

Nicolle F. Hyppolito, Ricardo D. Libertucci, Rudson Guilherme P. de Camargo,
Vitória M. Campos.

Modelagem de um sistema dinâmico - Veículo aéreo não tripulado

Brasil

2020

Nicolle F. Hyppolito, Ricardo D. Libertucci, Rudson Guilherme P. de Camargo,
Vitória M. Campos.

Modelagem de um sistema dinâmico - Veículo aéreo não tripulado

Relatório de Modelagem de um quadricóptero
para a disciplina PME3380- Modelagem de
Sistemas Mecânicos da Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo

Universidade de São Paulo

Escola Politécnica

PME3380 Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Orientador: Decio Crisol Donha, Agenor de Toledo Fleury

Brasil

2020

Resumo

Este trabalho busca modelar o movimento de um quadricóptero seguindo hipóteses simplificadoras escolhidas com o objetivo de facilitar a criação do modelo sem mantendo contato com o comportamento real do drone, além de aplicar uma restrição de ação no plano XZ para reduzir os graus de liberdade do veículo e viabilizar sua simulação. Os modelos físicos e matemáticos abrangem o aspecto geral de qualquer quadrimotor e são utilizados como base para o estudo do movimento desejado, sendo aplicadas as condições de contorno somente depois de equacionar todos os fatores relevantes ao movimento do veículo. Para o modelo físico foi utilizada a configuração geométrica em “mais” na qual uma massa concentrada em cada um dos motores e uma no centro de massa do drone. Já no modelo matemático foi imposto dois sistemas de referência, um inercial preso à terra e outro solidário ao corpo do veículo para contemplar todos os seus movimentos, deste modo foi possível utilizar os teoremas de momento e criar uma relação matemática entre os dois referenciais. Para fins de simulação é vantajoso realizar a linearização das equações mantendo um modelo coerente com a realidade e exigindo o mínimo possível de recursos computacionais. Após a linearização foi encontrada as matrizes planta e das entradas do sistema, estas foram utilizadas para fazer as simulações e gerar os gráficos. Por fim, a matriz planta foi utilizada pra encontrar as funções de transferência para representar o sistema no domínio das frequências, gerar

Palavras-chave: Quadricóptero; modelagem; modelo; movimento; simulação.

Abstract

This work seeks to model the movement of a quadcopter following simplifying hypotheses chosen in order to facilitate the creation of a model without maintaining contact with the actual behavior of the drone, in addition to applying an action constraint on the XZ plane to reduce the vehicle's degrees of freedom and make your simulation feasible. The physical and mathematical models cover the general aspect of any four-engine and are used as a basis for the study of the desired movement, with the boundary conditions being applied only after considering all the factors relevant to the movement of the vehicle. For the physical model, the geometric configuration in "plus" was used, in which there is one mass in each of the four engines and another in the drone's center of mass. In the mathematical model, two reference systems were imposed, an inertial one attached to the ground and the other attached to the vehicle body to contemplate all of the VANT's movements. This way it was possible to use the theorems of the moment and create a mathematical relations between the two references. For the simulation of this movement, it is essential to perform a linearization of the equations to represent a model consistent with reality, but in order to require the least possible computational resources, following these precautions it was possible to generate and analyze graphs that represent the complex system of a quadcopter.

Keywords: Quadricopter; modeling; model; movement; simulation

Lista de ilustrações

Figura 1 – Quadricópteros com configurações em + e em X	15
Figura 2 – Esquema de massas de um Quadricóptero	15
Figura 3 – Sistemas de coordenadas	16
Figura 4 – Ângulos de Euler	16
Figura 5 – Diagrama de blocos motor CC	24
Figura 6 – Casos estudados na simulação	33
Figura 7 – Posição do drone no caso 1	34
Figura 8 – Velocidade linear do drone no caso 1	35
Figura 9 – Posição angular (θ) no caso 1	35
Figura 10 – Velocidade angular (q) no caso 1	36
Figura 11 – Posição do drone no caso 2	37
Figura 12 – Velocidade linear do Drone no caso 2	38
Figura 13 – Posição angular (θ) no caso 2	38
Figura 14 – Velocidade angular (q) no caso 2	39
Figura 15 – Posição do drone no caso 3	40
Figura 16 – Velocidade linear do Drone no caso 3	41
Figura 17 – Posição angular (θ) no caso 3	41
Figura 18 – Velocidade angular (q) no caso 3	42
Figura 19 – Posição do drone no caso 4	43
Figura 20 – Velocidade linear do Drone no caso 4	44
Figura 21 – Posição angular (θ) no caso 4	44
Figura 22 – Velocidade angular q no caso 4	45
Figura 23 – Entrada U2 saída x	46
Figura 24 – Entrada U4 saída x	47
Figura 25 – Entrada U saída z	47
Figura 26 – Entrada U2 saída u	48
Figura 27 – Entrada U4 saída u	48
Figura 28 – Entrada U saída w	49
Figura 29 – Entrada U2 saída θ	49
Figura 30 – Entrada U4 saída θ	50
Figura 31 – Entrada U2 saída q	50
Figura 32 – Entrada U4 saída q	51

Lista de Siglas

VANT Veículo aéreo não tripulado

Lista de Símbolos

- A – Matriz planta
 A_p – Área projetada (m^2)
B – Matriz de entrada
b – parâmetro de empuxo
C – Matriz de saída
 c_P – coeficiente de potência
 c_T – coeficiente de empuxo
d – parâmetro de arrasto da hélice
 f_A – Força de arrasto (N)
 f_C – Força resultante (N)
 f_R – Força de empuxo gerada pelos rotores (N)
 f_x – Força no eixo x (N)
 f_y – Força no eixo y (N)
 f_z – Força no eixo z (N)
g – aceleração da gravidade ($\frac{m}{s^2}$)
 g_g – momento giroscópico causado pelos rotores
 F_A – Força de arrasto (N)
 f_{ax} – Força de arrasto em x (N)
 f_{ay} – Força de arrasto em y (N)
 f_{az} – Força de arrasto em z (N)
 i_a – corrente de armadura (A)
 I_x – primeiro termo da diagonal principal da matriz de inércia do quadricóptero ($kg \cdot m^2$)
 I_y – segundo termo da diagonal principal da matriz de inércia do quadricóptero ($kg \cdot m^2$)
 I_z – terceiro termo da diagonal principal da matriz de inércia do quadricóptero ($kg \cdot m^2$)
 K_{motor} – constante do motor dada [rad/s.V]
 K_{torque} – constante de torque
 $K_{hélice}$ – constante das hélices
l – distancia entre o centro do veículo e os motores (M)
 m_c – momento total aplicado ao corpo (N.m)
m – massa do corpo (Kg)
 O_{xyz} – Referencial fixo ao corpo
 O_{XYZ} – Referencial fixo à terra
 P_C – Força peso (N)
 P_{motor} – Potencia gerada (W)
p – velocidade angular em relação ao referencial fixo ao corpo no eixo x ($\frac{rad}{s}$)

\dot{p} – aceleração angular em relação ao referencial fixo ao corpo no eixo x $\left(\frac{rad}{s^2}\right)$
 q – velocidade angular em relação ao referencial fixo ao corpo no eixo y $\left(\frac{rad}{s}\right)$
 \dot{q} – aceleração angular em relação ao referencial fixo ao corpo no eixo y $\left(\frac{rad}{s^2}\right)$
 r – velocidade angular em relação ao referencial fixo ao corpo no eixo z $\left(\frac{rad}{s}\right)$
 \dot{r} – aceleração angular em relação ao referencial fixo ao corpo no eixo z $\left(\frac{rad}{s^2}\right)$
 r_H – raio da hélice (m)
 $R_x(\Phi)$ – matriz rotação em torno do eixo x
 $R_y(\theta)$ – matriz rotação em torno do eixo y
 $R_z(\psi)$ – matriz rotação em torno do eixo z
 $R_{zyx}(\phi, \theta, \psi)$ – matriz transformação do referencial fixo ao corpo em relação ao referencial fixo a terra
 T – Matriz para transformações angulares
 T_{motor} – Torque do rotor
 u – vetor de velocidades lineares no referencial fixo ao corpo $\left(\frac{m}{s}\right)$
 \dot{u} – vetor de acelerações lineares no referencial fixo ao corpo $\left(\frac{m}{s^2}\right)$
 v – vetor de velocidades lineares no referencial fixo ao corpo $\left(\frac{m}{s}\right)$
 \dot{v} – vetor de acelerações lineares no referencial fixo ao corpo $\left(\frac{m}{s^2}\right)$
 V_{motor} – Tensão nos terminais do motor
 w – vetor de velocidades lineares $\left(\frac{m}{s}\right)$
 \dot{w} – vetor de acelerações lineares $\left(\frac{m}{s^2}\right)$
 x – Vetor de estados
 x – posição no eixo x do referencial fixo à terra
 \dot{x} – derivada do vetor de estados
 \dot{x} – velocidade no eixo x do referencial fixo à terra $\left(\frac{m}{s}\right)$
 y – posição no eixo y do referencial fixo à terra
 \dot{y} – velocidade no eixo y do referencial fixo à terra $\left(\frac{m}{s}\right)$
 z – posição no eixo z do referencial fixo à terra
 \dot{z} – velocidade no eixo z do referencial fixo à terra $\left(\frac{m}{s}\right)$
 ρ – densidade do ar local $\frac{kg}{m^3}$
 τ_C – torque aplicado ao corpo ($N.m$)
 τ_x – torque aplicado ao eixo x ($N.m$)
 τ_{V_x} – torque da força do vento aplicado ao eixo x ($N.m$)
 τ_y – torque aplicado ao eixo y ($N.m$)
 τ_{V_y} – torque da força do vento aplicado ao eixo y ($N.m$)
 τ_z – torque aplicado ao eixo z ($N.m$)
 τ_{V_z} – torque da força do vento aplicado ao eixo z ($N.m$)
 θ – ângulo de arfagem (rad)
 $\dot{\theta}$ – velocidade de arfagem $\left(\frac{rad}{s}\right)$
 φ - ângulo de rolagem (rad)

$\dot{\varphi}$ – velocidade de rolagem ($\frac{rad}{s}$)

ψ – ângulo de guinada (rad)

$\dot{\psi}$ – velocidade de guinada ($\frac{rad}{s}$)

ω – velocidade angular de um motor ($\frac{rad}{s}$)

Ω_1 – velocidade angular do motor 1 ($\frac{rad}{s}$)

Ω_2 – velocidade angular do motor 2 ($\frac{rad}{s}$)

Ω_3 – velocidade angular do motor 3 ($\frac{rad}{s}$)

Ω_4 – velocidade angular do motor 4 ($\frac{rad}{s}$)

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Contexto	11
1.2	Objetivos do trabalho	11
1.3	Justificativas da escolha do tema	11
1.4	Revisão Bibliográfica	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
2.1	Movimentos estudados	13
2.2	Hipóteses Simplificadoras	13
2.3	Movimento de translação no plano XZ	14
3	MODELAGEM FÍSICA DO SISTEMA	15
3.1	Geometria e distribuição de massa de um drone	15
4	MODELAGEM DINÂMICA DO QUADRICÓPTERO	16
4.1	Sistemas de coordenadas	16
4.2	Matrizes de rotação e transformação	16
4.3	Equações do movimento	18
5	ESPAÇO DE ESTADOS	22
5.1	Variáveis de estado	22
5.2	Equações de movimento	22
6	LINEARIZAÇÃO	24
6.1	Parâmetros	24
6.1.1	Motor	24
6.1.2	Hélice	25
6.1.3	Quadricóptero	25
6.1.4	Matriz de inércia	26
6.2	Matriz de Estados e de Entrada	27
7	DOMÍNIO DAS FREQUÊNCIAS	32
7.1	Função Transferência	32
7.1.1	Polos e estabilidade	32
8	SIMULAÇÃO	33
8.1	Análise da resposta no domínio do tempo	34

8.2	Análise da resposta no domínio da frequência	46
9	CONCLUSÃO	52
	REFERÊNCIAS	53
10	APÊNDICE	54

1 Introdução

1.1 Contexto

O tempo de locomoção de objetos e pessoas sempre foi um fator determinante para o desenvolvimento de novas tecnologias. Como os meios de transporte terrestres enfrentam vários obstáculos, como barreiras naturais, o transporte aéreo veio para driblar alguns dos problemas e otimizar o tempo.

O transporte aéreo movimentava pessoas e mercadorias pelo ar com a utilização de aviões, balões, dirigíveis ou helicópteros, conectando hemisférios em poucas horas. Nessa classe estão incluídos os veículos aéreos não tripulados (VANT), também conhecidos como drones, que são todo tipo de aeronave que pode ser controlada nos 3 eixos e que não necessita de pilotos embarcados para ser guiada (DECEA, 2010), tal veículo, vem se tornando mais importante, conforme novas aplicações estão sendo descobertas.

Sua utilização na área médica já foi efetuada para o transporte de kits de primeiros socorros para pessoas em situações de emergência. Também já existem serviços de entrega de encomendas feitos por drones.

Também, a capacidade de capturar imagens de vários pontos de vista faz com que eles sejam usados, aliados de câmeras de alta resolução, para a geração de mapas de áreas que podem ter aplicações desde fiscalização ambiental até para a agricultura.

Como o custo de produção desse tipo de veículo é baixo, comparado a outros meios de mesma função, ele está ganhando cada vez mais atenção e os usos que estão sendo encontrados se mostram muitas vezes mais eficientes que os meios comuns por conta da capacidade dos drones de transportar pequenas cargas rapidamente.

1.2 Objetivos do trabalho

Este trabalho tem como objetivo modelar o movimento de um veículo aéreo não tripulado (VANT), utilizar os dados encontrados para simular o voo do plano escolhido no *software* público Scilab e analisar os resultados obtidos na simulação..

1.3 Justificativas da escolha do tema

Analisando as possíveis aplicações para o VANT, pode-se perceber a importância de modelar seu funcionamento com fim de aprimorar o controle deles, já que todas as suas aplicações dependem diretamente da precisão com que eles podem ser controlados.

1.4 Revisão Bibliográfica

(CAVALLARO, 2019) O trabalho contempla a modelagem e simulação de um veículo não tripulado, partindo das hipóteses simplificadoras, demonstra os modelos físicos e matemáticos necessários para a representar um quadrimotor, demonstrando as equações de movimento, suas simplificações e linearização, por fim, partindo da tensão em cada motor compila uma simulação exposta e gráficos.

(SABATINO, 2015) O trabalho utiliza as leis de Newton Euler para fazer a modelagem matemática de um quadrimotor, apresentando as equações gerais de movimento representadas utilizando dois sistemas de referências, um inercial na terra e outro preso no corpo do veículo, posteriormente foi feita a linearização do movimento utilizando hipóteses plausíveis, por fim, a simulação e controle do VANT é apresentado.

(DOMINGUES, 2009) Apresenta conceitos importantes sobre o funcionamento de um quadricóptero e os recursos necessários para a modelagem de um protótipo, além de apresentar equações matemáticas que representam o movimento completo do veículo, consegue explicar de forma clara os componentes necessários para um bom estudo do VANT.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Movimentos estudados

Para descrever a estrutura e a posição de um VANT deve-se especificar quais coordenadas de referências serão usadas, de forma a abranger todos os movimentos do veículo para que seja válida a escolha de uma restrição que será estudada para representar o movimento geral de um drone.

No presente estudo, foram utilizados dois sistemas de referência: o inercial, fixo a terra, com os vetores direcionados para o centro da Terra, Norte e leste; e o móvel, fixo no centro de gravidade do quadrotor, além de criar uma relação matemática capaz de relacionar pontos nos dois tipos de bases de referência.

2.2 Hipóteses Simplificadoras

Sabendo que o movimento de um quadricóptero possui 6 graus de liberdade e proporciona um sistema de ordem 12 devemos considerar algumas hipóteses simplificadoras para tornar viável o estudo desse tipo de veículo. Abaixo estão listadas algumas das considerações feitas para realização do trabalho.

- **Estrutura do quadricóptero:** Para o equacionamento foi considerado o quadricóptero como um corpo rígido;
- **Variação da gravidade:** Foi considerado que a variação de altura do drone não seria suficiente para provocar uma variação considerável no valor da gravidade por esse motivo ela foi dada como constante.
- **Geometria:** Para facilitar o equacionamento do sistema foi considerado que o centro de gravidade coincide com o centro geométrico, além de que a distribuição de massa nos eixos horizontais que passam pelo centro geométrico é simétrica, simplificando os cálculos que envolvem matriz de inercia e torques.
- **Força de arrasto e força do vento:** Ambas aplicadas no centro geométrico do veículo, de forma a desconsiderar os fatores de torque.
- **Massa desprezível:** Com exceção do corpo principal e dos motores todos os outros elementos do quadricóptero tem massas desprezíveis

2.3 Movimento de translação no plano XZ

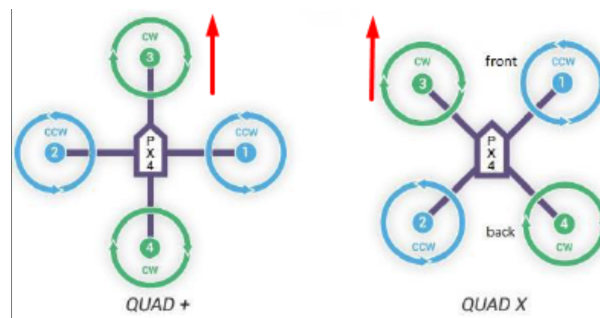
Para diminuir a ordem do sistema a ser estudado foi feita uma restrição de movimento ao drone, de forma a possibilitar somente uma translação no plano XZ e possibilitar a modelagem de um certo tipo de movimento do quadricóptero que representara o veículo, como consequência foi alcançado um equacionamento de ordem 6.

3 Modelagem física do sistema

3.1 Geometria e distribuição de massa de um drone

A geometria dos drones varia de acordo com seu número de hélices e rotores. Para os quadrotoros que serão utilizados neste trabalho, tinham-se duas opções de configuração: em X e em +, como mostrado na figura 1:

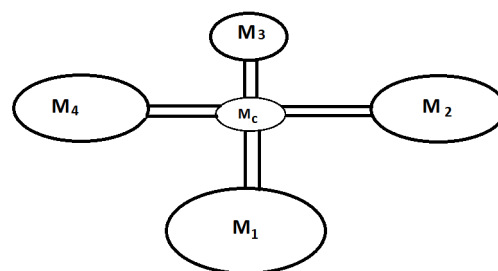
Figura 1 – Quadricópteros com configurações em + e em X



Fonte: <https://www.filipeflop.com/blog/o-que-e-como-funciona-um-drone/> (dps ponho direito)

Utilizando o drone em +, a distribuição de massa foi feita seguindo a Figura 2, com quatro massas pontuais localizadas na extremidade do braço e uma massa no centro de gravidade do drone:

Figura 2 – Esquema de massas de um Quadricóptero



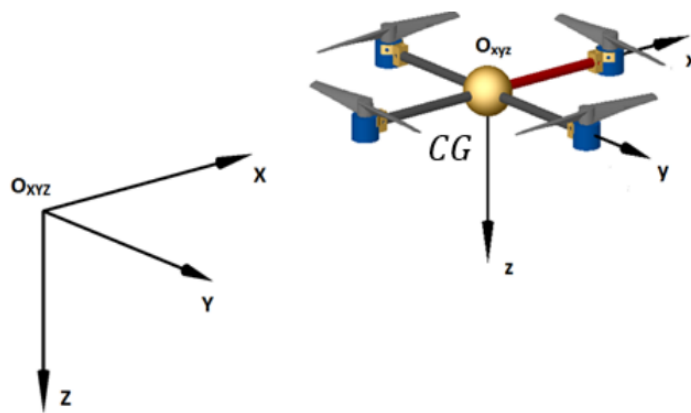
Fonte: Autores

4 Modelagem dinâmica do quadricóptero

4.1 Sistemas de coordenadas

Para a modelagem do quadricóptero, é necessário definir dois sistemas de coordenadas: um sistema fixo ao corpo O_{xyz} com seu centro de origem coincidente com o centro de gravidade e outro sistema inercial fixo à terra O_{XYZ} .

Figura 3 – Sistemas de coordenadas

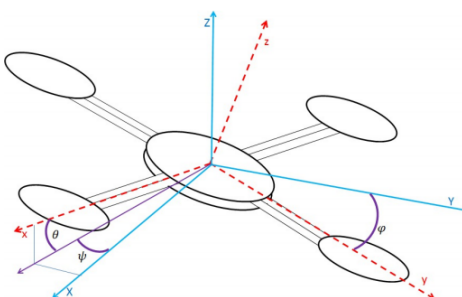


Fonte: Cavallaro(2019)

4.2 Matrizes de rotação e transformação

A orientação de um corpo rígido em um espaço euclidiano pode ser descrita utilizando diferentes métodos mas para esse estudo foi escolhido os ângulos de Euler na convenção de rotação z-y-x. Os ângulos de Euler são os ângulos ψ , ϕ e θ da figura 4 a seguir.

Figura 4 – Ângulos de Euler



Fonte: Sabatino(2015)

O método consiste em três rotações sucessivas do corpo em torno dos eixos de coordenadas. A rotação em torno de cada eixo é dada por:

- **Matriz rotação em torno de eixo z:**

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} c(\psi) & -s(\psi) & 0 \\ s(\psi) & c(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

- **Matriz rotação em torno de eixo y:**

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} c(\theta) & 0 & s(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(\theta) & 0 & c(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

- **Matriz rotação em torno de eixo x:**

$$R_x(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & s(\phi) & c\phi \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

Sendo assim, multiplicando as matrizes rotações em torno do eixo z, y e x, respectivamente, ficamos com a seguinte matriz transformação que descreve a rotação do referencial fixo ao corpo em relação ao referencial inercial fixo a terra:

$$R_{zyx}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\psi - s\psi c\phi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\varphi \\ s\psi c\theta & s\psi s\theta s\varphi + c\psi c\phi & s\psi s\theta c\phi - s\phi c\psi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

A associação entre as velocidades angulares em relação ao referencial fixo e as velocidades angulares em relação aos referencial móvel é dada por:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = R(\varphi) \cdot R(\theta) \cdot R(\psi) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + R(\varphi) \cdot R(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

Desenvolvendo a equação ficamos com:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\varphi & s\varphi \cdot c\theta \\ 0 & -s\varphi & c\theta \cdot c\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

Isolando o vetor das derivadas dos ângulos de Euler, fazendo $t=\tan$, ficamos com a seguinte matriz para transformações angulares:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & s(\phi)t(\theta) & c(\phi)t(\theta) \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & \frac{s(\phi)}{c(\theta)} & \frac{c(\phi)}{c(\theta)} \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

4.3 Equações do movimento

Para o problema estudado são definidas as variáveis de estado os ângulos de Euler ϕ , θ e ψ e as posições x , y e z são em relação ao referencial inercial fixo à terra e as velocidades lineares u , v e w e as velocidades angulares p , q e r são dadas em relação ao referencial móvel fixo ao corpo. A relação entre os dois referencial é dado pela matriz rotação R e pela matriz T construídas anteriormente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} v &= R \cdot v_C \\ \omega &= T \cdot \omega_C \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

$$\text{Sendo } v = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T, \omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T, v_C = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T \text{ e } \omega_C = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$$

Desenvolvendo as equações com as matrizes anteriormente construídas, ficamos com o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{x} = w[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\phi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)] \\ \dot{y} = v[c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)] \\ \dot{z} = w[c(\phi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\phi)] \\ \dot{\phi} = p + r[c(\phi)t(\theta)] + q[s(\phi)t(\theta)] \\ \dot{\theta} = q[c(\phi)] - r[s(\phi)] \\ \dot{\psi} = r\frac{c(\phi)}{c(\theta)} + q\frac{s(\phi)}{c(\theta)} \end{cases} \quad (4.3.2)$$

O teorema do movimento do baricentro para um referencial não inercial é dado por:

$$f_C = \frac{d}{dt} [m \cdot v_C]_{CG} + \omega_C^T \times [m \cdot v_C]_{CG} \quad (4.3.3)$$

Sendo m a massa do Drone, \times o produto vetorial e f_C a força resultante dada por:

$$f_C = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

Desenvolvendo o teorema ficamos com:

$$f_C = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \left\{ \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right\} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \left\{ \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \cdot w - q \cdot u \\ u \cdot r - r \cdot v \\ p \cdot v - p \cdot w \end{bmatrix} \right\} \quad (4.3.6)$$

A força resultante f_C , que age no quadricóptero, é dada por:

$$f_C = P_C + F_R - F_A \quad (4.3.7)$$

Sendo P_C a força peso, F_R a força empuxo gerada pelos rotores, F_A a força de arrasto do ar sobre o drone, todas as forças em relação ao referencial móvel fixo ao drone. A força peso em relação a referencial móvel é dada por:

$$P_C = R_{zyx}(\phi, \theta, \psi)^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = mg \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4.3.8)$$

A força empuxo F_R é dada pela soma de do empuxo gerado em cada rotor:

$$F_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \end{bmatrix} \quad (4.3.9)$$

Segundo (CAVALLARO, 2019) a força de arrasto que atua sob a aeronave é dada por:

$$F_A = \begin{bmatrix} f_{ax} \\ f_{ay} \\ f_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_P \cdot C_A \cdot u^2 \\ \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_P \cdot C_A \cdot v^2 \\ \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_P \cdot C_A \cdot w^2 \end{bmatrix} \quad (4.3.10)$$

Substituindo as equações 4.3.8,4.3.9,4.3.10 na equação 4.3.7 ficamos com:

$$f_C = mg \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{ax} \\ f_{ay} \\ f_{az} \end{bmatrix} \quad (4.3.11)$$

Substituindo a equação 4.3.11 na equação proveniente do teorema do baricentro 4.3.6, ficamos com:

$$m g \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{ax} \\ f_{ay} \\ f_{az} \end{bmatrix} = m \left\{ \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \end{bmatrix} \right\} \quad (4.3.12)$$

Desenvolvendo essa equação matricial ficamos com o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} -mg[s(\theta)] - f_{ax} = m(\dot{u} + qw - rv) \\ mg[c(\theta)s(\phi)] - f_{ay}v = m(\dot{v} - pw + ru) \\ mg[c(\theta)c(\phi)] - f_{az}w - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = m(\dot{w} + pv - qu) \end{cases} \quad (4.3.13)$$

Como o eixo móvel fixo ao corpo foi convenientemente colocado no centro de massa coincidente com os eixos principais de inércia, pode-se aplicar as equações de Euler para chegar no torque aplicado ao drone, da forma:

$$I \cdot \dot{\omega}_c + \omega_c \wedge (I \cdot \omega_c) = \tau_c \quad (4.3.14)$$

Onde I é a matriz diagonal com os momentos de inércia nos eixos principais $I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$ e $\tau_c = [\tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]^T$ é o torque aplicado ao corpo, se a equação for expandida, chega-se em:

$$\begin{cases} \tau_x = I_x \dot{p} + (I_z - I_y) qr \\ \tau_y = I_y \dot{q} + (I_x - I_z) pr \\ \tau_z = I_z \dot{r} + (I_y - I_x) pq \end{cases} \quad (4.3.15)$$

De maneira geral os momentos externos podem ser descritos como a equação 4.3.16, porem utilizando como hipótese simplificadora que o momento giroscópico (g_g) causado pelos rotores não possui influência significativa sobre o torque total podemos chegar na equação 4.3.17.

$$m_c = \tau_C - g_g + \tau_V \quad (4.3.16)$$

$$\begin{aligned} \tau_x + \tau_{Vx} &= \dot{p}I_x - qrI_y + prI_z \\ \tau_y + \tau_{Vy} &= \dot{q}I_y + prI_x - pqI_z \\ \tau_z + \tau_{Vz} &= \dot{r}I_z - pqI_x + prI_y \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Podemos descrever a forças e os torques causados pelos rotores do quadricóptero usando a velocidade angular de cada rotor como parâmetro de entrada além do parâmetro de empuxo b descrita na equação 4.3.18, o parâmetro de arrasto da hélice d descrita pela equação 4.3.19 e a distancia l entre o centro do veiculo e os motores.

$$b = c_T \cdot \frac{4 \cdot \rho \cdot r_H^4}{\pi^2} \quad (4.3.18)$$

$$d = \frac{c_P \cdot r_H}{c_T \cdot \pi} \quad (4.3.19)$$

Sendo c_T o coeficiente de empuxo, c_P o coeficiente de potência e r_H o raio da hélice.

$$\begin{cases} f_R = b (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ \tau_x = bl (\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ \tau_y = bl (\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ \tau_z = d (\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{cases} \quad (4.3.20)$$

Rearranjando as equações de torque ficamos com o seguinte sistema, onde podemos observar uma clara relação entre os torques de cada motor com a analogia a segunda lei de Newton utilizando momentos de inercia e acelerações angulares.

$$\begin{cases} bl (\Omega_3^2 - \Omega_1^2) + \tau_{Vx} = \dot{p}I_x - qrI_y + qrI_z \\ bl (\Omega_4^2 - \Omega_2^2) + \tau_{Vy} = \dot{q}I_y + prI_x - prI_z \\ d (\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) + \tau_{Vz} = \dot{r}I_z - pqI_x + pqI_y \end{cases} \quad (4.3.21)$$

5 ESPAÇO DE ESTADOS

Para representar um modelo físico em um matemático é necessário o uso de espaço de estados. Um modelo físico é composto por um conjunto de variáveis de entrada, de saída e de estado relacionadas entre si por meio de equações diferenciais de primeira ordem.

5.1 Variáveis de estado

A partir de variáveis de estado e de suas derivadas, pode-se formar um sistema linear capaz de representar o sistema em qualquer ponto. Variáveis de estado são o menor número de variáveis que conseguem representar todo o estado em qualquer momento.

Para esta modelagem foi usado o seguinte vetor de estados 5.1.1:

$$x = [x \ y \ z \ u \ v \ w \ \phi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r]^T \quad (5.1.1)$$

$$\dot{x} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{u} \ \dot{v} \ \dot{w} \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} \ \dot{p} \ \dot{q} \ \dot{r}]^T \quad (5.1.2)$$

5.2 Equações de movimento

Seguindo a sequência do vetor apresentado em 5.1.1, pode ser escrito o espaço de estados do modelo estudado neste trabalho da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = w[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\phi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)] \\ \dot{y} = v[c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)] \\ \dot{z} = w[c(\phi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\phi)] \\ \dot{\phi} = p + r[c(\phi)t(\theta)] + q[s(\phi)t(\theta)] \\ \dot{\theta} = q[c(\phi)] - r[s(\phi)] \\ \dot{\psi} = r \frac{c(\phi)}{c(\theta)} + q \frac{s(\phi)}{c(\theta)} \\ \dot{u} = -g[s(\theta)] - \frac{f_{ax}}{m} - qw + rv \\ \dot{v} = g[c(\theta)s(\phi)] - \frac{f_{ay}}{m} + pw - ru \\ \dot{w} = g[c(\theta)c(\phi)] - \frac{f_{az}}{m} - \frac{b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)}{m} - pv + qu \\ \dot{p} = \frac{bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}{I_x} + \frac{qr(I_y - I_z)}{I_x} \\ \dot{q} = \frac{bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2)}{I_y} + \frac{pr(I_z - I_x)}{I_y} \\ \dot{r} = \frac{d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)}{I_z} + \frac{pq(I_x - I_y)}{I_z} \end{array} \right. \quad (5.2.1)$$

Reescrevendo a as variáveis do espaço de estados X , substituindo na equação 5.2.1 e considerando a hipótese de pequenas oscilações, na qual podem ser adotados $\cos(k) = 1$ e $\text{sen}(k) = k$, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w[\phi\psi + \theta] - v[\psi - \phi\theta] + u \\ v[1 + \phi\psi\theta] - w[\phi - \psi\theta] + u\psi \\ w - u\theta + v\phi \\ -g\theta - \frac{f_{ax}}{m} - qw + rv \\ g\phi - \frac{f_{ay}}{m} + pw - ru \\ g - \frac{f_{az}}{m} - \frac{b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)}{m} - pv + qu \\ p + r\theta + q[\phi\theta] \\ q - r\phi \\ r + q\phi \\ \frac{bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}{I_x} + \frac{(qr(I_y - I_z))}{I_x} \\ \frac{bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2)}{I_y} + \frac{(pr(I_z - I_x))}{I_y} \\ \frac{d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)}{I_z} + \frac{(pq(I_x - I_y))}{I_z} \end{bmatrix} \quad (5.2.2)$$

6 LINEARIZAÇÃO

6.1 Parâmetros

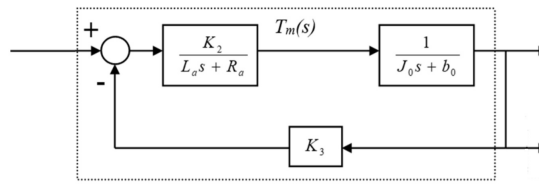
6.1.1 Motor

Geralmente, em drones, são utilizados motores de corrente contínua sem escovas, também chamados de BLDC, pois são motores mais leves e menores, que entregam alta potência e alta relação potência-volume.

Estes motores são constituídos de ímãs permanentes ligados a um eixo ou um cilindro rotativo, que são empurrados e/ou puxados por campos eletromagnéticos dos enrolamentos elétricos que, por sua vez, são gerenciados por um controlador eletrônico de velocidade. (KALATEC, 2020)

Para representar o motor, tem-se na Figura 5 o modelo de um motor de corrente contínua pelo diagrama de blocos:

Figura 5 – Diagrama de blocos motor CC



Fonte: Edisciplinas - PMR3409

Para relacionar a tensão nos terminais do motor CC controlado pela armadura, V_{motor} , com a velocidade angular ω , utilizamos a seguinte equação:

$$\omega = K_{motor} * V_{motor} \quad (6.1.1)$$

Sendo K_{motor} a constante do motor, dada em $[rad/s.V]$.

O torque do rotor é dado pelo campo magnético gerado pelas correntes da bobina do estator, sendo proporcional ao fluxo concatenado e à corrente de fase média (BASAM; KUMAR, 2010), assim o torque gerado pelo motor é dado pela equação 6.1.2:

$$T_{motor} = K_{torque} * i_a \quad (6.1.2)$$

Sendo i_a a corrente de armadura e k_{torque} a constante de torque. E a potência gerada é:

$$P_{motor} = T_{motor} * \omega = K_{torque} * i_a * \omega \quad (6.1.3)$$

Para calcular a função de transferência desconsideramos a indutância da armadura, pois é bastante pequena, então:

$$G_\omega(s) = \frac{\Omega_T(s)}{E_v(s)} = \frac{K_1 K_2 K_T}{R_a(J_o s + b_o) + K_2 K_3} \quad (6.1.4)$$

Rearranjando a função para um motor CC, ficamos com:

$$G_\omega(s) = \frac{\Omega_T(s)}{E_v(s)} = \frac{K_\omega}{T_s + 1} \quad (6.1.5)$$

6.1.2 Hélice

Para modelar as hélices do quadrotor, utilizamos a equação 6.1.6 que relaciona a força de empuxo dos motores F_i com uma constante das hélices $K_{hélice}$ e a velocidade angular do rotor ω no domínio do tempo:

$$F_i = K_{hélice} * \omega^2 \quad (6.1.6)$$

Sendo $\Omega(s)$ a velocidade angular do rotor no domínio da frequência, sua função de transferência é dada por:

$$F_i = K_{hélice} * \Omega(s)^2 \quad (6.1.7)$$

$$G_F(s) = \frac{F_i(s)}{\Omega(s)^2} = K_{hélice} \quad (6.1.8)$$

6.1.3 Quadricóptero

Para essa modelagem utilizou-se um drone com uma distância do centro do motor ao centro de massa l igual a 0,241 m.

Também, considerando as massas da Figura 1, temos que m_1 , m_2 , m_3 e m_4 são iguais e valem $39 * 10^{-3}$ kg e m_c , que representa a massa da caixa com os componentes elétricos, é igual a $388 * 10^{-3}$ kg (SÁ, 2012).

Para as hélices, será utilizado um raio r_h de 114.5mm, sendo o ρ do ar igual a $1,225kg/m^3$ e o coeficiente de empuxo c_e igual a 0.116, sendo constante, pois o veículo tem velocidade baixa (DOMINGUES,2009), substituindo na equação 4.3.18:

$$b = c_e \frac{4 * \rho * r_h^4}{\pi^2} = 0.116 \frac{4 * 1.225 * (114.5 * 10^{-3})^4}{3.14^2} = 10^{-5} \quad (6.1.9)$$

6.1.4 Matriz de inércia

O momento de inércia depende do volume de cada componente do quadricóptero.

Para a caixa, o momento de inércia é calculado utilizando a equação:

$$I_x^{caixa} = I_y^{caixa} = M_{caixa} * \left(\frac{l_{caixa}^2}{12} + \frac{h_{caixa}^2}{12} \right) \quad (6.1.10)$$

$$I_z^{caixa} = M_{caixa} * 2 * \frac{l_{caixa}^2}{12} \quad (6.1.11)$$

Pois estamos considerando uma caixa quadrada. Sendo l_{caixa} a largura da caixa central, igual a 0.096 m, h_{caixa} a altura da caixa, igual a 0.120 m e m_{caixa} a massa da caixa, igual a $388 * 10^{-3}kg$. Então:

$$I_x^{caixa} = I_y^{caixa} = 0.7631 * 10^{-3}kg.m^3 \quad (6.1.12)$$

$$I_z^{caixa} = 0.4959 * 10^{-3}kg.m^3 \quad (6.1.13)$$

Os momentos de inércia dos motores I^{motor} são dados por:

$$I_x^{motor} = I_y^{motor} = M_{motor} * \left(\frac{r_{motor}^2}{12} + \frac{h_{motor}^2}{12} + l_{motor}^2 + l^2 \right) \quad (6.1.14)$$

$$I_z^{motor} = M_{motor} * \left(\frac{r_{motor}^2}{12} + l^2 \right) \quad (6.1.15)$$

Sendo r_{motor} o raio do motor 0.0285 m, h_{motor} a altura do motor, igual a 0.030 m e m_{motor} a massa do motor, igual a $39 * 10^{-3}kg$. Então:

$$I_x^{motor} = I_y^{motor} = 2.2454 * 10^{-3}kg.m^3 \quad (6.1.16)$$

$$I_z^{motor} = 2.2815 * 10^{-3}kg.m^3 \quad (6.1.17)$$

Assim, os momentos totais em cada eixo ficam:

$$I_x^{drone} = I_x^{caixa} + 2 * I_x^{motor} = 4,9523 * 10^{-3} kg.m^3 \quad (6.1.18)$$

$$I_y^{drone} = I_x^{drone} = 4,9523 * 10^{-3} kg.m^3 \quad (6.1.19)$$

$$I_z^{drone} = I_z^{caixa} + 4 * I_z^{motor} = 9,7209 * 10^{-3} kg.m^3 \quad (6.1.20)$$

Portanto, a matriz de inércia fica:

$$I = \begin{bmatrix} 4,9523 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 4,9523 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 9,7209 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (6.1.21)$$

6.2 Matriz de Estados e de Entrada

Para chegar em um sistema na forma da equação 6.2.1, no qual A é a matriz planta, B é a matriz das entradas e C é a matriz das saídas, como não temos um sistema linear por conta das funções trigonométricas, vai ser feita uma expansão de Taylor de ordem 1 em torno de um ponto de equilíbrio.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad (6.2.1)$$

No sistema 6.2.1 a matriz D é a matriz que contém os valores para as forças de arrasto que às quais o drone vai estar submetido quando se mover. Usualmente, elas são desconsideradas para as análises feitas para drones quadrimotores, no entanto, neste relatório vai ser feita a comparação entre os movimentos com e sem a presença do arrasto. Primeiramente vão ser feitas as derivações parciais em relação ao vetor de estados x. Em seguida o ponto de equilíbrio encontrado vai ser substituído nas equações obtidas, chegando no sistema linearizado.

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z \ u \ v \ w \ \phi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r]^T \quad (6.2.2)$$

$$\mathbf{u} = [\Omega_1^2 \ \Omega_2^2 \ \Omega_3^2 \ \Omega_4^2]^T \quad (6.2.3)$$

O plano de atuação desejado é onde o drone está se movendo dentro do plano xz.

$$\mathbf{x} = [x \ 0 \ z \ u \ 0 \ w \ 0 \ \theta \ 0 \ 0 \ q \ 0]^T \quad (6.2.4)$$

Portanto vai ser adotado o estado de equilíbrio tal que:

$$\mathbf{x}_0 \left[\bar{x} \ 0 \ \bar{z} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \quad (6.2.5)$$

Nesse ponto de equilíbrio o drone tem suas velocidades lineares e angulares nulas, tendo a força peso do drone e o empuxo gerado pelos atuadores se anulando. Portanto é de se esperar que os empuxos gerados por cada rotor sejam iguais. Assim, obtêm-se a relação:

$$\begin{aligned} b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) &= mg \\ \Omega_1^2 = \Omega_2^2 = \Omega_3^2 = \Omega_4^2 &= \Omega^2 \\ 4b\Omega^2 &= mg \\ \Omega &= \sqrt{\frac{mg}{4b}} \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Sendo assim, a partir do vetor de estados 6.2.5 chega-se que as constantes de entrada para manter esse estado de equilíbrio seriam:

$$\mathbf{u}_0 = \left[\frac{mg}{4b} \ \frac{mg}{4b} \ \frac{mg}{4b} \ \frac{mg}{4b} \right]^T \quad (6.2.7)$$

Como o movimento desejado está restrito ao plano xz, são necessários apenas que as velocidades angulares dos rotores 2 e 4 variem durante o movimento. Porque se mantidas as velocidades suficientes nos rotores 1 e 3 para sustentar o drone no ar, as velocidades dos rotores 2 e 4 conseguem fazer o drone se mover ao longo do eixo x caso sejam diferentes e se ambas forem maiores ou menores que a velocidade necessária apenas para sustentação, o drone se moverá no eixo z.

Utilizando esse ponto de equilíbrio para a expansão de Taylor, são obtidas as matrizes da equação 6.2.1. Sendo a expansão de Taylor dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} \cong f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (6.2.8)$$

Como $f(x_0, u_0) = 0$, ficamos com:

$$\dot{\mathbf{x}} \cong \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (6.2.9)$$

$$A = \frac{\partial f(t, u)}{\partial x} \Big|_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.2.10)$$

Nota-se que com a expansão de Taylor não temos mais a força de arrasto, já que no ponto de equilíbrio as velocidades lineares são nulas.

$$B = \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} \Big|_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b}{m} & -\frac{b}{m} & -\frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{bl}{I_x} & 0 & \frac{bl}{I_x} & 0 \\ 0 & -\frac{bl}{I_y} & 0 & \frac{bl}{I_y} \\ \frac{d}{I_z} & -\frac{d}{I_z} & \frac{d}{I_z} & -\frac{d}{I_z} \end{bmatrix} \quad (6.2.11)$$

Fazendo a multiplicação entre as matrizes, obtemos o sistema linearizado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = w \\ \dot{u} = -g\theta \\ \dot{v} = -g\Phi \\ \dot{w} = -\frac{b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)}{m} \\ \dot{\Phi} = p \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{\psi} = r \\ \dot{p} = \frac{bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}{I_x} \\ \dot{q} = \frac{bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2)}{I_y} \\ \dot{r} = \frac{d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)}{I_z} \end{array} \right. \quad (6.2.12)$$

Aplicando as limitações do plano de ação escolhido onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ v = 0 \\ \Phi = 0 \\ \psi = 0 \\ p = 0 \\ r = 0 \end{array} \right. \quad \text{e } \Omega_1^2 = \Omega_3^2 \quad (6.2.13)$$

Chega-se em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u \\ \dot{z} = w \\ \dot{u} = -g\theta \\ \dot{w} = -\frac{b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)}{m} \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = \frac{bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2)}{I_y} \end{array} \right. \quad (6.2.14)$$

Que também pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u \\ \dot{z} = w \\ \ddot{x} = -g\theta \\ \ddot{z} = -\frac{b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)}{m} \\ \dot{\theta} = q \\ \ddot{\theta} = \frac{bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2)}{I_y} \end{array} \right. \quad (6.2.15)$$

Por fim é obtido a partir dos seguintes vetores de estado 6.2.16 e entrada 6.2.3 :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ u \\ w \\ \theta \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b}{m} & -\frac{b}{m} & -\frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{bl}{I_y} & 0 & \frac{bl}{I_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 - \Omega^2 \\ \Omega_2^2 - \Omega^2 \\ \Omega_3^2 - \Omega^2 \\ \Omega_4^2 - \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (6.2.16)$$

Na matriz de saída, como queremos analisar todas as variáveis, ficamos com a seguinte relação:

$$Y = CX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ u \\ w \\ \theta \\ q \end{bmatrix} \quad (6.2.17)$$

7 DOMÍNIO DAS FREQUENCIAS

7.1 Função Transferência

A função transferência é a razão entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada (Sistemas de controle para engenharia - Gene F. Franklin, 2013, pg 69), sendo um ganho de transferência de $U(s)$ para $Y(s)$.

Para calcular esta função, foi utilizado o comando `ss2tf` do *software* público Scilab, onde a entrada foi a matriz de estados A e ele retornava as funções transferência do sistema.

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0.0047256}{s^4} & 0 & -\frac{0.0047256}{s^4} \\ -\frac{0.00002}{s^2} & -\frac{0.00002}{s^2} & -\frac{0.00002}{s^2} & -\frac{0.00002}{s^2} \\ 0 & \frac{0.0047256}{s^3} & 0 & -\frac{0.0047256}{s^3} \\ -\frac{0.00002}{s} & -\frac{0.00002}{s} & -\frac{0.00002}{s} & -\frac{0.00002}{s} \\ 0 & -\frac{0.0004817}{s^2} & 0 & \frac{0.0004817}{s^2} \\ 0 & -\frac{0.0004817}{s} & 0 & \frac{0.0004817}{s} \end{bmatrix} \quad (7.1.1)$$

7.1.1 Polos e estabilidade

Os polos da função transferência são os valores das variáveis de Laplace, s , que tornam a função infinita, ou as raízes do denominador da função de transferência que são iguais às raízes do numerador (Carlos Santos - Análise da Resposta Transitória, 2017)

Para o sistema simulado, com o quadricóptero atuando no plano xz , encontramos, a partir da função `spec` do Scilab que calcula os autovalores da matriz, que os seis polos do sistema são iguais a zero.

Como o número de polos do sistema que é igual a zero é alto, tem alta multiplicidade, o sistema é instável.

8 SIMULAÇÃO

A simulação de um sistema permite a dedução de cenários onde, a partir dos dados obtidos, decisões podem ser tomadas, análises são feitas e melhorias e otimizações são consideradas.

Para assegurar que a modelagem do sistema do quadricóptero está correta, devemos simular seu movimento e analisar os resultados obtidos em forma de gráfico. Neste trabalho foi usado o *software* Scilab, onde um código foi escrito para solucionar o sistema linear.

Para o domínio do tempo as funções utilizadas para resolver o sistema foram *syslin* e *csim*. Já no domínio das frequências, apenas a função BODE.

O código gerado e utilizado para encontrar as imagens dos próximos tópicos está anexo ao trabalho.

Os casos estudados estão apresentados na tabela 6:

Figura 6 – Casos estudados na simulação

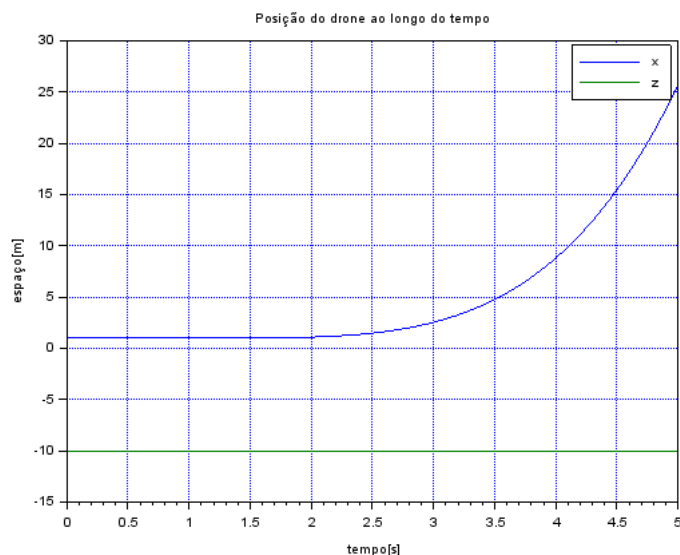
Casos	Vetor de entrada	Fator de variação	Movimento esperado
Caso 1	$u(1, i) = w_0^2 - w_0^2$ $u(2, i) = (w_0(1 + 0,1 * variacao))^2 - w_0^2$ $u(3, i) = w_0^2 - w_0^2$ $u(4, i) = (w_0(1 - 0,1 * variacao))^2 - w_0^2$	variacao=0,01	Rotação em θ com translação positiva em x
Caso 2	$u(1, i) = w_0^2 - w_0^2$ $u(2, i) = (w_0(1 - 0,1 * variacao))^2 - w_0^2$ $u(3, i) = w_0^2 - w_0^2$ $u(4, i) = (w_0(1 + 0,1 * variacao))^2 - w_0^2$	variacao=0,01	Rotação em θ com translação negativa em x
Caso 3	$u(1, i) = w_0^2 - w_0^2$ $u(2, i) = (w_0(1 + 0,1 * variacao))^2 - w_0^2$ $u(3, i) = w_0^2 - w_0^2$ $u(4, i) = (w_0(1 + 0,1 * variacao))^2 - w_0^2$	variacao=10	Translação negativa em z
Caso 4	$u(1, i) = w_0^2 - w_0^2$ $u(2, i) = (w_0(1 - 0,1 * variacao))^2 - w_0^2$ $u(3, i) = w_0^2 - w_0^2$ $u(4, i) = (w_0(1 - 0,1 * variacao))^2 - w_0^2$	variacao=10	Translação positiva em z

Fonte:Autores

8.1 Análise da resposta no domínio do tempo

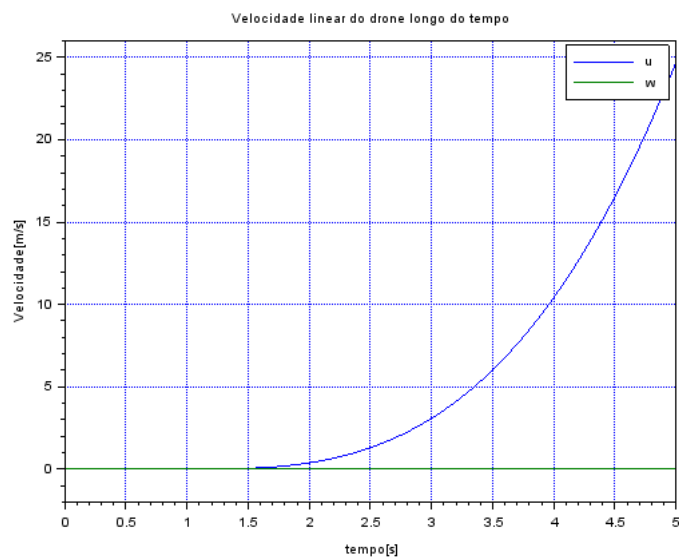
Cada um dos quatro casos tem um gráfico de posição linear, posição angular, velocidade linear e velocidade angular. No caso 1, Com a velocidade do atuador 4 tendo a velocidade maior que o atuador 2, temos que conseqüentemente o empuxo gerado por ele será maior, fazendo com que o drone se incline no eixo y. Essa variação faz com que o ângulo θ tenha uma taxa de variação crescente já que o desbalanço entre as velocidades dos rotores se mantêm desbalanceadas. Isso leva o drone a adquirir uma aceleração angular constante no eixo y, o que faria ele girar em torno de seu próprio eixo se o movimento continuasse. Também, até certo ponto o drone acelera linearmente no eixo x por conta da mudança na direção do empuxo. Contudo, em algum momento o quadricóptero começaria a girar e adquiriria um movimento caótico.

Figura 7 – Posição do drone no caso 1



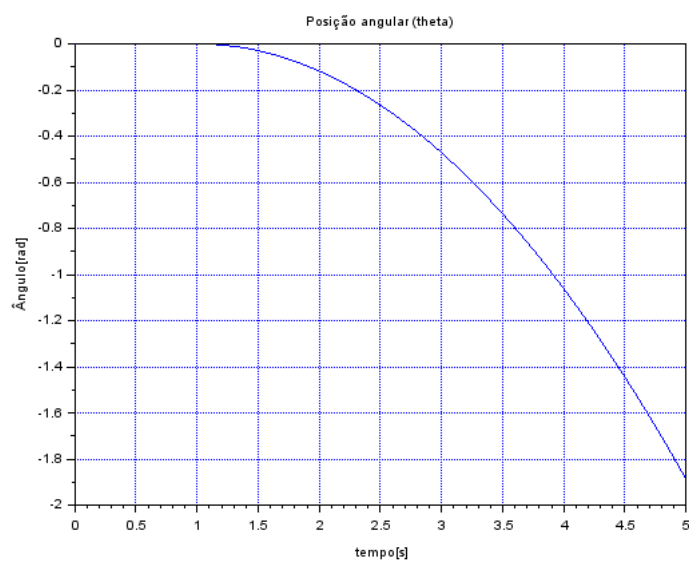
Fonte:Autores

Figura 8 – Velocidade linear do drone no caso 1

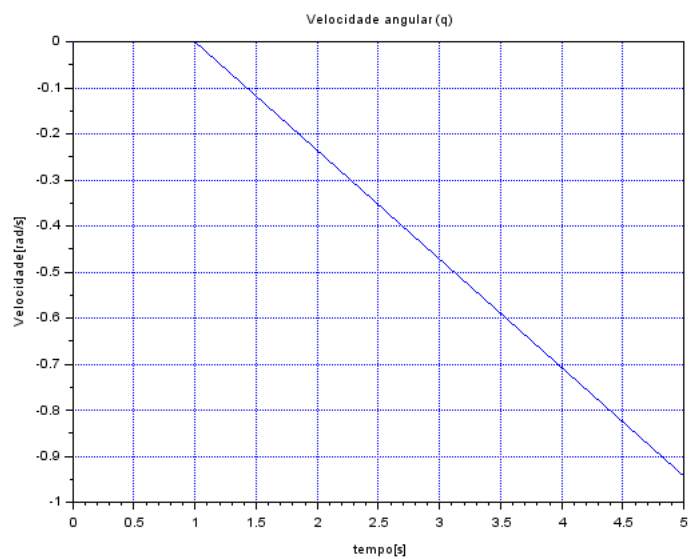


Fonte:Autores

Figura 9 – Posição angular (θ) no caso 1



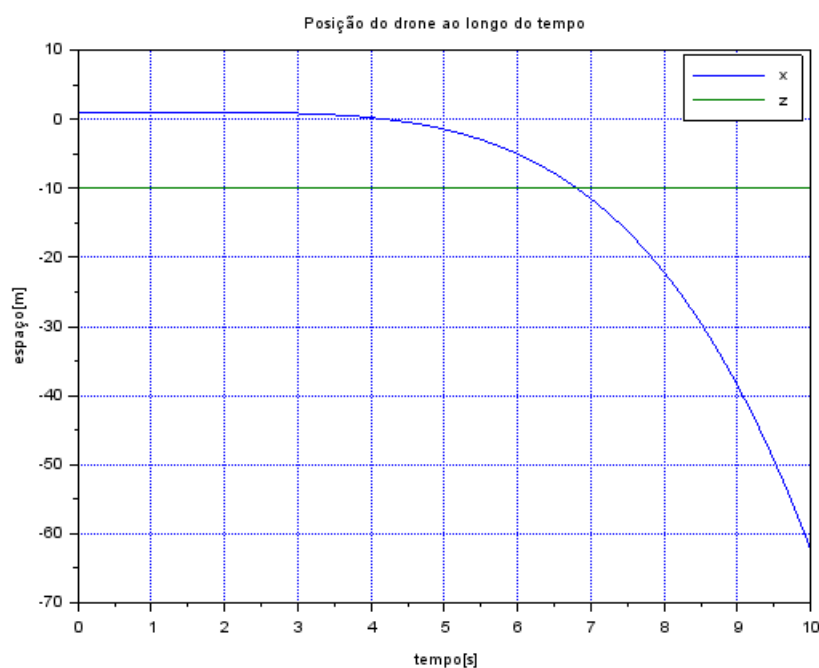
Fonte:Autores

Figura 10 – Velocidade angular (\dot{q}) no caso 1

Fonte:Autores

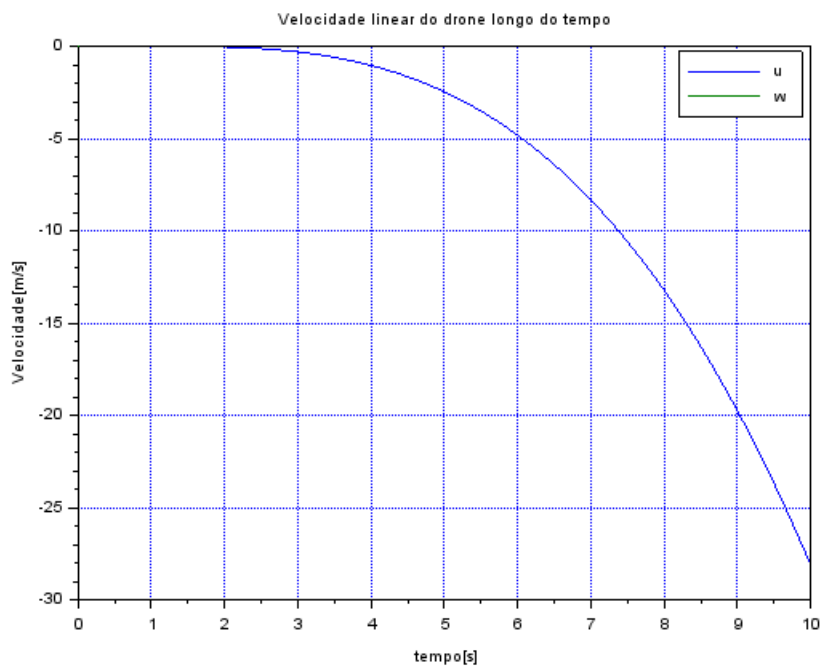
No caso 2 aconteceria a mesma coisa que no caso 1 contudo com as posições angulares e as velocidades lineares e angulares opostas. Vale ressaltar que nesses dois primeiros casos, seria colocada uma variável de controle que impediria que a posição angular medida passasse de um certo grau para o drone não entrar em uma zona em que as posições angulares sejam muito grandes, já que esse caso faria que o modelo feito não fosse válido já que ele foi aproximado para pequenos ângulos.

Figura 11 – Posição do drone no caso 2



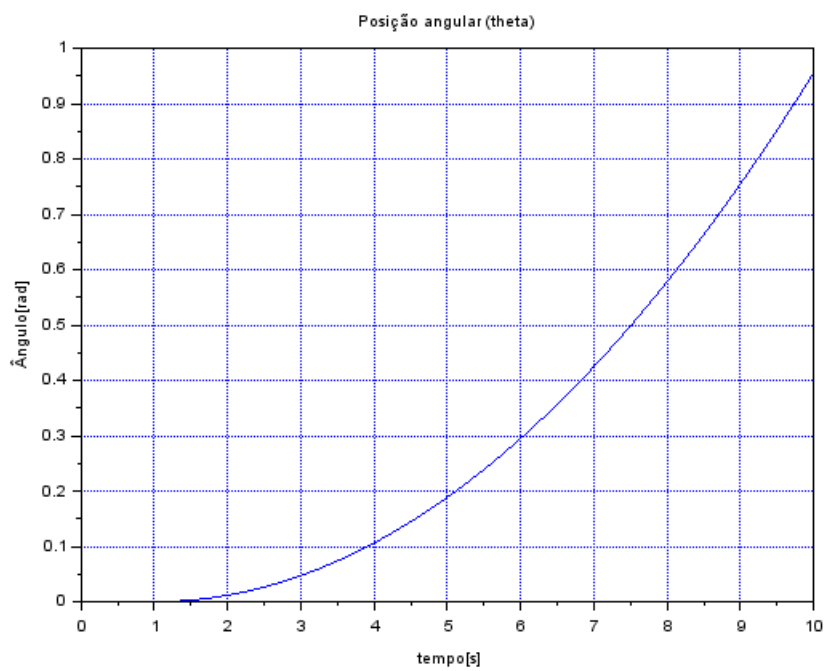
Fonte: Autores

Figura 12 – Velocidade linear do Drone no caso 2

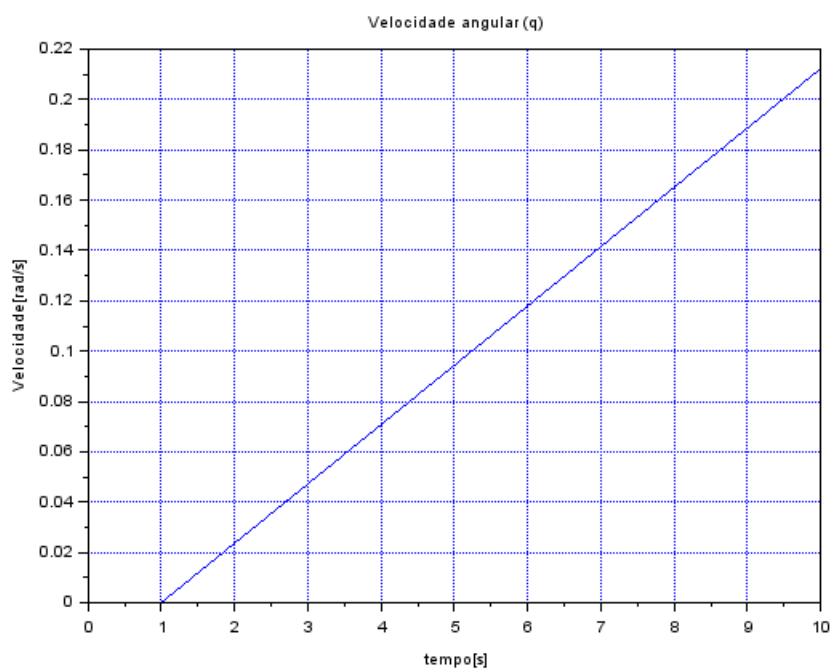


Fonte: Autores

Figura 13 – Posição angular (θ) no caso 2



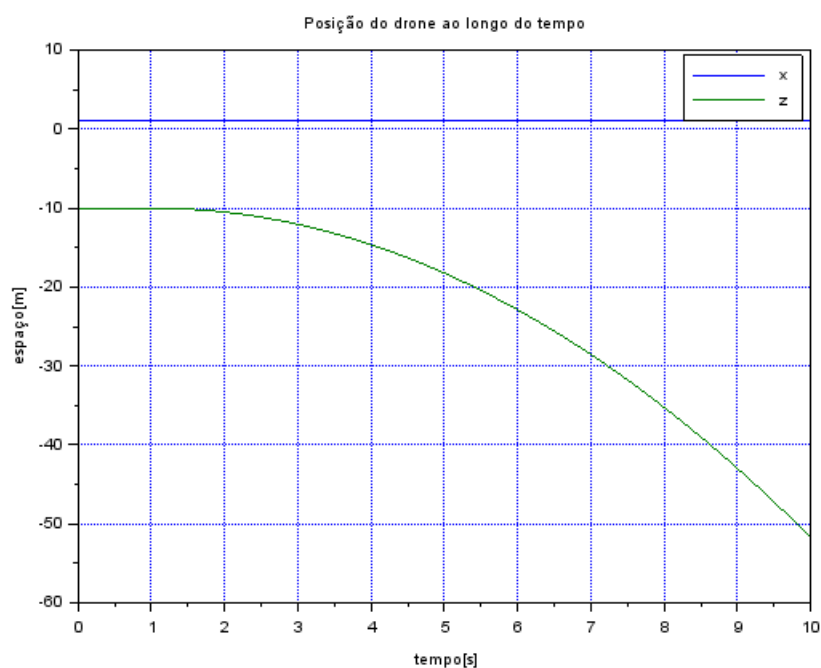
Fonte: Autores

Figura 14 – Velocidade angular (q) no caso 2

Fonte: Autores

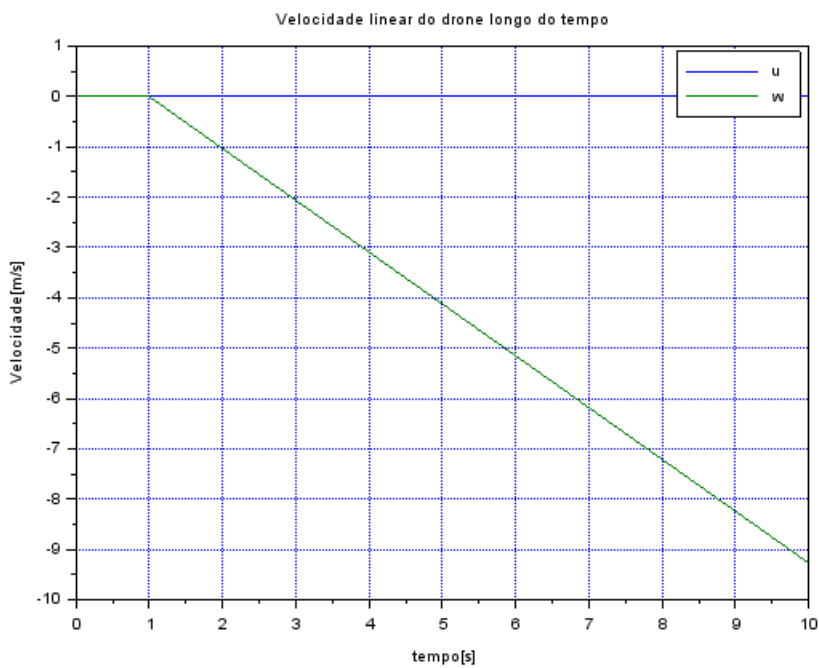
No caso 3, temos um caso em que as velocidades dos rotores 2 e 4 vão ser iguais e maiores que o necessário para manter o drone em equilíbrio, o que faz com que os torques gerados por eles se anulem, contudo a resultante do empuxo vai superar o peso do drone, fazendo ele subir. Foi utilizada a hipótese de que a resistência do ar e a gravidade não mudam com a altitude z , então se os rotores tem velocidade constante maior que a de equilíbrio, eles sobem em velocidade constante.

Figura 15 – Posição do drone no caso 3



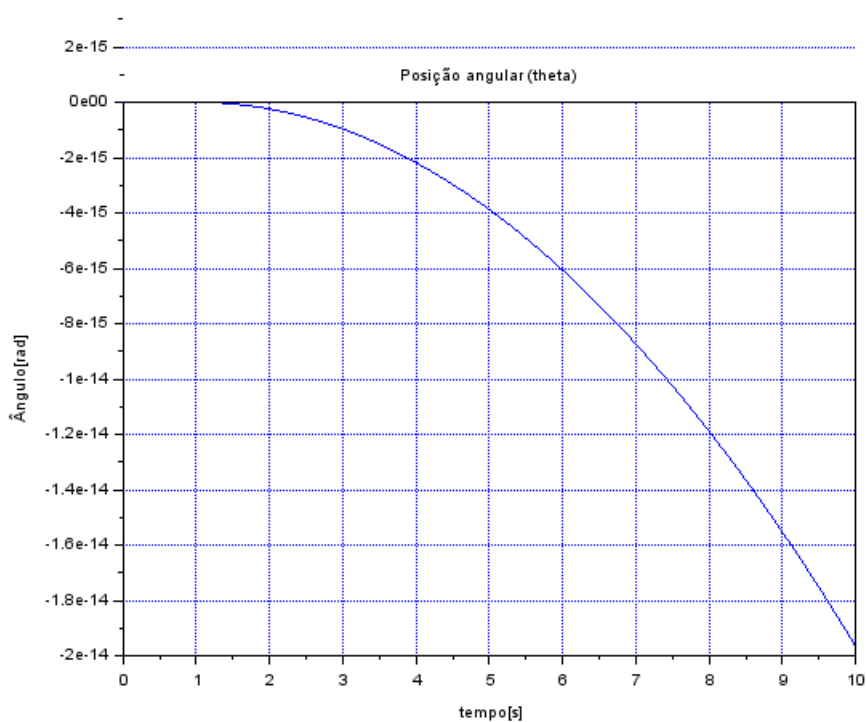
Fonte:Autores

Figura 16 – Velocidade linear do Drone no caso 3



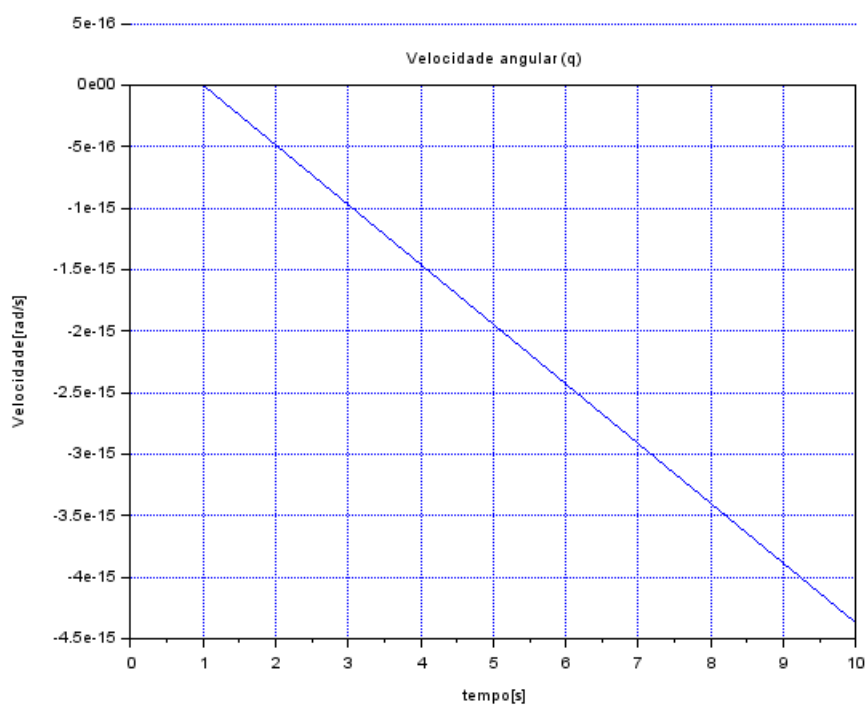
Fonte:Autores

Figura 17 – Posição angular (θ) no caso 3



Fonte:Autores

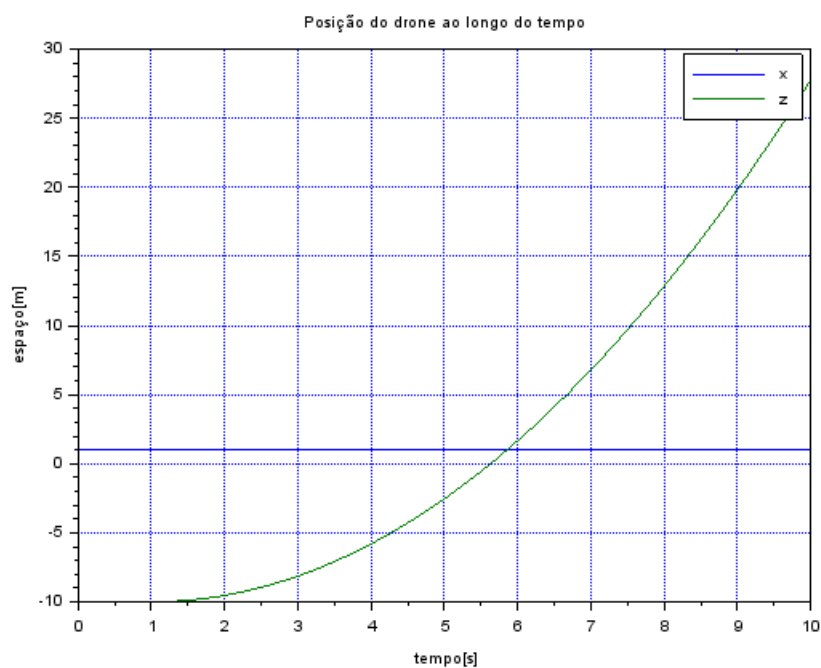
Figura 18 – Velocidade angular (q) no caso 3



Fonte:Autores

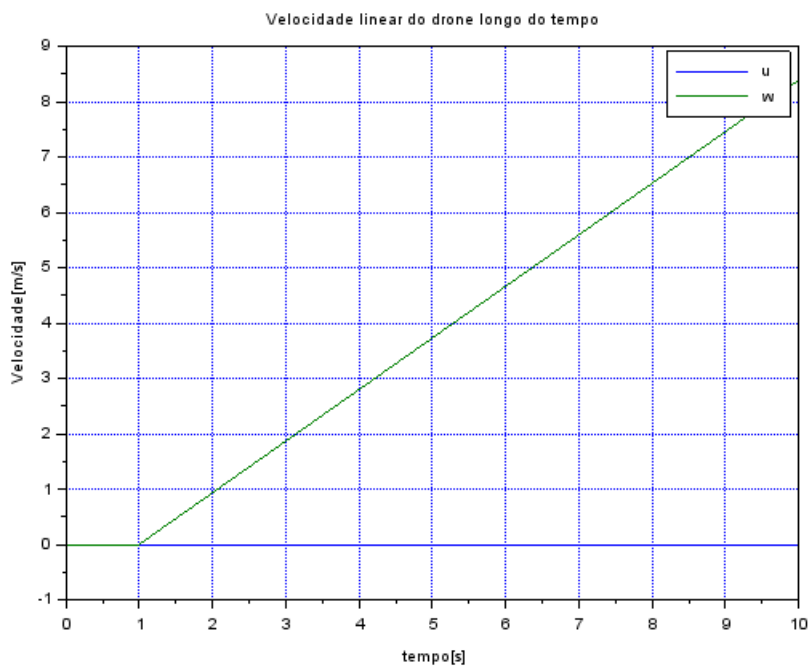
Temos no caso 4, novamente, o oposto do caso 3 no qual as velocidades dos rotores 2 e 4 ainda são iguais, mas menores que o necessário para manter o drone voando fazendo ele descer. Vale notar que no movimento de descida seria importante que houvesse uma variável de controle que impedisse o drone de chegar na zona em que a proximidade ao chão diminua o empuxo gerado pelas hélices por conta da mudança

Figura 19 – Posição do drone no caso 4



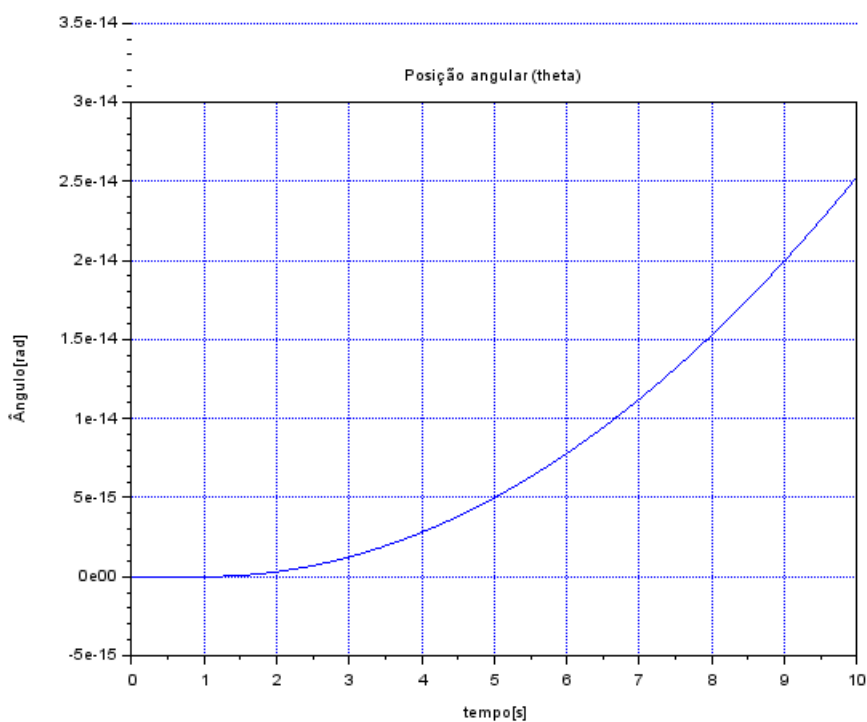
Fonte: Autores

Figura 20 – Velocidade linear do Drone no caso 4



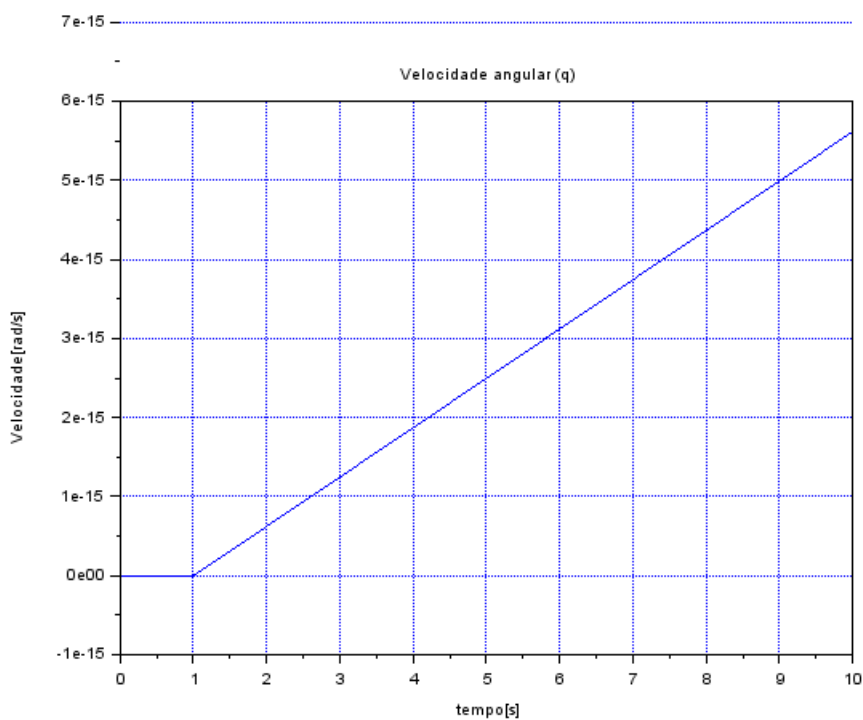
Fonte: Autores

Figura 21 – Posição angular (θ) no caso 4



Fonte: Autores

Figura 22 – Velocidade angular q no caso 4

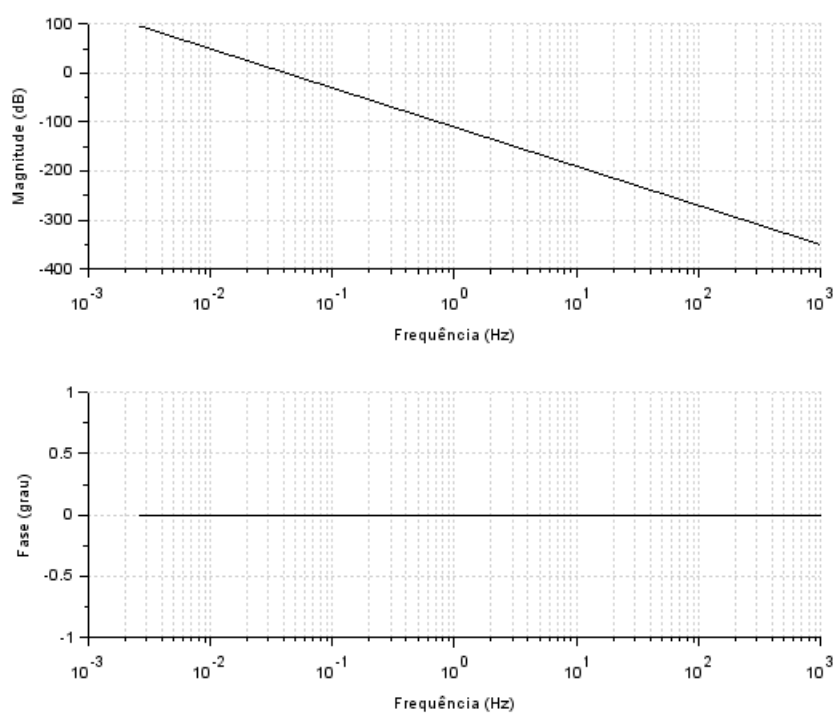


Fonte: Autores

8.2 Análise da resposta no domínio da frequência

Os diagramas de Bode são importantes porque mostram o comportamento das saídas frente às entradas no domínio das frequências de forma gráfica, sendo possível prever o comportamento da magnitude da resposta e da fase. Para chegar neles, primeiramente foi encontrada a função de transferência para o sistema linearizado encontrado e em seguida para cada um dos conjuntos entrada/saída foi calculado o diagrama a partir da função bode do software Scilab versão 6.1.0.

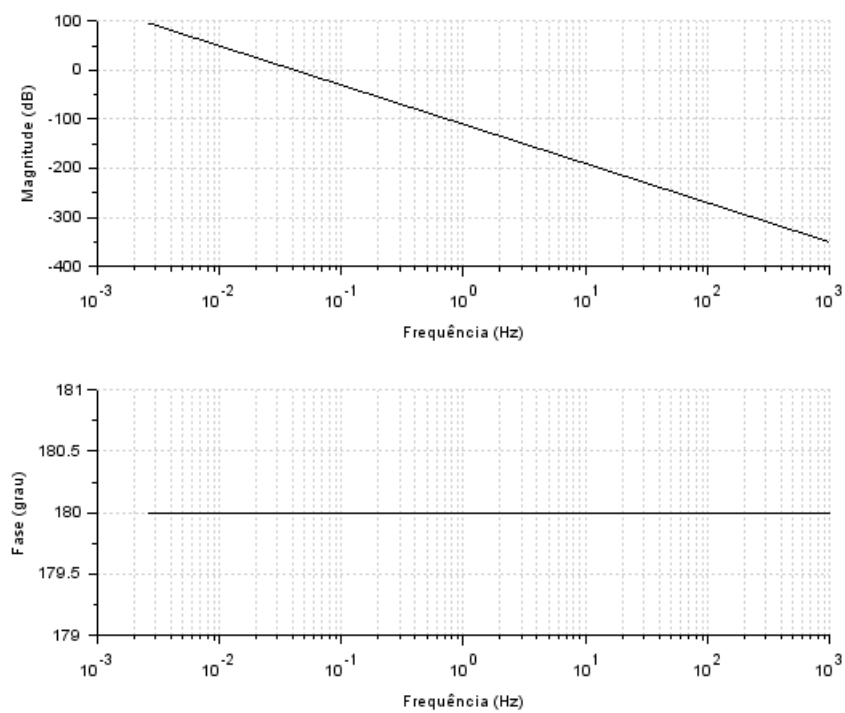
Figura 23 – Entrada U2 saída x



Fonte: Autores

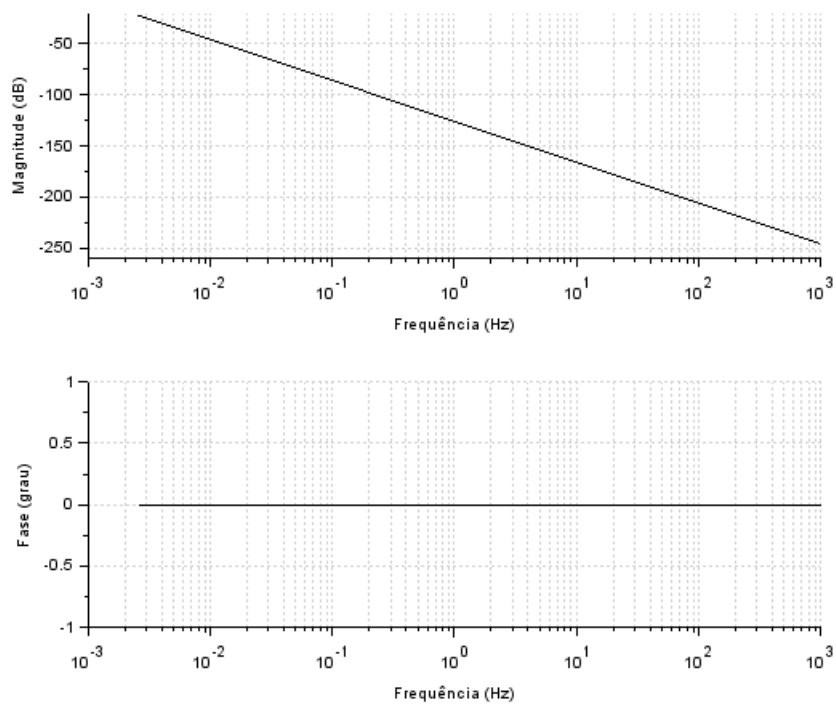
Ao analisar os gráficos nota-se que eles obedeceram o comportamento esperado. Os diagramas todos possuem aparência similar porque todas as funções de transferência são do mesmo formato, apresentando o fator s apenas no denominador. Outro fato esperado é que como todas as funções possuem polos nulos e os fatores s apenas no denominador, era esperado que o ganho fosse sempre decrescente, tendo apenas seu módulo variando de acordo com o valor de K_b em cada uma delas. Também nota-se que as fases apresentam o comportamento constante, novamente por conta da presença do fator s apenas no denominador.

Figura 24 – Entrada U4 saída x



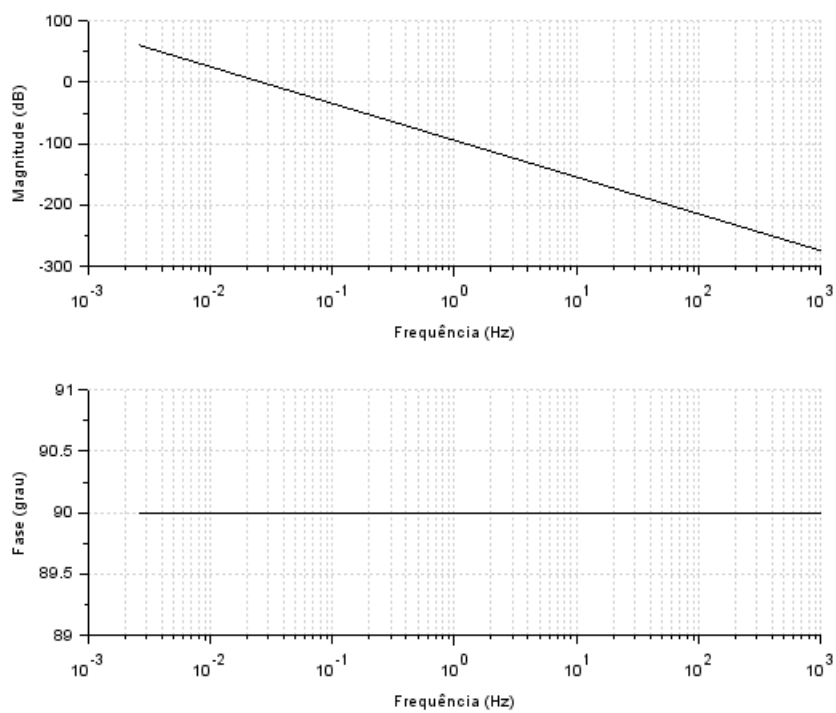
Fonte: Autores

Figura 25 – Entrada U saída z



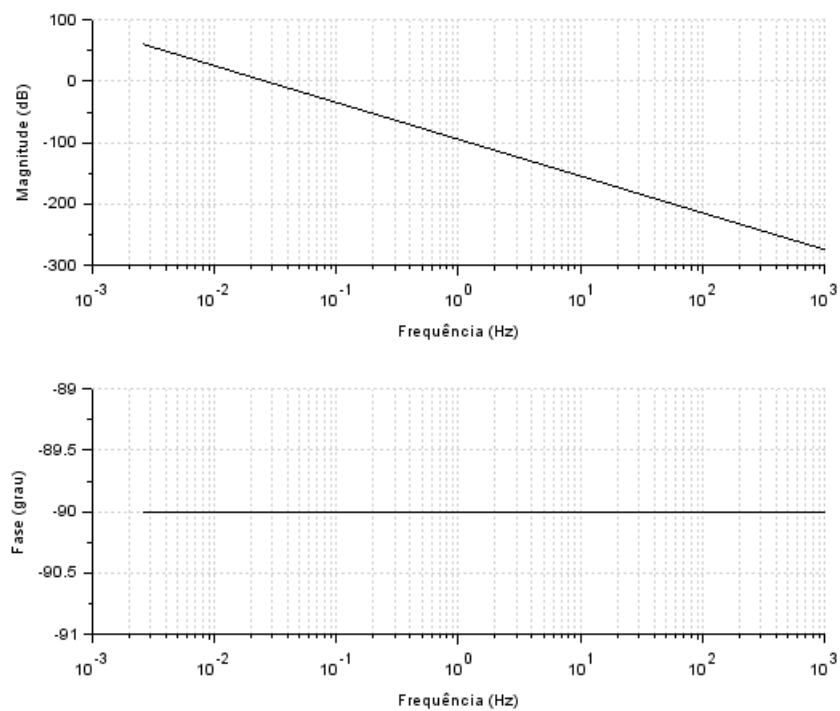
Fonte: Autores

Figura 26 – Entrada U2 saída u



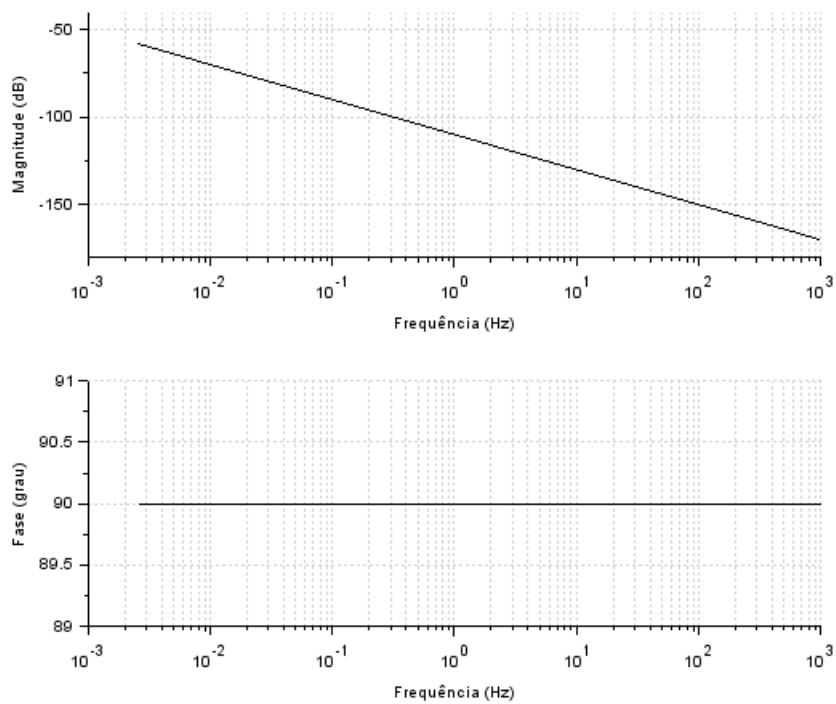
Fonte: Autores

Figura 27 – Entrada U4 saída u



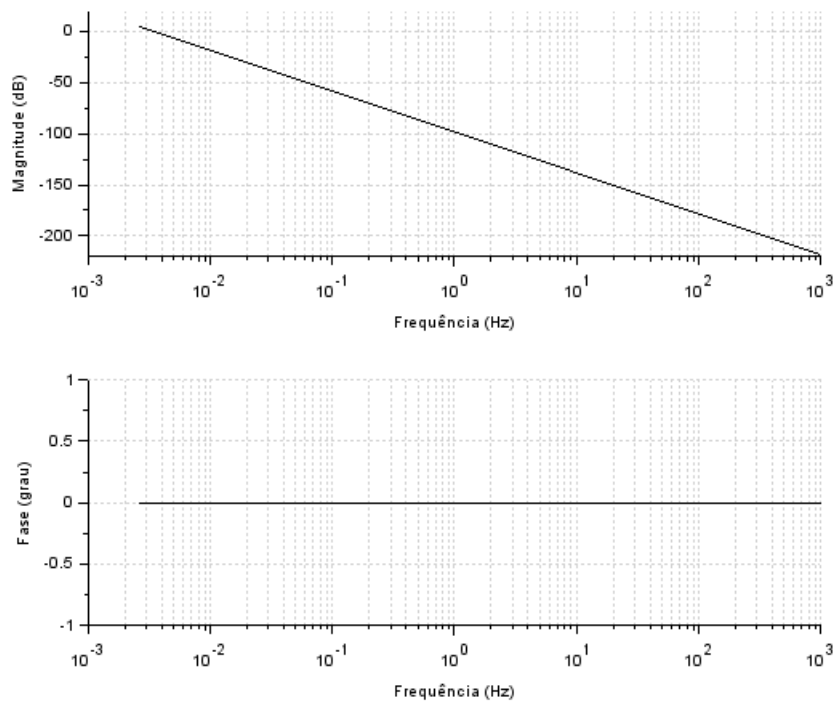
Fonte: Autores

Figura 28 – Entrada U saída w



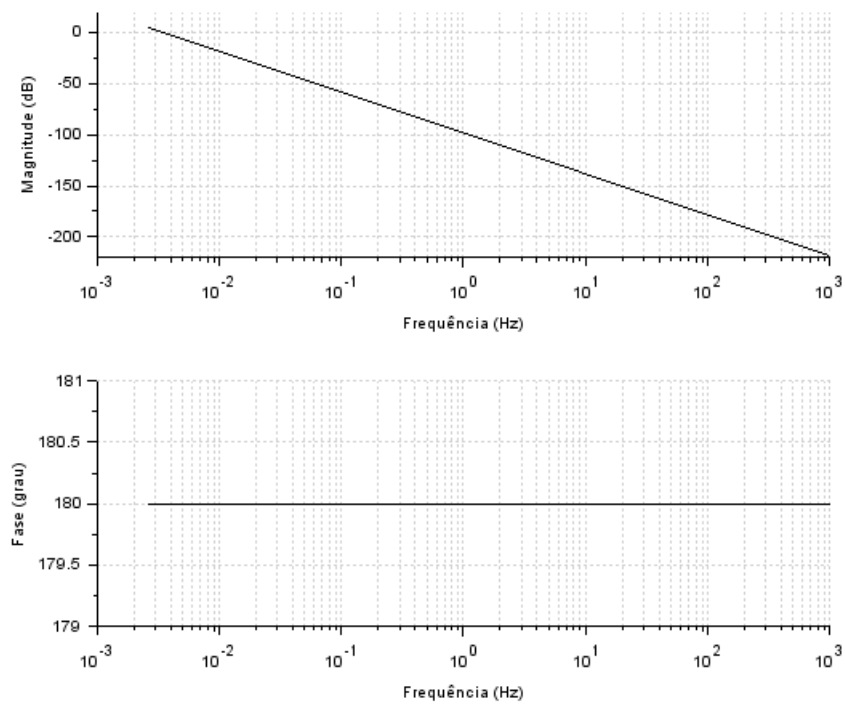
Fonte: Autores

Figura 29 – Entrada U2 saída θ



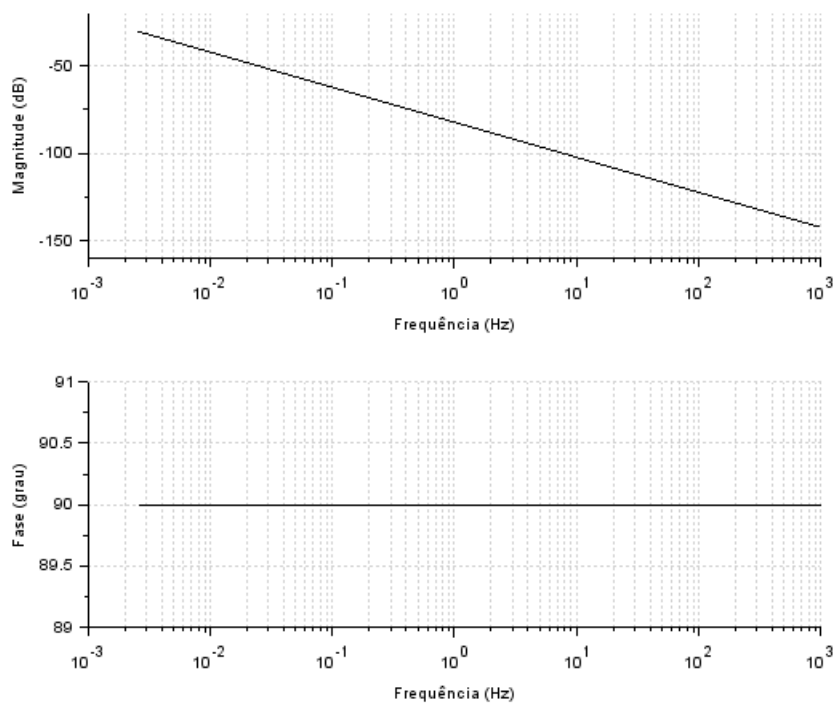
Fonte: Autores

Figura 30 – Entrada U4 saída θ



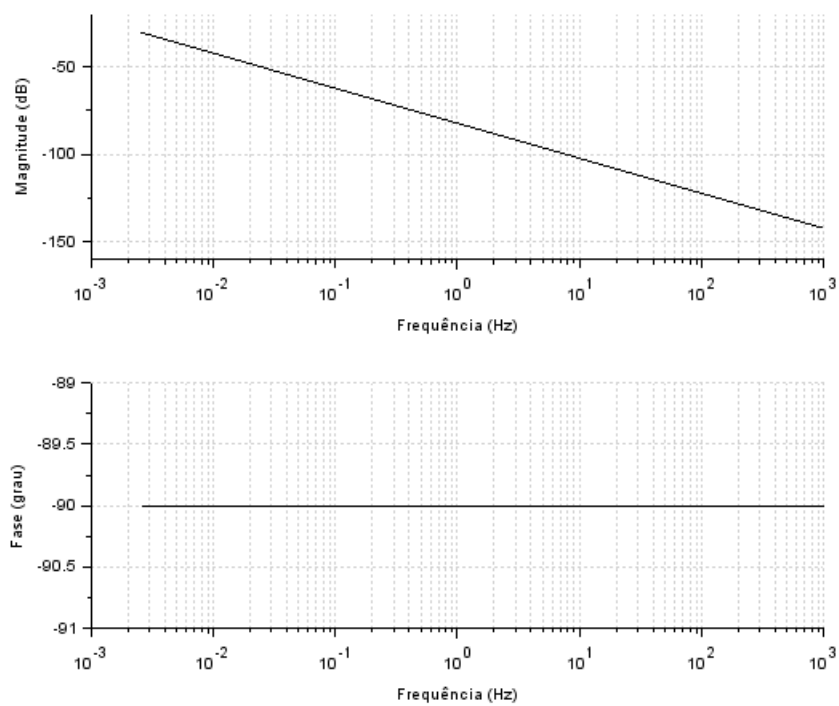
Fonte: Autores

Figura 31 – Entrada U2 saída q



Fonte: Autores

Figura 32 – Entrada U4 saída q



Fonte: Autores

9 CONCLUSÃO

A modelagem de um sistema dinâmico de ordem elevada pôde ser dividida em planos de estudo, onde foi possível modelar o sistema e encontrar as equações que regem o movimento.

A partir da modelagem realizada, foi possível concluir que, para o movimento de um quadrimotor no plano XZ, é necessário modificar a velocidade angular de apenas 2 dos 4 motores, sendo que os restantes precisam atuar somente no equilíbrio da força peso, este fato pode ser observado nos gráficos simulados que apresentam um comportamento esperado de um drone, que apesar das hipóteses simplificadoras, os resultados foram em geral satisfatórios

Ter um modelo matemático consistente foi crucial para o bom desenvolvimento da simulação, onde pequenos erros acarretam numa grande variação de resultados.

Por fim, o trabalho demonstrou que uma boa simplificação de um modelo extremamente complexo pode ser suficiente para entender as suas principais funcionalidades e que o conhecimento sobre modelagem matemática e suas propriedades é essencial para o entendimento de novas possibilidades presentes em nosso dia a dia e conseqüentemente para mudança do futuro.

Referências

- AFONSO, J. A. P. Framework para sistemas de navegação de veículos aéreos não tripulados. *Universidade Federal de Ouro Preto.*, 2014.
- BASAM, V. R.; KUMAR, R. G., "evolutionary approach based design of bldc motor controller with h objectives. *Proc. Of Computer Aided Methods for Modelling, Simulation and Optimization*, 2010.
- BEAL, G. d. P. Modelagem dinâmica de veículos aéreos não tripulados (vants). 2018.
- CAVALLARO, S. L. H. *Modelagem, simulação e controle de um VANT do tipo quadricóptero*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019.
- CONTROLE, P. Técnicas de; SALDANHA, R. d. S. M. Trabalho de conclusão de curso. 2019.
- COSTA, E. B. *Algoritmos de controle aplicados a estabilização do voo de um quadrotor*. Tese (Doutorado) — Master's thesis, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2012.
- DECEA. *DEPARTAMENTO DE CONTROLE DO ESPAÇO AÉREO Circular de Informações Aeronáuticas – AIC 21/2010*. 2010.
- DOMINGUES, J. M. B. Quadrotor prototype. *Instituto Superior Tecnico*, Universidade Tecnica de Lisboa, 2009.
- KALATEC. *Kalatec automação*. 2020. Disponível em: <https://www.kalatec.com.br/?gclid=Cj0KCQiAqo3-BRDoARIsAE5vnaIy__mz4XnXC9Te1xTcFMu1K7tdPNmTb8Zpq>. Acesso em: 2 de Novembro de 2020.
- LIMA, G. V. et al. Modelagem dinâmica de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero. In: *XII CEEL-Conferência de Estudos em Engenharia Elétrica*. [S.l.: s.n.], 2014.
- MEDKE, R. Modelagem matemática de um quadrotor. Universidade Federal do Pampa, 2016.
- SÁ, R. C. Construção, modelagem dinâmica e controle pid para estabilidade de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadrirotor. 2012.
- SABATINO, F. *Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation*. 2015.
- SANTANA, L. V. et al. Modelagem, estimação de estados e controle de formação líder-seguidor usando o quadrimotor ar. drone. In: *XX Congresso Brasileiro de Automática*. [S.l.: s.n.], 2014.
- SANTOS, J. R. d. Modelagem e identificação de parâmetro de um veículo aéreo não-tripulado (vant). 2019.

10 APÊNDICE

```

1
2 clear
3 l=0.241;
4 Ce=0.116
5 ro=1.225
6 r=0.1145
7 b=Ce*4*ro*(r^4)/(%pi^2)
8 g=9.81;
9 mc=0.338
10 mr=0.039
11 m=mc+4*mr
12 Iy=4.9523*10^-3
13 w0 = 1.00*sqrt(m*g/(4*b))
14 passo=1000
15
16
17
18 A =[0 0 1 0 0 0; 0 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 -g 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 1;0 0 0 0
    0 0];
19 B = [0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0;-b/m -b/m -b/m -b/m; 0 0 0 0;0 (-b*1)/Iy 0 (b*
    1)/Iy];
20 C = [1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 0; 0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0
    0 1];
21 D = zeros(6,4);
22 sistema = syslin('c', A,B,C,D);
23 s = poly(0,"s");
24 G = C*inv(s*eye(6,6)-A)*B + D
25 disp(G)
26
27 //condições iniciais
28 Xo=[1; -10;0;0;0;0];
29
30 t0=0; // intervalo de tempo
31 tf=5; // Instante final de simulação
32 t=linspace(t0,tf,passo);
33 T0=1 //definição de quando começa a variar a velocidade
34 variacao = 0.01
35 for i=1:passo
36     if t(i) > T0 then
37         /*CASO 1
38             u(1,i)=w0^2-w0^2
39             u(2,i)=(w0*(1+0.1*variacao))^2-w0^2
40             u(3,i)=w0^2-w0^2

```

```

41     u(4,i)=(w0*(1-0.1*variacao))^2-w0^2
42     CASO 2
43     u(1,i)=w0^2-w0^2
44     u(2,i)=(w0*(1-0.1*variacao))^2-w0^2
45     u(3,i)=w0^2-w0^2
46     u(4,i)=(w0*(1+0.1*variacao))^2-w0^2
47     CASO 3
48     u(1,i)=w0^2-w0^2
49     u(2,i)=(w0*(1+0.1*variacao))^2-w0^2
50     u(3,i)=w0^2-w0^2
51     u(4,i)=(w0*(1+0.1*variacao))^2-w0^2
52     CASO 4
53     u(1,i)=w0^2-w0^2
54     u(2,i)=(w0*(1-0.1*variacao))^2-w0^2
55     u(3,i)=w0^2-w0^2
56     u(4,i)=(w0*(1-0.1*variacao))^2-w0^2*/
57     u(1,i)=w0^2-w0^2
58     u(2,i)=(w0*(1+0.1*variacao))^2-w0^2
59     u(3,i)=w0^2-w0^2
60     u(4,i)=(w0*(1-0.1*variacao))^2-w0^2
61     else
62     u(1,i)=w0^2-w0^2
63     u(2,i)=w0^2-w0^2
64     u(3,i)=w0^2-w0^2
65     u(4,i)=w0^2-w0^2
66     end
67 end
68
69 Y=csim(u,t,sistema,Xo)
70 scf(0)
71 plot(t,[Y(1,:);Y(2,:)])
72 xgrid(2)
73 xtitle("Posição do drone ao longo do tempo ","tempo[s]","espaço[m]")
74 legend("x","z");
75
76 a.x_label.font_size = 4;
77 a.y_label.font_size = 4;
78 a.title.font_size = 4;
79 a.font_size = 4;
80 a.legend.font_size = 4;
81
82 scf(1)
83
84 plot(t,[Y(3,:);Y(4,:)])
85 xgrid(2)
86 xtitle("Velocidade linear do drone longo do tempo ","tempo[s]","Velocidade [
    m/s] ")

```



```

87 legend("u", "w");
88
89 a.x_label.font_size = 4;
90 a.y_label.font_size = 4;
91 a.title.font_size = 4;
92 a.font_size = 4;
93 a.legend.font_size = 4;
94
95
96 scf(2)
97 plot(t,Y(5,:))
98 xgrid(2)
99 xtitle("Posição angular (theta)","tempo[s]","ângulo [rad]")
100
101 a.x_label.font_size = 4;
102 a.y_label.font_size = 4;
103 a.title.font_size = 4;
104 a.font_size = 4;
105 a.legend.font_size = 4;
106
107 scf(3)
108 plot(t,[Y(6,:)])
109 xgrid(2)
110 xtitle("Velocidade angular (q)","tempo[s]","Velocidade [rad/s]")
111
112 a.x_label.font_size = 4;
113 a.y_label.font_size = 4;
114 a.title.font_size = 4;
115 a.font_size = 4;
116 a.legend.font_size = 4;

```

```

1 //Diagrama de Bode
2 clear
3 l=0.241;
4 Ce=0.116
5 ro=1.225
6 r=0.1145
7 b=Ce*4*ro*(r^4)/(pi^2)
8 g=9.81;
9 mc=0.338
10 mr=0.039
11 m=mc+4*mr
12 Iy=4.9523*10^-3
13 w0 = 1.00*sqrt(m*g/(4*b))
14 passo=1000
15
16 t0=0; // intervalo de tempo
17 tf=10; // Instante final de simulação

```

```

18 t=linspace(t0,tf,passo);
19
20 //condições iniciais
21 Xo=[1;-10;0;0;0;0];
22
23 A =[0 0 1 0 0 0; 0 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 -g 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 1;0 0 0 0
    0 0];
24 B = [0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0;-b/m -b/m -b/m -b/m; 0 0 0 0;0 (-b*1)/Iy 0 (b*
    1)/Iy];
25 C = [1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 0; 0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0
    0 1];
26 D = zeros(6,4);
27 sistema = syslin('c', A,B,C,D);
28 s = poly(0,"s");
29 G = syslin('c',C*inv(s*eye(A)-A)*B + D);
30 disp(G);
31
32 T0=1 //definição de quando começa a variar a velocidade
33 variacao = 0.001
34 for i=1:passo
35     if t(i) > T0 then
36         /*CASO 1
37             u(1,i)=w0^2
38             u(2,i)=(w0*(1+0.1*delta))^2
39             u(3,i)=w0^2
40             u(4,i)=(w0*(1-0.1*delta))^2
41         CASO 2
42             u(1,i)=w0^2
43             u(2,i)=(w0*(1-0.1*delta))^2
44             u(3,i)=w0^2
45             u(4,i)=(w0*(1+0.1*delta))^2
46         CASO 3
47             u(1,i)=w0^2
48             u(2,i)=(w0*(1+0.1*delta))^2
49             u(3,i)=w0^2
50             u(4,i)=(w0*(1+0.1*delta))^2
51         CASO 4
52             u(1,i)=w0^2
53             u(2,i)=(w0*(1-0.1*delta))^2
54             u(3,i)=w0^2
55             u(4,i)=(w0*(1-0.1*delta))^2*/
56         u(1,i)=(w0)^2-w0^2
57         u(2,i)=(w0*(1-0.1*variacao))^2-w0^2
58         u(3,i)=(w0)^2-w0^2
59         u(4,i)=(w0*(1+0.1*variacao))^2-w0^2
60
61     else

```

```
62     u(1,i)=w0^2-w0^2
63     u(2,i)=w0^2-w0^2
64     u(3,i)=w0^2-w0^2
65     u(4,i)=w0^2-w0^2
66     end
67 end
68
69 Y=csim(u,t,sistema,Xo)
70
71 scf(0)
72 plot(t,[Y(1,:);Y(2,:)])
73 xgrid(2)
74 xtitle("Posição do drone ao longo do tempo ","tempo[s]","espaço[m]")
75 legend("x","z");
76
77 a.x_label.font_size = 4;
78 a.y_label.font_size = 4;
79 a.title.font_size = 4;
80 a.font_size = 4;
81 a.legend.font_size = 4;
82
83 scf(1)
84
85 plot(t,[Y(3,:);Y(4,:)])
86 legend('u','w')
87 xgrid(2)
88 xtitle("Velocidade linear do drone longo do tempo ","tempo[s]","Velocidade [
    m/s]")
89
90
91 a.x_label.font_size = 4;
92 a.y_label.font_size = 4;
93 a.title.font_size = 4;
94 a.font_size = 4;
95 a.legend.font_size = 4;
96
97 scf(2)
98
99 plot(t,[Y(5,:)])
100 xgrid(2)
101 xtitle("Posição angular theta ao longo do tempo ","tempo[s]","Espaço[rad]")
102
103
104 a.x_label.font_size = 4;
105 a.y_label.font_size = 4;
106 a.title.font_size = 4;
107 a.font_size = 4;
```

```
108 a.legend.font_size = 4;
109
110
111 scf(3)
112 plot(t,Y(6,:))
113 xgrid(2)
114 xtitle("Velocidade angular (q)","tempo[s]","Velocidade [rad/s]")
115
116 a.x_label.font_size = 4;
117 a.y_label.font_size = 4;
118 a.title.font_size = 4;
119 a.font_size = 4;
120 a.legend.font_size = 4;
121
122 //Diagramas de Bode
123 scf(4)
124 bode(G(1,2))
125
126 scf(5)
127 bode(G(1,4))
128 scf(6)
129 bode(G(2,1))
130 scf(7)
131 bode(G(3,2))
132 scf(8)
133 bode(G(3,4))
134 scf(9)
135 bode(G(4,1))
136 scf(10)
137 bode(G(5,2))
138 scf(11)
139 bode(G(5,4))
140 scf(12)
141 bode(G(6,2))
142 scf(13)
143 bode(G(6,4))
```