanço
199 LT1p=system (:,5) ' %velocidade de Joelho de apoio
200 LT2p=system (:,6) ' %velocidade de quadril de apoio
201 LT3p=system (:,7) ' %velocidade de quadril de balanço
202 LT4p=system (:,8) ' %velocidade de Joelho de balanço
203
204 % Posições das juntas linearizadas
205 LR1=[+L1.*cos(LT1);+L1.*sin(LT1)]; %posição do Joelho de apoio
206 LR2=LR1+[L2.*cos(LT2);L2.*sin(LT2)]; %posição do quadril
207 LR3=LR2+[-L3.*cos(LT3);-L3.*sin(LT3)]; %posição do Joelho de balanço
208 LR4=LR3+[-L4.*cos(LT4);-L4.*sin(LT4)]; %posição do tornozelo de balanço
209 LRt=LR2+[0;rt]; %posição do cg do tronco
210
211 % Plot da pessoa andando linearizado
212 figure(1)
213 subplot(2,1,2)
214 for i=1:2:10
215     %clf
216     plot([0,LR1(1,i)],[0,LR1(2,i)])
217     axis([-0.8,0.8,0,1.1])
218     hold on
219     plot([LR2(1,i),LR1(1,i)],[LR2(2,i),LR1(2,i)])
220     plot([LR2(1,i),LR3(1,i)],[LR2(2,i),LR3(2,i)])
221     plot([LR4(1,i),LR3(1,i)],[LR4(2,i),LR3(2,i)])
222     plot([LRt(1,i),LR2(1,i)],[LRt(2,i),LR2(2,i)])
223     title("Movimento Linearizado","fontsize",15)
224     xlabel("x [m]","fontsize",12)
225     ylabel("y [m]","fontsize",12)
226     pause(0.1)
227 end
228
229 %plot dos angulos e velocidades
230 figure(7)
231 subplot(4,2,1)
232 hold on
233 plot(time,rad2deg(system(:,1)))
234 plot(time,rad2deg(T1))
235 title(' ngulo do Joelho apoio')
236 legend('linearizado','teorico')
237 axis([0,time(27),60,110])
238 xlabel('tempo[s]')
239 ylabel('angulo[ ]')
240
241

```

```

242 subplot(4,2,2)
243 hold on
244 plot(time,system(:,5))
245 plot(time,T1p)
246 title('Velocidade angular do Joelho apoio')
247 axis([0,time(27),min(min(system(:,5)),min(T1p)),max(max(system(:,5)),max(
    T1p)))]))
248 xlabel('tempo[s]')
249 ylabel('vel ang[ /s]')
250 axis([0,time(27),-10,10])
251 legend('linearizado','teorico')
252
253 subplot(4,2,3)
254 hold on
255 plot(time,rad2deg(system(:,2)))
256 plot(time,rad2deg(T2))
257 title(' ngulo do Quadril apoio')
258 xlabel('tempo[s]')
259 ylabel('angulo[ ]')
260 axis([0,time(27),80,130])
261 legend('linearizado','teorico')
262
263 subplot(4,2,4)
264 hold on
265 plot(time,system(:,6))
266 plot(time,T2p)
267 title('Velocidade angular do Quadril apoio')
268 axis([0,time(27),min(min(system(:,6)),min(T2p)),max(max(system(:,6)),max(
    T2p)))]))
269 xlabel('tempo[s]')
270 ylabel('vel ang[ /s]')
271 axis([0,time(27),-10,10])
272 legend('linearizado','teorico')
273
274 subplot(4,2,5)
275 hold on
276 plot(time,rad2deg(system(:,3)))
277 plot(time,rad2deg(T3))
278 title(' ngulo do Quadril Balanço')
279 xlabel('tempo[s]')
280 ylabel('angulo[ ]')
281 axis([0,time(27),80,130])
282 legend('linearizado','teorico')
283
284 subplot(4,2,6)
285 hold on
286 plot(time,system(:,7))

```

```

287 plot(time, T3p)
288 title('Velocidade angular do Quadril Balanço')
289 axis([0, time(27), min(min(system(:,7)), min(T3p)), max(max(system(:,7)), max(
    T3p)))]))
290 xlabel('tempo[s]')
291 ylabel('vel ang[ /s]')
292 axis([0, time(27), -10, 10])
293 legend('linearizado', 'teorico')
294
295 subplot(4,2,7)
296 hold on
297 plot(time, rad2deg(system(:,4)))
298 plot(time, rad2deg(T4))
299 title(' ngulo do Joelho Balanço')
300 xlabel('tempo[s]')
301 ylabel('angulo[ ]')
302 axis([0, time(27), 20, 115])
303 legend('linearizado', 'teorico')
304
305 subplot(4,2,8)
306 hold on
307 plot(time, system(:,8))
308 plot(time, T4p)
309 title('Velocidade angular do Joelho Balanço')
310 axis([0, time(27), min(min(system(:,8)), min(T4p)), max(max(system(:,8)), max(
    T4p)))]))
311 xlabel('tempo[s]')
312 ylabel('vel ang[ /s]')
313 axis([0, time(27), 30, 120])
314 axis([0, time(27), -10, 10])
315 legend('linearizado', 'teorico')
316
317 %As funções de transferência aparecem aqui!!
318 G1=tf(sys)
319
320 %Diagrama de bode das diagonais principais
321 figure(8)
322 bodeplot(G1(1,1))
323 title('tau1 -> ngulo de Joelho de apoio')
324
325 figure(9)
326 bodeplot(G1(2,2))
327 title('tau2 -> ngulo do Quadril de apoio')
328
329 figure(10)
330 bodeplot(G1(3,3))
331 title('tau3 -> ngulo do Quadril de balanço')

```

```

332
333 figure(11)
334 bodeplot(G1(4,4))
335 title('tau4 -> ngulo do Joelho de balanço')
336
337 figure(12)
338 bodeplot(G1(1,:))
339 title('tau 1,2,3,4 -> ngulo do Joelho de Apoio')
340
341 figure(13)
342 bodeplot(G1(2,:))
343 title('tau 1,2,3,4 -> ngulo do Quadril de Apoio')
344
345 figure(14)
346 bodeplot(G1(3,:))
347 title('tau 1,2,3,4 -> ngulo do Quadril de balanço')
348
349 figure(15)
350 bodeplot(G1(4,:))
351 title('tau 1,2,3,4 -> ngulo do Joelho de balanço')

```

Solução da marcha para pequenas angulações

```

1  clc;
2  close all;
3  clear all;
4
5  % Vetor de tempo
6  n=100 %quantidade de casas estudadas
7  y=0.5 %proporção do movimento a ser observado (0.5 equivale a um passo)
8  t_final=0.744; %tempo de simulação
9  time=linspace(0,t_final,n); %vetor tempo
10 dt = time(2) - time(1); %passo no tempo
11
12
13 % Par metros
14 g=9.81; %gravidade
15 h=1.73; %altura do individuo
16 M=56.7; %massa do individuo
17
18 % Comprimento de cada eixo (porcentagens no livro do winter)
19 L1=0.246*h; %Comprimento da perna de apoio
20 L2=0.245*h; %Comprimento da coxa de apoio
21 L3=L2; %Comprimento da coxa de balanço
22 L4=L1; %Comprimento da perna de balanço
23
24 % Massas de cada membro (porcentagens no livro do winter)

```

```

25 M1=0.0475*M; %Massa da perna de apoio
26 M2=0.105*M; %Massa da coxa de apoio
27 M3=M2; %Massa da coxa de balanço
28 M4=M1; %Massa da perna de balanço
29 Mpe=0.0145*M; %massa do pe
30 Mt=M-M1-M2-M3-M4-2*Mpe; %Massa do tronco
31
32 % Posições dos centros de massa (porcentagens no livro do winter)
33 r1=0.567*L1; %posição do centro de massa da perna de apoio
34 r2=0.567*L2; %posição do centro de massa da coxa de apoio
35 r3=0.433*L3; %posição do centro de massa da coxa de balanço
36 r4=0.433*L4; %posição do centro de massa da perna de balanço
37 rt=0.095*h %posição do centro de massa da do tronco
38
39 % Momentos de Inercia (teorema dos eixos paralelos)
40 I1=M1*L1^2/12-M1*(L1/2-r1)^2; %Momento de inercia da perna apoio
41 I2=M2*L2^2/12-M2*(L2/2-r2)^2; %Momento de inercia da coxa apoio
42 I3=M3*L3^2/12-M3*(L3/2-r3)^2; %Momento de inercia da coxa balanço
43 I4=M4*L4^2/12-M4*(L4/2-r4)^2; %Momento de inercia da perna balanço
44
45 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
46 % Criando uma curva de ngulos
47 %T1= ngulo do joelho de apoio
48 %T2= ngulo do quadril de apoio
49 %T3= ngulo do quadril de balanço
50 %T4= ngulo do joelho de balanço
51 %se estiver acompanhado de p (exemplo: T1p) significa velocidade
52 %se estiver acompanhado de pp (exemplo: T1pp) significa aceleração
53
54
55 for i=1:n
56     x=time(i)/t_final;
57     if i/n<=(0.4546)
58         T1(i) = 0.15*sin(4*pi*x - 1) + 0.2;
59     elseif i/n>0.4546 && i/n<=0.9546
60         T1(i) = 0.5*sin(4*pi*x - 1) + 0.55;
61     elseif i/n>0.9546 && i/n<=1
62         T1(i) = 0.15*sin(4*pi*x - 1) + 0.2;
63     end
64 end
65
66 for i=1:n
67     x=time(i)/t_final;
68     T2(i) = 0.5*sin(2*pi*x + pi/2) + 0.1;
69 end
70
71 % Ajustando a curva para os nossa orientação e diminuindo eles

```

```

72 T1 = (T2 - T1)/16 + pi/2;
73 T2 = T2/16 + pi/2;
74
75 T1p=zeros(1,n);
76 T2p=zeros(1,n);
77 T1pp=zeros(1,n);
78 T2pp=zeros(1,n);
79
80 % Calculando as velocidades e acelerações
81 for i=1:n-1
82     T1p(i)=(T1(i+1)-T1(i))/dt;
83     T2p(i)=(T2(i+1)-T2(i))/dt;
84 end
85 T1p(n)=T1p(n-1);
86 T2p(n)=T2p(n-1);
87 for i=1:n-1
88     T1pp(i)=(T1p(i+1)-T1p(i))/dt;
89     T2pp(i)=(T2p(i+1)-T2p(i))/dt;
90 end
91 T1pp(n)=T1pp(n-2);
92 T2pp(n)=T2pp(n-2);
93
94 T1pp(n-1)=T1pp(n-2);
95 T2pp(n-1)=T2pp(n-2);
96
97 % Espelhando os vetores o movimento é um ciclo completo
98 for i=1:0.5*n
99     T3pp(i)=T2pp(n/2+i);
100    T4pp(i)=T1pp(n/2+i);
101    T3p(i)=T2p(n/2+i);
102    T4p(i)=T1p(n/2+i);
103    T3(i)=T2(n/2+i);
104    T4(i)=T1(n/2+i);
105 end
106 for i=1:0.5*n
107    T3pp(n/2+i)=T2pp(i);
108    T4pp(n/2+i)=T1pp(i);
109    T3p(n/2+i)=T2p(i);
110    T4p(n/2+i)=T1p(i);
111    T3(n/2+i)=T2(i);
112    T4(n/2+i)=T1(i);
113 end
114
115 %Pegando apenas a parte do movimento requerida pelo y
116 T1 = T1(1:y*n);
117 T1p = T1p(1:y*n);
118 T1pp = T1pp(1:y*n);

```

```

119 T2 = T2(1:y*n);
120 T2p = T2p(1:y*n);
121 T2pp = T2pp(1:y*n);
122 T3 = T3(1:y*n);
123 T3p = T3p(1:y*n);
124 T3pp = T3pp(1:y*n);
125 T4 = T4(1:y*n);
126 T4p = T4p(1:y*n);
127 T4pp = T4pp(1:y*n);
128 time = time(1:y*n);
129 %MUDAR AQUI
130 n=n*y
131
132
133 %Plot dos ngulos teórico
134 figure(1)
135 subplot(2,1,1)
136 plot(time,T1*180/pi)
137 hold on
138 plot(time,T4*180/pi)
139 title(" ngulo da perna teórico","fontsize", 15)
140 xlabel("time [s]","fontsize",12)
141 ylabel(" graus ","fontsize",12)
142 legend('Apoio','Balanço')
143
144
145 subplot(2,1,2)
146 plot(time,T2*180/pi)
147 hold on
148 plot(time,T3*180/pi)
149 title(" ngulo da coxa teórico","fontsize", 15)
150 xlabel("time [s]","fontsize",12)
151 ylabel(" graus ","fontsize",12)
152 legend('Apoio','Balanço')
153
154
155 %Plot dos velocidades angulares teórico
156 figure(2)
157 subplot(2,1,1)
158 plot(time,T1p)
159 hold on
160 plot(time,T4p)
161 title("Velocidade angular da perna teórico","fontsize", 15)
162 xlabel("time [s]","fontsize",12)
163 ylabel(" rad/s ","fontsize",12)
164 legend('Apoio','Balanço')
165

```

```

166
167 subplot(2,1,2)
168 plot(time,T2p)
169 hold on
170 plot(time,T3p)
171 title("Velocidade angular da Coxa","fontsize",15)
172 xlabel("time [s]","fontsize",12)
173 ylabel("rad/s","fontsize",12)
174 legend('Apoio','Balanço')
175
176 %Plot dos acelerações angulares teórico
177 figure(3)
178 subplot(2,1,1)
179 plot(time,T1pp)
180 hold on
181 plot(time,T4pp)
182 title("Aceleração angular da perna teórico","fontsize",15)
183 xlabel("time [s]","fontsize",12)
184 ylabel("rad/s^2","fontsize",12)
185 legend('Apoio','Balanço')
186
187
188 subplot(2,1,2)
189 plot(time,T2pp)
190 hold on
191 plot(time,T3pp)
192 title("Aceleração angular dacoxa","fontsize",15)
193 xlabel("time [s]","fontsize",12)
194 ylabel("rad/s^2","fontsize",12)
195 legend('Apoio','Balanço')
196
197
198 % Cálculo dos torques não lineares
199 for t=1:n
200 LagrangeT1(t) = I1*T1pp(t) + L1^2*M1*T1pp(t) + 2*L1^2*M2*T1pp(t) + L1^2*Mt*
    T1pp(t) + M1*r1^2*T1pp(t) + L1*M1*g*cos(T1(t)) + 2*L1*M2*g*cos(T1(t)) +
    L1*Mt*g*cos(T1(t)) + M1*g*r1*cos(T1(t)) + L1*L2*M1*sin(T1(t) - T2(t))*
    T2p(t)^2 + L1*L2*M2*sin(T1(t) - T2(t))*T2p(t)^2 - L1*L2*M1*sin(T1(t) -
    T3(t))*T3p(t)^2 + L1*L2*Mt*sin(T1(t) - T2(t))*T2p(t)^2 + L1*M2*r2*sin(T1
    (t) - T2(t))*T2p(t)^2 - L1*M2*r3*sin(T1(t) - T3(t))*T3p(t)^2 - L1*M1*r4*
    sin(T1(t) - T4(t))*T4p(t)^2 + L1*L2*M1*cos(T1(t) - T2(t))*T2pp(t) + L1*
    L2*M2*cos(T1(t) - T2(t))*T2pp(t) - L1*L2*M1*cos(T1(t) - T3(t))*T3pp(t) +
    L1*L2*Mt*cos(T1(t) - T2(t))*T2pp(t) + L1*M2*r2*cos(T1(t) - T2(t))*T2pp(
    t) - L1*M2*r3*cos(T1(t) - T3(t))*T3pp(t) - L1*M1*r4*cos(T1(t) - T4(t))*
    T4pp(t)
201 LagrangeT2(t) = I2*T2pp(t) + L2^2*M1*T2pp(t) + L2^2*M2*T2pp(t) + L2^2*Mt*
    T2pp(t) + M2*r2^2*T2pp(t) - L2^2*M1*sin(T2(t) - T3(t))*T3p(t)^2 + L2*M1*

```



```

g*cos(T2(t)) + L2*M2*g*cos(T2(t)) + L2*Mt*g*cos(T2(t)) + M2*g*r2*cos(T2(
t)) - L2^2*M1*cos(T2(t) - T3(t))*T3pp(t) - L1*L2*M1*sin(T1(t) - T2(t))*
T1p(t)^2 - L1*L2*M2*sin(T1(t) - T2(t))*T1p(t)^2 - L1*L2*Mt*sin(T1(t) -
T2(t))*T1p(t)^2 - L1*M2*r2*sin(T1(t) - T2(t))*T1p(t)^2 - L2*M2*r3*sin(T2
(t) - T3(t))*T3p(t)^2 - L2*M1*r4*sin(T2(t) - T4(t))*T4p(t)^2 + L1*L2*M1*
cos(T1(t) - T2(t))*T1pp(t) + L1*L2*M2*cos(T1(t) - T2(t))*T1pp(t) + L1*L2
*Mt*cos(T1(t) - T2(t))*T1pp(t) + L1*M2*r2*cos(T1(t) - T2(t))*T1pp(t) -
L2*M2*r3*cos(T2(t) - T3(t))*T3pp(t) - L2*M1*r4*cos(T2(t) - T4(t))*T4pp(t
)
202 LagrangeT3(t) = I2*T3pp(t) + L2^2*M1*T3pp(t) + M2*r3^2*T3pp(t) + L2^2*M1*
sin(T2(t) - T3(t))*T2p(t)^2 - L2*M1*g*cos(T3(t)) - M2*g*r3*cos(T3(t)) -
L2^2*M1*cos(T2(t) - T3(t))*T2pp(t) + L1*L2*M1*sin(T1(t) - T3(t))*T1p(t)
^2 + L1*M2*r3*sin(T1(t) - T3(t))*T1p(t)^2 + L2*M2*r3*sin(T2(t) - T3(t))*
T2p(t)^2 + L2*M1*r4*sin(T3(t) - T4(t))*T4p(t)^2 - L1*L2*M1*cos(T1(t) -
T3(t))*T1pp(t) - L1*M2*r3*cos(T1(t) - T3(t))*T1pp(t) - L2*M2*r3*cos(T2(t)
- T3(t))*T2pp(t) + L2*M1*r4*cos(T3(t) - T4(t))*T4pp(t)
203 LagrangeT4(t) = I1*T4pp(t) + M1*r4^2*T4pp(t) - M1*g*r4*cos(T4(t)) + L1*M1*
r4*sin(T1(t) - T4(t))*T1p(t)^2 + L2*M1*r4*sin(T2(t) - T4(t))*T2p(t)^2 -
L2*M1*r4*sin(T3(t) - T4(t))*T3p(t)^2 - L1*M1*r4*cos(T1(t) - T4(t))*T1pp(
t) - L2*M1*r4*cos(T2(t) - T4(t))*T2pp(t) + L2*M1*r4*cos(T3(t) - T4(t))*
T3pp(t)
204 end
205
206 % Cálculo dos torques lineares
207 LinearT1 = T1pp*(I1 + L1^2*M1 + 2*L1^2*M2 + L1^2*Mt + M1*r1^2) + L1*T2pp*(
M2*r2 + L2*M1 + L2*M2 + L2*Mt) - L1*T3pp*(M2*r3 + L2*M1) - g*(T1 - pi/2)
*(M1*r1 + L1*M1 + 2*L1*M2 + L1*Mt) - L1*M1*T4pp*r4
208 LinearT2 = T2pp*(I2 + L2^2*M1 + L2^2*M2 + L2^2*Mt + M2*r2^2) + L1*T1pp*(M2*
r2 + L2*M1 + L2*M2 + L2*Mt) - L2*T3pp*(M2*r3 + L2*M1) - g*(T2 - pi/2)*(
M2*r2 + L2*M1 + L2*M2 + L2*Mt) - L2*M1*T4pp*r4
209 LinearT3 = T3pp*(M1*L2^2 + M2*r3^2 + I2) - L1*T1pp*(M2*r3 + L2*M1) - L2*
T2pp*(M2*r3 + L2*M1) + g*(T3 - pi/2)*(M2*r3 + L2*M1) + L2*M1*T4pp*r4
210 LinearT4 = T4pp*(M1*r4^2 + I1) - L1*M1*T1pp*r4 - L2*M1*T2pp*r4 + L2*M1*T3pp
*r4 + M1*g*r4*(T4 - pi/2)
211
212
213 %Plot dos torques
214 figure(4)
215 subplot(2,2,1)
216 plot(time, LagrangeT1) %não lineares
217 hold on
218 plot(time, LinearT1) %lineares
219 legend('calculado', 'experimental')
220 title('T Joelho Apoio')
221 legend('não linear', 'linear', 'Location', 'Southeast')
222 hold off
223

```

```

224 subplot(2,2,2)
225 plot(time,LagrangeT4) %não lineares
226 hold on
227 plot(time,LinearT4) %lineares
228 %legend('calculado','experimental')
229 title('T Joelho Balanço')
230 legend('não linear','linear','Location','Southeast')
231 hold off
232
233 subplot(2,2,3)
234 plot(time,LagrangeT2) %não lineares
235 hold on
236 plot(time,LinearT2) %lineares
237 %legend('calculado','experimental')
238 title('T Quadril Apoio')
239 legend('não linear','linear','Location','Southeast')
240 hold off
241
242 subplot(2,2,4)
243 plot(time,LagrangeT3) %não lineares
244 hold on
245 plot(time,LinearT3) %lineares
246 %legend('calculado','experimental')
247 title('T Quadril Balanço')
248 legend('não linear','linear','Location','Northeast')
249 hold off
250
251 % Posições das juntas
252 R1=[+L1.*cos(T1);+L1.*sin(T1)]; %posição do joelho de apoio
253 R2=R1+[L2.*cos(T2);L2.*sin(T2)]; %posição do quadril
254 R3=R2+[-L3.*cos(T3);-L3.*sin(T3)]; %posição do joelho de balanço
255 R4=R3+[-L4.*cos(T4);-L4.*sin(T4)]; %posição do tornozelo de balanço
256 Rt=R2+[0;rt]; %posição do cg do tronco
257
258
259 %Matrizes do sistema de equacoes diferenciais
260 M =[[ I1 + L1^2*M1 + 2*L1^2*M2 + L1^2*Mt + M1*r1^2, L1*(M2*r2 + L2*
      M1 + L2*M2 + L2*Mt), -L1*(M2*r3 + L2*M1), -L1*M1*r4 ];
261 [ L1*(M2*r2 + L2*M1 + L2*M2 + L2*Mt), I2 + L2^2*M1 + L2^2*M2 + L2
      ^2*Mt + M2*r2^2, -L2*(M2*r3 + L2*M1), -L2*M1*r4 ];
262 [ -L1*(M2*r3 + L2*M1), -L2
      *(M2*r3 + L2*M1), M1*L2^2 + M2*r3^2 + I2, L2*M1*r4 ];
263 [ -L1*M1*r4,
      -L2*M1*r4, L2*M1*r4, M1*r4^2 + I1 ] ]
264
265 %Matriz de rigidez
266 K =[[ -g*(M1*r1 + L1*M1 + 2*L1*M2 + L1*Mt),

```

```

    0,          0,          0];
267 [          0, -g*(M2*r2 + L2*M1 + L2*M2 + L2*Mt) ,
          0,          0];
268 [          0,          0,          0,          0,
g*(M2*r3 + L2*M1),          0];
269 [          0,          0,          0,          0,
          0, M1*g*r4 ]]
270
271 %Matriz de constantes
272 O =[ (g*pi*(M1*r1 + L1*M1 + 2*L1*M2 + L1*Mt))/2;
273      (pi*g*(M2*r2 + L2*M1 + L2*M2 + L2*Mt))/2;
274      -(pi*g*(M2*r3 + L2*M1))/2;
275      -(pi*M1*g*r4)/2]
276
277
278 %Jogando os torques lineares no sistema não linear
279 A=[zeros(4,4) eye(4); -inv(M)*K zeros(4,4)]
280 B=[zeros(4,5); inv(M) -inv(M)*O]
281 C=eye(8)
282 D=0
283
284
285 u=[LagrangeT1;LagrangeT2;LagrangeT3;LagrangeT4;ones(1,length(time))]
286
287
288 %solucionando o espaço de estados
289 sys = ss(A,B,C,D);
290 system = lsim(sys,u,time,[T1(1),T2(1),T3(1),T4(1),T1p(1),T2p(1),T3p(1),T4p
(1)]);
291
292 %Respostas do espaço de estados
293 LT1=system(:,1)' % ngulos de joelho de apoio
294 LT2=system(:,2)' % ngulos de quadril de apoio
295 LT3=system(:,3)' % ngulos de quadril de balanço
296 LT4=system(:,4)' % ngulos de joelho de balanço
297 LT1p=system(:,5)' %velocidade de joelho de apoio
298 LT2p=system(:,6)' %velocidade de quadril de apoio
299 LT3p=system(:,7)' %velocidade de quadril de balanço
300 LT4p=system(:,8)' %velocidade de joelho de balanço
301
302 % Posições das juntas linearizadas
303
304 LR1=[+L1.*cos(LT1);+L1.*sin(LT1)]; %posição do joelho de apoio
305 LR2=LR1+[L2.*cos(LT2);L2.*sin(LT2)]; %posição do quadril
306 LR3=LR2+[-L3.*cos(LT3);-L3.*sin(LT3)]; %posição do joelho de balanço
307 LR4=LR3+[-L4.*cos(LT4);-L4.*sin(LT4)]; %posição do tornozelo de balanço
308 LRt=LR2+[0;rt]; %posição do cg do tronco

```

```

309
310
311 % Plot da pessoa andando
312 figure(5)
313 subplot(2,1,1)
314 for i=1:4:n
315     %clf
316     plot([0,R1(1,i)],[0,R1(2,i)])
317     hold on
318     plot([R2(1,i),R1(1,i)],[R2(2,i),R1(2,i)])
319     plot([R2(1,i),R3(1,i)],[R2(2,i),R3(2,i)])
320     plot([R4(1,i),R3(1,i)],[R4(2,i),R3(2,i)])
321     plot([Rt(1,i),R2(1,i)],[Rt(2,i),R2(2,i)])
322     %pause(0.01)
323 end
324 %axis([min(R4),1,-0.1,1.1])
325 title("Movimento Teórico","fontsize",15)
326 xlabel("x [m]","fontsize",12)
327 ylabel("y [m]","fontsize",12)
328
329 subplot(2,1,2)
330 for i=1:4:n-12
331     %clf
332     plot([0,LR1(1,i)],[0,LR1(2,i)])
333     hold on
334     plot([LR2(1,i),LR1(1,i)],[LR2(2,i),LR1(2,i)])
335     plot([LR2(1,i),LR3(1,i)],[LR2(2,i),LR3(2,i)])
336     plot([LR4(1,i),LR3(1,i)],[LR4(2,i),LR3(2,i)])
337     plot([LRt(1,i),LR2(1,i)],[LRt(2,i),LR2(2,i)])
338     %pause(0.01)
339 end
340 %axis([min(LR4),max(LR4),-0.1,1.1])
341 title("Movimento Linearizado","fontsize",15)
342 xlabel("x [m]","fontsize",12)
343 ylabel("y [m]","fontsize",12)
344 hold off
345
346
347
348 %plot dos angulos e velocidades angulares do espaço de estados
349 figure(7)
350 subplot(4,2,1)
351 hold on
352 plot(time,rad2deg(system(:,1)))
353 plot(time,rad2deg(T1))
354 title(' ngulo do Joelho apoio')
355 legend({'linearizado','teorico'},'Location','Southwest')

```

```

356 axis([0, time(n), 60, 110])
357 xlabel('tempo[s]')
358 ylabel('angulo[ ]')
359
360
361 subplot(4,2,2)
362 hold on
363 plot(time, system(:,5))
364 plot(time, T1p)
365 title('Velocidade angular do Joelho apoio')
366 axis([0, time(n), min(min(system(:,5)), min(T1p)), max(max(system(:,5)), max(
    T1p))])
367 xlabel('tempo[s]')
368 ylabel('vel ang[ /s]')
369 axis([0, time(n), -10, 10])
370 legend({'linearizado', 'teorico'}, 'Location', 'Southwest')
371
372 subplot(4,2,3)
373 hold on
374 plot(time, rad2deg(system(:,2)))
375 plot(time, rad2deg(T2))
376 title(' ngulo do Quadril apoio')
377 xlabel('tempo[s]')
378 ylabel('angulo[ ]')
379 axis([0, time(n), 80, 130])
380 legend('linearizado', 'teorico')
381
382 subplot(4,2,4)
383 hold on
384 plot(time, system(:,6))
385 plot(time, T2p)
386 title('Velocidade angular do Quadril apoio')
387 axis([0, time(n), min(min(system(:,6)), min(T2p)), max(max(system(:,6)), max(
    T2p))])
388 xlabel('tempo[s]')
389 ylabel('vel ang[ /s]')
390 axis([0, time(n), -10, 10])
391 legend({'linearizado', 'teorico'}, 'Location', 'Southwest')
392
393 subplot(4,2,5)
394 hold on
395 plot(time, rad2deg(system(:,3)))
396 plot(time, rad2deg(T3))
397 title(' ngulo do Quadril Balanço')
398 xlabel('tempo[s]')
399 ylabel('angulo[ ]')
400 axis([0, time(n), 80, 130])

```

```

401 legend('linearizado','teorico')
402
403 subplot(4,2,6)
404 hold on
405 plot(time,system(:,7))
406 plot(time,T3p)
407 title('Velocidade angular do Quadril Balanço')
408 axis([0,time(n),min(min(system(:,7)),min(T3p)),max(max(system(:,7)),max(
    T3p)))]
409 xlabel('tempo[s]')
410 ylabel('vel ang[ /s]')
411 axis([0,time(n),-10,10])
412 legend({'linearizado','teorico'},'Location','Southwest')
413
414 subplot(4,2,7)
415 hold on
416 plot(time,rad2deg(system(:,4)))
417 plot(time,rad2deg(T4))
418 title(' ngulo do Joelho Balanço')
419 xlabel('tempo[s]')
420 ylabel('angulo[ ]')
421 axis([0,time(n),20,115])
422 legend({'linearizado','teorico'},'Location','Southwest')
423
424 subplot(4,2,8)
425 hold on
426 plot(time,system(:,8))
427 plot(time,T4p)
428 title('Velocidade angular do Joelho Balanço')
429 axis([0,time(n),min(min(system(:,8)),min(T4p)),max(max(system(:,8)),max(
    T4p)))]
430 xlabel('tempo[s]')
431 ylabel('vel ang[ /s]')
432 axis([0,time(n),30,120])
433 axis([0,time(n),-10,10])
434 legend({'linearizado','teorico'},'Location','Southwest')

```