

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA POLITÉCNICA

Enzo Rozenti Nunes  
Gabriel Rodrigues Camargo  
Lucas Nigro Matheo

**Sistema de Freios Pneumáticos a Ar Direto**

São Paulo  
2020

Enzo Rozenti Nunes  
Gabriel Rodrigues Camargo  
Lucas Nigro Matheo

## **Sistema de Freios Pneumáticos a Ar Direto**

Projeto desenvolvido para a disciplina  
PME3380 – Modelagem de Sistemas  
Dinâmicos da Escola Politécnica da USP para  
aprovação parcial

Orientadores:

Décio Crisol Donha

Agenor de Toledo Fleury

São Paulo

2020

## RESUMO

O sistema pneumático de frenagem a ar direto de locomotivas é, basicamente, constituído de um reservatório principal ligado a uma série de cilindros de freios por meio de um canal de alimentação. Dado certo número de vagões, a resposta ao acionamento pode ser tardia e causar o choque entre os elos de ligação da locomotiva. Desta forma, neste trabalho foram desenvolvidos modelos matemáticos para realizar simulações, utilizando o programa Scilab, a fim de prever o comportamento de sistemas de  $n$  cilindros. Ademais, as hipóteses simplificadoras adotadas visam verificar a aproximação para casos reais, comparando os resultados obtidos com valores teóricos e práticos da literatura de referência.

**Palavras-chave:** Sistema pneumático, Cilindro de Freio.

## **ABSTRACT**

The pneumatic system for direct air braking of locomotives is basically constituted by a main reservoir connected to a series of brake cylinders through a supply channel. Given a number of wagons, the response to the drive can be delayed and cause a shock between the links of the locomotive. Thus, in this work mathematical models were developed to perform simulations, using the Scilab program, in order to predict the behavior of n-cylinder systems. In addition, the simplifying hypotheses adopted aim to verify the approximation for real cases, comparing the results obtained with theoretical and practical values of the reference literature.

**Keywords:** Pneumatic system, Brake Cylinder.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Modelo de freio pneumático a ar direto .....	12
Figura 2 - Modelo simples para 1 cilindro de freio .....	20
Figura 3 - Modelo simples para 2 cilindros de freio .....	22
Figura 4 - Modelo simples para n cilindros de freio .....	24
Figura 5 - Cilindro de freio de locomotivas .....	25
Figura 6 - Modelo de cilindro .....	25
Figura 7 - Modelo para pistões móveis.....	26
Figura 8 – Modelo para n=3 cilindros de freio .....	29
Figura 9 - Modelos para 2 cilindros e 2 pistões .....	31

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Pressões nos cilindros 1, 2 e 3 em função do tempo .....	30
Gráfico 2 - Variação temporal das pressões .....	32
Gráfico 3 - Variação temporal da posição dos pistões .....	32
Gráfico 4 – Pressões nos reservatórios 1 e 2 em função do tempo (Não Linear) .....	33
Gráfico 5 – Deslocamentos dos pistões 1 e 2 em função do tempo (Não Linear) .....	33
Gráfico 6 – Pressões nos reservatórios 1 e 2 em função do tempo (Modelo Linear).....	37
Gráfico 7 – Deslocamentos dos pistões 1 e 2 em função do tempo (Modelo Linear).....	37
Gráfico 8 - Comparação da pressão nos modelos não linear e linear.....	38
Gráfico 9 – Deslocamentos dos pistões 1 e 2 em função do tempo (Modelo Linear).....	38
Gráfico 10 – Polos do Sistema .....	40
Gráfico 11 – Diagrama de Bode .....	41

## LISTA DE SIGLAS

$P_0$  = pressão constante do reservatório principal;

$P_i$  = pressão na  $i$  – ésima seção, sendo  $i = 1, \dots, n$ ;

$P_{i'}$  = pressão na  $i'$  – ésima seção, sendo  $i' = 1, \dots, n$ ;

$P_v$  = pressão em um reservatório de volume  $V$ ;

$\dot{P}$  = variação temporal da pressão;

$V$  = volume de reservatório;

$R$  = constante particular do ar;

$T$  = temperatura absoluta;

$m$  = massa;

$\dot{m}_i$  = variação temporal da massa na  $i$  – ésima seção;

$\dot{m}_{i'}$  = variação temporal da massa na  $i'$  – ésima seção;

$\rho$  = massa específica do fluido;

$A$  = área da seção transversal do tubo;

$v$  = velocidade do escoamento;

$v_{ab}$  = velocidade do escoamento entre as seções  $a$  e  $b$ ;

$d$  = diâmetro do tubo;

$L$  = comprimento da tubulação;

$L_{ab}$  = comprimento da tubulação entre as seções  $a$  –  $b$ ;

$L_{12}/L_{13}/L_{23}$  = comprimento da tubulação entre as seções 1–2/1 – 3/2 – 3;

$\mu$  = viscosidade dinâmica de fluido;

$\vartheta$  = viscosidade cinemática de fluido;

$Re$  = número de Reynolds;

$f$  = fator de atrito;

$N$  = propriedades extensivas;

$n$  = número de cilindros;

$\eta$  = propriedades intensivas;

$\forall$  = notação para designar um volume;

$\forall_c$  = volume de controle fixo no espaço;

$S$  = sistema estudado;

$S_c$  = superfície de controle;

$\vec{v}$  = vetor velocidade do fluido;

$\vec{n}$  = vetor unitário;

$Q$  = vazão;

$E$  = energia do sistema;

$e$  = energia específica do sistema;

$H_i$  = carga na seção  $i$  – ésima;

$H_e$  = carga na seção de entrada;

$H_s$  = carga na seção de saída;

$W_m$  = trabalho realizado por máquinas;

$W_a$  = perda de carga por atrito;

$z_i$  = cota de altura na  $i$  – ésima seção;

$\gamma$  = peso específico do fluido;

$h_{ab}$  = perda de carga entre as seções  $a$  e  $b$ ;

$h_{12}/h_{23}$  = perda de carga entre as seções 1 – 2/2 – 3;

$h_{i'i}$  = perda de carga entre as seções  $i$  – ésima e  $i'$  – ésima;

$Cr$  = capacitância fluídica;

$C_{i'}$  = capacitância fluídica na  $i'$  – ésima seção;

$g$  = aceleração da gravidade em  $[m/s^2]$ .

## Sumário

1 INTRODUÇÃO .....	10
1.2 Freios Pneumáticos .....	11
1.2.1 Modelo de Freio Pneumático a Ar Direto .....	11
2 OBJETIVOS .....	13
3 MOTIVAÇÃO .....	14
4 CONSIDERAÇÕES PARA MODELAGEM .....	15
5 EMBASAMENTO TEÓRICO .....	16
5.1 Número de Reynolds .....	16
5.2 Teorema do Transporte de Reynolds.....	16
5.3 Equação da Continuidade .....	17
5.4 Equação da Energia e Perda de Carga .....	17
5.5 Resistência e Capacitância Pneumáticas .....	18
5.5.1 Resistência Pneumática .....	18
5.5.2 Capacitância Pneumática .....	19
6 MODELAGEM .....	20
6.1 Cilindros de Freio de Volume Fixo .....	20
6.1.1 1 Cilindro.....	20
6.1.2 2 Cilindros.....	22
6.1.3 n Cilindros.....	24
6.2 Cilindros de Freio de Volume Variável.....	25
7 RESULTADOS PARA MODELOS NÃO LINEARES .....	28
7.1 Parâmetros.....	28
7.2 Modelo com cilindro de freio de volume fixo .....	29
7.2.1 $n = 3$ Cilindros de Freio .....	29
7.3 Modelo com cilindro de freio de volume variável.....	30
7.3.1. $n = 2$ Cilindros com pistão .....	30
7.4 Linearização.....	34
8 DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA .....	39
8.1 Funções de Transferência.....	39
8.2 Polos e Estabilidade.....	40
8.3 Diagramas de Bode .....	41
9 CONCLUSÃO.....	42
REFERÊNCIAS .....	44

## 1 INTRODUÇÃO

O transporte ferroviário apresentou seu grande desenvolvimento durante a Revolução Industrial, iniciada em 1760 e findada em algum momento entre 1820 e 1840. O fator que impulsionou a criação e desenvolvimento desse meio de transporte foi o aperfeiçoamento das máquinas a vapor. O primeiro motor a vapor foi desenvolvido por volta de 1698, um modelo extremamente rudimentar, que tinha como objetivo o bombeamento da água do interior das minas de carvão.

O aperfeiçoamento desse modelo permitiu o aumento da produção no período da Revolução Industrial e, conseqüentemente, tornou-se necessário o aprimoramento do meio de transporte de carga e matéria-prima para suprir a indústria e o mercado em expansão. Dessa forma, as locomotivas a vapor surgem como solução, por oferecerem uma grande capacidade de transporte de carga, facilitando e dinamizando o contato entre os polos de extração da matéria prima para os polos industriais.

A tecnologia do transporte ferroviário foi difundida globalmente nas décadas e séculos seguintes, inclusive deixando de ser um meio de transporte exclusivamente de cargas e matéria-prima para também tomar lugar como meio de transporte de pessoas. Isso ocorreu devido à grande capacidade que o sistema apresenta de realizar percursos de longa distância com alta capacidade de carga por um preço baixo e em curto período de tempo e com impacto ambiental reduzido pela baixa emissão de poluentes por volume transportado.

No Brasil, o incentivo à construção das ferrovias surgiu durante o século XIX, a destacar a atuação de Irineu Evangelista de Sousa, futuramente conhecido como Barão de Mauá, que incentivou a construção da primeira ferrovia brasileira, cujo objetivo era o transporte do café (principal produto da exportação na época) do Vale do Paraíba até o Porto de Mauá. Nas seguintes décadas a malha ferroviária brasileira apresentou crescimento e acompanhou o desenvolvimento econômico brasileiro, servindo como meio de transporte de produtos de exportação dos polos produtores para portos no litoral.

Até a década de 1940, o crescimento das ferrovias no país apresentou ritmo considerável, sendo imprescindíveis para o transporte nas atividades econômicas nos maiores polos do território. Durante o período entre guerras (1918-1929), entretanto, os investimentos nesse setor foram consideravelmente reduzidos e esse modal foi perdendo sua atuação, com ascensão e priorização ao modal rodoviário, iniciado na Era Vargas.

Apesar da pouca expressividade desse modal no atual cenário brasileiro, o país apresenta grande potencial de desenvolvimento e criação de novas linhas férreas para transporte de cargas e de pessoas. O Brasil apresenta grande extensão territorial e consideráveis extensões de áreas de planície e planalto. Isso favorece a utilização do modal ferroviário, por ser um meio de transporte capaz de transportar grandes volumes por longas distâncias a preço baixo e que pode ser facilmente construído em regiões de relevo pouco acentuado.

## **1.2 Freios Pneumáticos**

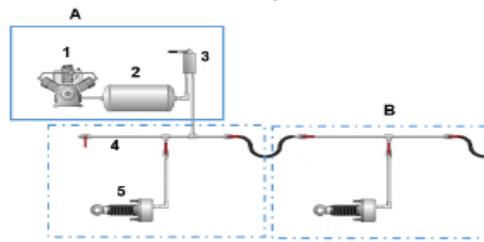
O presente relatório trata do sistema de freios pneumáticos a ar direto de locomotivas. Dessa forma, é interessante dedicar alguns parágrafos para abordar seus componentes e princípios de funcionamento. Nos tópicos seguintes serão expostos os embasamentos teóricos e considerações utilizadas para abordagem do problema principal do estudo: a modelagem de um sistema de freio pneumático utilizando métodos numéricos.

### ***1.2.1 Modelo de Freio Pneumático a Ar Direto***

O Modelo de Freio Pneumático a Ar Direto foi desenvolvido em 1869, por George Westinghouse e se baseia na ativação manual da alavanca de freio pelo maquinista, com transferência direta de ar comprimido do reservatório principal de ar para os cilindros de freio.

O maquinista deve acionar a alavanca de freio com a intensidade adequada para realização da frenagem, pois a pressão aplicada nos cilindros de freio é proporcional à força empregada pelo maquinista na alavanca. Um modelo simplificado do sistema de freios a ar direto pode ser observado na Figura 1.1.

Figura 1 - Modelo de freio pneumático a ar direto



Fonte: <http://calloni-models.blogspot.com/2018/10/como-funcionam-os-freios-de-vagoes-de.html>

O funcionamento desse modelo é baseado nas diferenças de pressão entre o reservatório principal (2) e os cilindros de freio (1), que recebem um incremento de pressão conforme a liberação da passagem quando o maquinista aciona a alavanca de freio (3). O reservatório principal é alimentado por um compressor (1) e apresenta diferença de pressão em relação ao cilindro de freio.

Quando a alavanca é acionada, há liberação da passagem de ar comprimido, que é encaminhado ao encanamento principal (4) e, deste, é distribuído aos cilindros de freio dos vagões (5). O incremento da pressão nos reservatórios dos cilindros de freio impulsiona um pistão, que pressiona a sapata dos freios nas rodas e o atrito entre a sapata e a roda promove a parada da locomotiva.

A principal desvantagem desse modelo é o acionamento assíncrono dos cilindros de freio devido às diferentes distâncias destes em relação ao reservatório principal. A maior consequência dessa limitação é a frenagem tardia dos últimos vagões, de modo que podem ocorrer choques nos elementos de conexão entre os vagões.

Isso implica que uma frenagem emergencial em alta velocidade pode gerar choques intensos capazes de danificar a estrutura e causar acidentes. Além disso, esse modelo é totalmente comprometido caso haja uma ruptura do encanamento geral, tornando necessária a elaboração de uma alternativa mais segura.

## 2 OBJETIVOS

O objetivo do presente relatório é a elaboração de um modelo matemático de um sistema de freios pneumáticos a ar direto para estudar o comportamento da pressão nos reservatórios dos cilindros de freio sob ação de uma excitação do tipo degrau. Essa excitação corresponde ao momento em que o maquinista aciona a manivela de freio e libera a passagem para o escoamento do fluido de trabalho (ar seco) aos cilindros de freio.

Para efeito de comparação, serão elaborados dois modelos-base: o primeiro será composto por cilindros de freio modelados desconsiderando a movimentação do pistão em seu interior, de forma que o cilindro será considerado de volume fixo; no segundo modelo será considerada a movimentação do pistão, um modelo mais próximo da realidade.

Pretende-se, ao final do relatório, realizar uma comparação dos resultados obtidos entre os dois modelos e prosseguir com uma análise mais detalhada do modelo que mais se aproxima da realidade (cilindros de volume variável), aplicando os métodos de análise do sistema.

Além disso, um dos principais pontos que se pretende observar é se os cilindros de freio de ambos os modelos apresentam a defasagem de resposta apresentada experimentalmente. Sabe-se que conforme há o distanciamento do  $i$ -ésimo cilindro do reservatório principal, há aumento do tempo para obtenção da posição de equilíbrio.

Como o sistema a ar direto implica assincronicidade na frenagem dos vagões devido às diferentes posições dos cilindros de freio relativos ao reservatório principal, um dos objetivos será analisar e avaliar esse fenômeno e suas consequências para a frenagem dos vagões.

### **3 MOTIVAÇÃO**

A elaboração do estudo sobre o sistema de freios pneumáticos de locomotivas apresenta como grande motivação a importância dessa matriz de transporte para a construção e desenvolvimento do Brasil e, principalmente, o expressivo potencial inexplorado que pode ser desenvolvido e complementado e ter importante papel para o transporte de cargas e pessoas pelo território nacional.

Como já foi introduzido, a estrutura geológica do Brasil, que abrange imensas áreas de planícies e planaltos, bem como sua expressiva extensão territorial, são fatores favoráveis à expansão da malha ferroviária. Ademais, o relativo baixo custo e possibilidade de transporte de grandes volumes é outra vantagem apresentada para incorporação desse modal, tanto para o transporte de cargas como de pessoas.

Dessa forma, a realização de pesquisas na área é extremamente importante para o desenvolvimento e aprimoramento de tecnologias que podem ser úteis para a possível viabilização da expansão da matriz ferroviária pelo Brasil nos anos futuros.

#### 4 CONSIDERAÇÕES PARA MODELAGEM

A fim de iniciar o desenvolvimento da modelagem do sistema adotado no presente relatório, torna-se necessário demonstrar as considerações que foram adotadas para o modelo que será submetido à análise e as consequências que tais simplificações apresentam para os resultados futuros.

O modelo adotado consiste em um Sistema de Freio Pneumático a Ar Direto, para demonstrar justamente as consequências da aplicação desse sistema em uma locomotiva com  $n$  vagões e analisar como as pressões variam com o tempo nos reservatórios em diferentes vagões.

O reservatório principal será considerado de volume infinito e terá uma pressão  $P_0$ , que será modelada como a única entrada do sistema, do tipo degrau. Com essa consideração, elimina-se a necessidade de modelar o compressor de alimentação do sistema. Dessa forma, todo o sistema estará à uma pressão inicial e, a partir de um instante de tempo (que representa o momento do acionamento da manivela de freio), será alimentado pela entrada degrau  $P_0$ .

Além disso, o modelo será responsável por simular uma frenagem apenas, dispensando a necessidade de modelar um sistema de alívio dos cilindros de freio para a atmosfera, necessário para a continuidade de um sistema real para realização de uma segunda frenagem.

Relativo ao fluido empregado na modelagem, o ar será considerado como um gás ideal e que escoar em regime permanente. O escoamento do fluido nas tubulações será considerado laminar, de modo que:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} < 2100 - (4.1)$$

Onde:  $\rho$  = massa específica do fluido;  $v$  = velocidade do escoamento;  $D$  = diâmetro do tubo e  $\mu$  = viscosidade dinâmica do fluido.

Assim, o fator de atrito  $f$  pode ser aproximado por:

$$f = \frac{64}{Re} - (4.2)$$

Em que  $Re$  é o número de Reynolds. Considerar-se-á que o processo de transferência de ar comprimido ocorrerá de forma isotérmica. Percebe-se, portanto, que o sistema apresenta simplificações que impedem a proximidade dos resultados obtidos com a realidade.

## 5 EMBASAMENTO TEÓRICO

É interessante destacar e analisar o embasamento teórico utilizado para o equacionamento do problema, a fim de explicitar as teorias utilizadas como base para obtenção das equações que regem os modelos desenvolvidos.

### 5.1 Número de Reynolds

Trata-se de um adimensional utilizado para definir o regime de escoamento de um fluido em laminar, transiente e turbulento. O número de Reynolds é calculado por:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (5.1)$$

Para avaliar o regime de escoamento, é utilizada a seguinte relação:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < Re < 2100 \rightarrow \text{Laminar (caso considerado no estudo)} \\ 2100 < Re < 4000 \rightarrow \text{Transiente} \\ 4000 < Re \rightarrow \text{Turbulento} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

### 5.2 Teorema do Transporte de Reynolds

O Teorema do Transporte de Reynolds é uma abordagem que analisa a variação temporal de propriedades extensivas de um sistema ( $S$ ) através da consideração de um volume de controle ( $\forall_C$ ) fixo no espaço. Esse teorema aborda as propriedades extensivas ( $N$ ) e intensivas ( $\eta$ ) de um sistema, em que as propriedades extensivas são aquelas dependentes da quantidade de massa ( $m$ ) que compõe o sistema, enquanto as intensivas são independentes. A relação entre essas propriedades é dada por:

$$N = \int_{m_{sist}} \eta dm = \int_{\forall_C} \eta \rho d\forall$$

A equação do Teorema do Transporte de Reynolds é dada por:

$$\frac{dN}{dt}_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_C} \eta \rho d\forall + \int_{S_C} \eta \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Em que  $\vec{v}$  é o vetor velocidade do fluido;  $\vec{n}$  é um vetor unitário perpendicular à seção do volume de controle (no caso, a entrada e saída do encanamento);  $\forall$  é a notação para volume e  $\forall c$  e  $S_c$  são, respectivamente, relativos à volume de controle e superfície de controle.

### 5.3 Equação da Continuidade

A equação da continuidade é uma das mais importantes equações conservativas utilizadas para análise de escoamentos e também é proveniente do Teorema do Transporte de Reynolds, com  $N = m$  e  $\eta = \frac{m}{m} = 1$ . Dessa forma, obtém-se:

$$\frac{dm}{dt}_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall c} \rho d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Para os casos estudados na abordagem utilizada para composição dos modelos, adota-se um regime permanente de escoamento, o que significa que as propriedades não variam com o tempo. Dessa forma, a expressão acima é simplificada para:

$$\int_{S_c} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Sabe-se que, no modelo considerado, o fluido é incompressível,  $\vec{v} // \vec{n}$  para as entradas e saídas dos dutos, as propriedades são uniformes para as seções de entrada e saída e o diâmetro do duto não varia. Obtém-se, portanto:

$$\int_{S_c} \vec{v} \cdot \vec{n} dS \rightarrow \sum Q_{\text{entrada}} = \sum Q_{\text{saída}}, \text{ onde } Q \text{ é a vazão}$$

### 5.4 Equação da Energia e Perda de Carga

A equação da Energia para escoamento é proveniente do Teorema do Transporte de Reynolds, com  $N = E$  (energia do sistema) e  $\eta = e = \frac{E}{m}$  (energia específica), válida para um volume de controle, que, no caso do modelo considerado, é o duto. O Teorema do Transporte de Reynolds para  $N = E$  e  $\eta = e = \frac{E}{m}$  é descrito por:

$$\frac{dE}{dt}_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_C} e \rho dV + \int_{S_C} e \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Utilizando as devidas simplificações e considerações expostas para o caso modelado, a Equação da Energia pode ser transformada em:

$$H_s - H_e = \frac{W_m}{\gamma Q} - \frac{W_a}{\gamma Q}$$

Em que  $H_i$  é a carga na seção  $i$  (no caso entrada e saída do volume de controle);  $W_m$  e  $W_a$  representam, respectivamente, o trabalho realizado por máquinas e a perda de carga por atrito, ambos em  $[W]$ ;  $\gamma$  é o peso específico do fluido. Para chegar no estado final da equação da energia utilizada para o modelo e as simplificações adotadas em sua construção, utiliza-se as seguintes relações:

$$H_i = \frac{\alpha_i v_i^2}{2g} + \frac{P_i}{\gamma} + z_i \text{ (carga na seção } i\text{); } \alpha = 2 \text{ (regime laminar)}$$

$$z_i = 0 \text{ (cota de altura desprezível)}$$

$$h_{ab} = \frac{W_a}{\gamma Q} = f \frac{v_{ab}^2 L_{ab}}{2Dg} \text{ (perda de carga entre as seções a e b)}$$

$$W_m = 0 \text{ (não há trabalho de máquinas)}$$

Onde  $g$  é a aceleração da gravidade em  $[m/s^2]$ . Dessa forma, obtém-se a expressão da equação da energia do sistema em termos da perda carga sofrida no encanamento:

$$H_e - H_s = \frac{W_a}{\gamma Q} = h_{e-s}$$

## 5.5 Resistência e Capacitância Pneumáticas

Outro método de análise de sistemas fluídicos e pneumáticos é a utilização dos conceitos de resistência e capacitância, análogos aos sistemas elétricos.

### 5.5.1 Resistência Pneumática

A partir da equação da perda de carga para regime laminar, é possível escrever a perda de carga como queda de pressão e  $Q = \frac{\dot{m}}{\rho}$ :

$$h_{ab} = f \frac{v_{ab}^2 L_{ab}}{2Dg} \rightarrow \text{(escoamento de Hagen - Pouseuille laminar)} \rightarrow \Delta P = \frac{128 \mu L_{ab} Q}{\pi d^4}$$

A resistência pneumática é definida como:

$$R = \frac{dP}{d\dot{m}} \rightarrow \Delta P = \dot{m}R \rightarrow \Delta P = \frac{128\mu L_{ab} \frac{\dot{m}}{\rho}}{\pi d^4} \rightarrow \Delta P = \dot{m} \frac{128\mu L_{ab}}{\pi d^4 \rho}$$

$$\therefore R = \frac{128\mu L_{ab}}{\pi d^4 \rho} \quad (5.3)$$

Além disso, escrevendo  $\rho = \frac{P}{RT}$ , pode-se obter a variação de pressão em função da pressão na seção:

$$\Delta P = \dot{m} \frac{128\mu L_{ab}}{\pi d^4 \frac{P}{RT}} \quad (5.4)$$

### 5.5.2 Capacitância Pneumática

A capacitância pneumática é definida como:

$$C = C_v + C_p = \left( \rho \frac{dV}{dt} + \frac{V}{RT} \right) \quad (5.5)$$

Em que  $C_v$  é a capacitância devido à variação do volume de controle e  $C_p$  é a capacitância devido aos efeitos de compressibilidade do fluido. A partir da equação da continuidade e da hipótese estabelecida de processo isotérmico, é possível construir a seguinte relação:

$$\rho = \frac{P}{RT} \rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{dP}{RT}$$

Em termos da vazão mássica, obtém-se:

$$\dot{m} = (C_v + C_p) \left( \frac{dP}{dt} \right) \quad (5.6)$$

## 6 MODELAGEM

O objetivo deste t3pico 3 demonstrar os modelos que foram constru3dos com o prop3sito de simular o modelo sob efeito da entrada degrau de press3o P0. Ser3o determinadas suas caracter3sticas e as considera33es adotadas para sua constru33o, a fim de, posteriormente, avaliar os impactos no resultado final e determinar o modelo que mais se aproximou do resultado esperado para um sistema real.

Dessa forma, a op33o escolhida foi criar alguns tipos de modelos, que variam em complexidade e estudar o comportamento da press3o e do deslocamento dos pist3es (no caso de volume vari3vel). Assim, 3 poss3vel visualizar como as particularidades de cada modelo refletem no resultado do comportamento da press3o nos cilindros. A abordagem utilizada ser3 iniciar o estudo pelo modelo mais simples poss3vel e aumentar sua complexidade nos modelos seguintes.

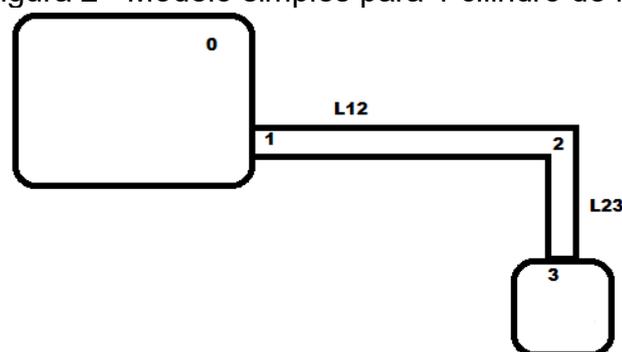
### 6.1 Cilindros de Freio de Volume Fixo

Nesta se33o ser3o apresentados os modelos para os cilindros de freio de volume fixo.

#### 6.1.1 1 Cilindro

Assume-se que o cilindro de freio possui volume fixo e sem perda de carga localizada. Trata-se de um modelo simples. Para iniciar a modelagem do sistema descrito no t3pico anterior, optou-se por, primeiramente, realizar a modelagem de um sistema com apenas um cilindro de freio, conforme a Figura 6.1.

Figura 2 - Modelo simples para 1 cilindro de freio



Fonte: Autores

As seções 0, 1, 2 e 3, representam, respectivamente, o reservatório principal, a entrada do encanamento principal, uma curvatura no encanamento principal e a entrada do reservatório do cilindro de freio.  $L_{12}$  e  $L_{23}$  são as distâncias entre as seções 1-2 e 2-3, respectivamente.

O sistema é extremamente simples e representa o momento em que o maquinista acionou a alavanca de freio, permitindo a passagem do ar do reservatório principal de volume  $V_0$  para o reservatório de volume  $V$ .

Partindo ao equacionamento do sistema e levando em conta as considerações de regime laminar, escoamento permanente e gás ideal, pode-se utilizar diretamente a equação de *Hagen – Pouseuille* entre a seção 3 e a seção 0:

$$P_0 - P_3 = \frac{128\mu L_{3-0}Q}{\pi d^4}$$

Fazendo  $Q = \frac{\dot{m}}{\rho}$  (vazão que chega na seção 3):

$$P_0 - P_3 = \frac{128\mu L_{3-0}}{\pi d^4} \frac{\dot{m}}{\rho}; \rho = \frac{P_3}{RT}$$

Por fim, obtém-se:

$$P_0 - P_3 = \dot{m} \frac{128\mu L_{3-0}}{\pi d^4} \frac{RT}{P_3} \quad (6.1)$$

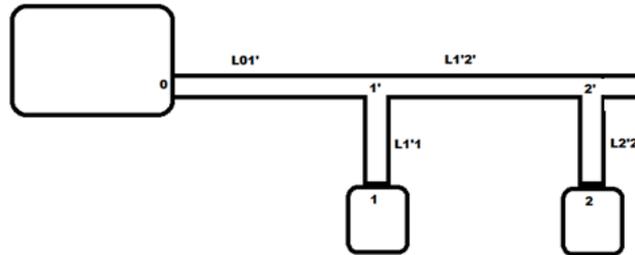
A partir da equação (5.6), que relaciona a vazão mássica com as capacitâncias pneumáticas e com a variação temporal da pressão, sendo  $C_v = 0$  (volume fixo), a equação final é:

$$\frac{dP_3}{dt} = \frac{P_3(P_0 - P_3)\pi d^4}{128\mu L_{3-0}V_3} \quad (6.2)$$

### 6.1.2 2 Cilindros

Assumindo as mesmas hipóteses do caso anterior, foi adicionado um cilindro ao sistema para melhorar a abordagem proposta, conforme a Figura 6.2.

Figura 3 - Modelo simples para 2 cilindros de freio



Fonte: Autores

Para o desenvolvimento organizado do equacionamento do modelo proposto para dois cilindros de freio, optou-se por utilizar os conceitos de resistência e capacitância fluídicas, a fim de simplificar o desenvolvimento do equacionamento. Pela equação dos gases ideais, sendo  $m$  a massa de ar,  $R$  a constante particular do ar e  $T$  a temperatura absoluta:

$$PV = mRT - (6.3)$$

Pelas hipóteses adotadas, o processo é isotérmico e o volume é sempre constante. Utilizando as equações das Capacitâncias Pneumáticas.

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = \dot{m}_1 \frac{RT}{V_1} = \frac{\dot{m}_1}{C_1} - (6.4)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = \dot{m}_2 \frac{RT}{V_2} = \frac{\dot{m}_2}{C_2} - (6.5)$$

A variável  $C_i$  representa a capacitância pneumática para o reservatório  $i$ . Usando as equações que relacionam a variação de pressão com a vazão mássica e a Resistência Pneumática, apresentadas no tópico **5.5.1**:

$$P_{1'} - P_1 = \dot{m}_1 R_{1'-1} - (6.6)$$

$$P_{2'} - P_2 = \dot{m}_2 R_{2'-2} - (6.7)$$

Juntando as expressões desenvolvidas até o momento, é possível obter a relação entre a variação temporal das pressões no  $i$  – ésimo reservatório com o decaimento das pressões nos dutos de comprimento  $Li'i$ . Obtém-se, então uma expressão que permite calcular as pressões nos reservatórios 1 e 2:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{(P_{i'} - P_i)}{CiR_{i'-i}} - (6.8)$$

Para concluir a representação total do modelo, é necessário obter as expressões que relacionam a variação temporal das pressões nas seções  $i'$  (bifurcações da tubulação). Pode-se obter essas relações considerando que as seções de bifurcação atuam como “reservatórios”, possuindo um volume simbólico  $V_{i'}$ , bem como capacitância pneumática  $C_{i'}$  e vazão mássica  $\dot{m}_{i'}$ . Como estão sendo representados por reservatórios, vale aplicar:

$$\frac{\partial P_{1'}}{\partial t} = \dot{m}_{1'} \frac{RT}{V_{1'}} = \frac{\dot{m}_{1'}}{C_{1'}} \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial P_{2'}}{\partial t} = \dot{m}_{2'} \frac{RT}{V_{2'}} = \frac{\dot{m}_{2'}}{C_{2'}} \quad (6.10)$$

Da mesma maneira que foi feito para obter os decaimentos de pressão entre  $i'$  e  $i$  utilizando as equações de perda de carga, também é possível realizar esse mesmo procedimento para obter os decaimentos de pressão entre 0 e 1' e entre 1' e 2'. Ao final, obtém-se as expressões (6.21) e (6.22) em termos de vazão mássica e resistência fluidica:

$$P_0 - P_{1'} = (\dot{m}_2 + \dot{m}_{2'} + \dot{m}_1 + \dot{m}_{1'})R_{0-1'} \quad (6.11)$$

$$P_{1'} - P_{2'} = (\dot{m}_2 + \dot{m}_{2'})R_{1'-2'} \quad (6.12)$$

Sabendo que:

$$\dot{m}_i = \frac{Vi}{RT} \frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{(P_{i'} - P_i)}{R_{i'-i}} \quad (6.13)$$

$$\dot{m}_{i'} = C_{i'} \frac{\partial P_{i'}}{\partial t} \quad (6.14)$$

Portanto:

$$\frac{\partial P_{2'}}{\partial t} = \left[ P_{1'} - P_{2'} - (P_{2'} - P_2) \frac{R_{1'-2'}}{R_{2'-2'}} \right] \frac{1}{C_{2'} R_{1'-2'}} \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial P_{1'}}{\partial t} = \frac{(P_0 - P_{1'})}{R_{01'} C_{1'}} - \frac{(P_{1'} - P_1)}{R_{1'1} C_{1'}} - \frac{(P_{1'} - P_2)}{R_{1'2'} C_{1'}} \quad (6.16)$$

Com as expressões que relacionam as variações temporais de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_{1'}$  e  $P_{2'}$ , é possível obter o sistema de equações que rege o modelo para realizar a integração numérica. Esse sistema é dado por 4 variáveis ( $P_1, P_2, P_{1'}, P_{2'}$ ):

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{\pi d^4 P_1 (P_{1'} - P_1)}{V_1 L_{11'} 128 \mu} \quad (6.17)$$

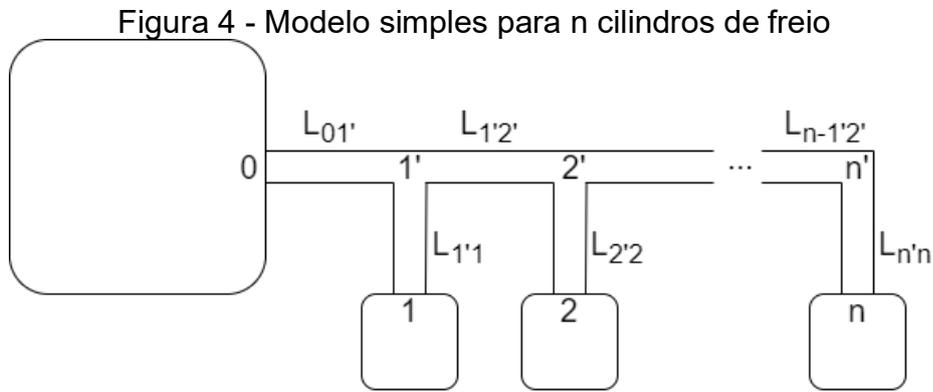
$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{\pi d^4 P_2 (P_{2'} - P_2)}{V_2 L_{22'} 128 \mu} \quad (6.18)$$

$$\frac{dP_{2'}}{dt} = \frac{(P_{1'} - P_{2'})P_{2'}\pi d^4}{128\mu L_{2'1'}V_{2'}} - \frac{(P_{2'} - P_2)P_2\pi d^4}{128\mu L_{2'2}V_{2'}} - (6.19)$$

$$\frac{dP_{1'}}{dt} = \frac{(P_0 - P_{1'})P_{1'}\pi d^4}{128\mu L_{01'}V_{1'}} - \frac{(P_{1'} - P_1)P_1\pi d^4}{128\mu L_{11'}V_{1'}} - \frac{(P_{1'} - P_{2'})P_{2'}\pi d^4}{128\mu L_{1'2'}V_{1'}} - (6.20)$$

### 6.1.3 n Cilindros

Para o desenvolvimento do equacionamento deste modelo, apresentado na Figura 6.3, utiliza-se a mesma abordagem usada para o equacionamento do modelo simples de 2 cilindros de freio.



Fonte: Autores

Desta forma, para as considerações anteriores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{(P_{i'} - P_i)}{C_i R_{i'-i}} \\ P_{i'} - P_i = \dot{m}_i R_{i'-i} \\ \frac{\partial P_{i'}}{\partial t} = \dot{m}_{i'} \frac{RT}{V_{i'}} = \frac{\dot{m}_{i'}}{C_{i'}} \end{array} \right. \quad (\text{para o } i - \text{ésimo reservatório}) - (6.21)$$

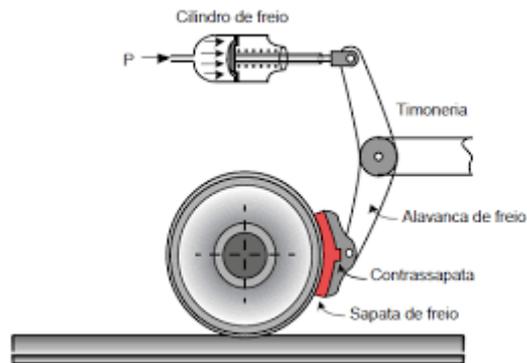
$$P_{i'-1} - P_{i'} = \left( \sum_{j=i}^n \dot{m}_j + \dot{m}_{i'} \right) R_{(i-1)'-i'}$$

Utilizando as expressões acima, é possível realizar o mesmo procedimento utilizado para 2 cilindros e obter as equações que regem o sistema. Para o presente relatório, utilizou-se um modelo com  $n = 3$  cilindros para realizar a simulação pelo software Scilab.

## 6.2 Cilindros de Freio de Volume Variável

Para o modelo em que se considera que há movimento dos pistões do cilindro de freio e, portanto, variação do volume dos mesmos, o número de variáveis consideradas aumenta consideravelmente. É necessário modelar, além do sistema de transmissão pneumático, a dinâmica dos pistões. Observou-se que os cilindros de freio reais são da seguinte maneira:

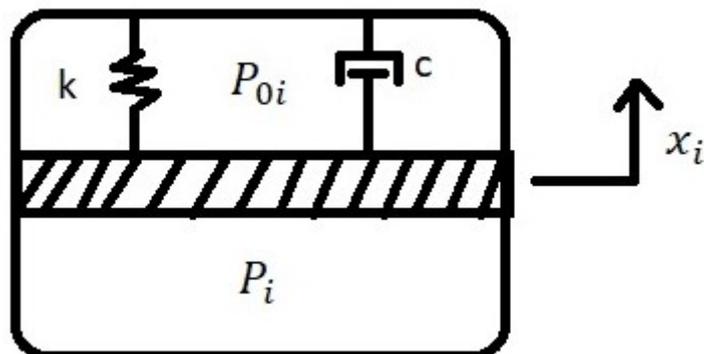
Figura 5 - Cilindro de freio de locomotivas



Fonte: <http://transportes.ime.eb.br/etfc/monografias/MON113.pdf>

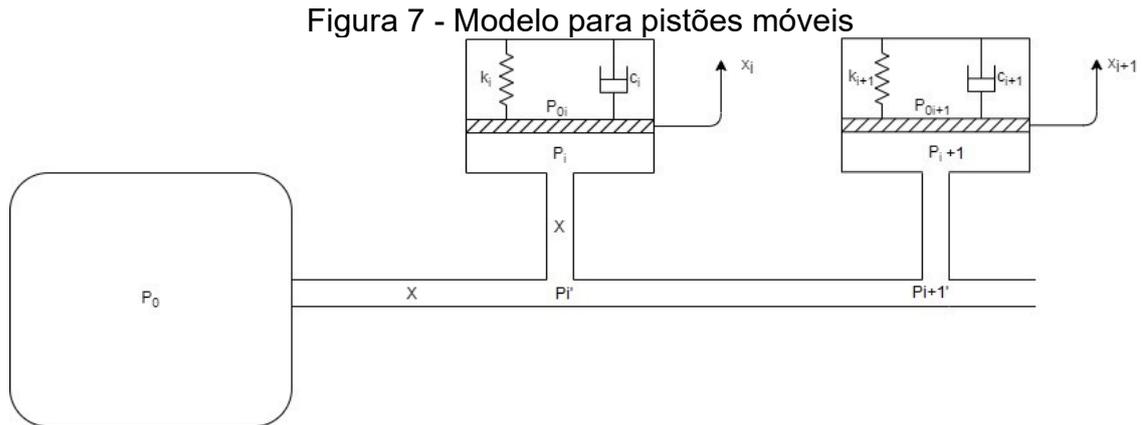
Percebe-se que há uma mola na atuação do cilindro de freio. Além disso, há alívio de pressão do cilindro para a tubulação geral e atrito entre as paredes do pistão com a superfície do cilindro. Para a modelagem realizada, desconsiderou-se o alívio existente entre o cilindro e a tubulação, de forma que o cilindro de freio é completamente fechado, sem saída de fluido de seu interior. O modelo de cilindro construído é:

Figura 6 - Modelo de cilindro



Fonte: autores

A pressão  $P_i$  é a pressão no  $i$  – ésimo cilindro e é alimentada pelo sistema pneumático. A pressão  $P_{0i}$  é a pressão que o ar realiza na parte superior do cilindro. A constante elástica  $k$  representa a mola existente no modelo real e o coeficiente de amortecimento  $c$  representa o atrito viscoso realizado pelo fluido de lubrificação. O modelo completo (sistemas pneumático e dinâmico dos pistões) pode ser observado abaixo:



Fonte: Autores

As equações para o modelo pneumático são semelhantes ao realizado para o cilindro de volume fixo. Da mesma forma, utiliza-se o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_i}{\partial t} = \dot{m}_i \frac{RT}{V_i} = \frac{\dot{m}_i}{C_i} \\ P_{i'} - P_i = \dot{m}_i R_{i'-i} \\ \frac{\partial P_{i'}}{\partial t} = \dot{m}_{i'} \frac{RT}{V_{i'}} = \frac{\dot{m}_{i'}}{C_{i'}} \\ P_{i'-1} - P_{i'} = \left( \sum_{j=i}^n \dot{m}_j + \dot{m}_{i'} \right) R_{(i-1)'-i'} \end{array} \right. \quad (\text{para o } i - \text{ésimo reservatório}) - (6.22)$$

A diferença é que o volume para o  $i$  – ésimo cilindro será dado por:

$$V_i = A_{pistão} x_i - (6.23)$$

Para o movimento do  $i$  – ésimo pistão, utiliza-se o TMB (Teorema do movimento do Baricentro):

$$M_{pistão} \ddot{x}_i = (P_i(t) - P_{0i}(t)) A_{pistão} - k x_i - c \dot{x}_i - (6.24)$$

A pressão  $P_i(t)$  é obtida pela integração numérica e a pressão  $P_{0i}(t)$  pode ser determinada em função do movimento do cilindro. Como o fluido considerado é ar (gás ideal), tem-se que, para um processo isotérmico (que está sendo considerado nas hipóteses do problema), vale a relação:

$$P_{0i_0} V_{0i_0} = P_{0i}(t) V_{0i}(t) - (6.25)$$

Em que:

- $P_{0i_0}$  é a pressão inicial na parte superior do pistão;
- $V_{0i_0}$  é o volume inicial da parte superior do pistão;
- $P_{0i}(t)$  é a pressão em um instante  $t$  na parte superior do pistão;
- $V_{0i}(t)$  é o volume da parte superior do pistão em um instante  $t$  e representa  $V_{0i_0}$  subtraído o volume deslocado pelo pistão.

Antes de aplicar a entrada do sistema ( $P_0 - \text{degrau}$ ), todas as seções apresentam mesma pressão, denominada  $P_{inicial}$  e o volume da parte superior do pistão será denominado  $V_{inicial}$ . Assumiremos que o pistão se encontra, em  $t = 0$  na posição  $x_i(0) = 0.2$  e que  $P_{inicial} = P_{atm} + 38 \text{ kPa}$ . Pela lei exposta acima, vale:

$$P_{0i}(t) = P_{inicial} \frac{V_{inicial}}{V_{inicial} - (x_i - 0.2)A_{pistão}} - (6.26)$$

Obtém-se, portanto:

$$M_{pistão} \ddot{x}_i = \left( P_i(t) - P_{inicial} \frac{V_{inicial}}{V_{inicial} - (x_i - 0.2)A_{pistão}} \right) A_{pistão} - kx_i - c\dot{x}_i - (6.27)$$

## 7 RESULTADOS PARA MODELOS NÃO LINEARES

Neste capítulo serão apresentados os resultados das simulações dos modelos matemáticos expostos nos tópicos anteriores. É importante ressaltar que todos os gráficos gerados e o código escrito foram elaborados com o auxílio do programa Scilab. A apresentação dos dados obtidos visa embasar as conclusões do trabalho e a validade dos modelos estabelecidos.

### 7.1 Parâmetros

Os parâmetros considerados tanto para os modelos com volume fixo quanto para os modelos com volume variável foram:

- $D_{pistão} = 0.56 \text{ m}$  (diâmetro pistão);
- $x_i(t = 0) = 0.2 \text{ m}$  (posição inicial do pistão);
- $L_M = 14 \text{ m}$  (distância entre bifurcações da tubulação);
- $L_m = 2 \text{ m}$  (distância entre a tubulação principal e o cilindro de freio  $i$ );
- $d = 0.03 \text{ m}$  (diâmetro da tubulação);
- $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ;
- $c = 50 \text{ N} \frac{\text{s}}{\text{m}}$ ;
- $\mu = 18.325 \times 10^{-6}$  (viscosidade dinâmica do ar);
- $T = 300 \text{ K}$ ;
- $R = 0.287$  (constante dos gases);
- $P_{atm} = 101 \text{ kPa}$ ;
- $P_{inicial} = P_{atm} + 38 \text{ kPa}$ ;
- $A_{pistão} = \frac{\pi D_{pistão}^2}{4} \text{ m}^2$ ;
- $V_{inicial} = 0.04926 \text{ m}^3$  (da parte superior do pistão);
- $V_{PC} = d^2 \frac{\pi}{4} L_{i'-i+1'} \text{ m}^3$  (volume equivalente adotado nas bifurcações);
- $m = 0.5 \text{ kg}$  (massa pistão);
- $P_0$  (entrada de grau em  $t = 0.5 \text{ s}$ ) =  $P_{inicial} + 200 \text{ kPa}$ .

**Condições Iniciais escolhidas:**  $x_i = 0.2$ ;  $\dot{x}_i = 0$ ;  $P_i = P_{inicial}$  e  $P_{i'} = P_{inicial}$ .

### OBSERVAÇÕES:

- Para o caso de cilindro de volume fixo,  $x_i(t = 0) = 0.2m$  corresponde à altura do cilindro de freio, de modo que:

$$V_i = \frac{D_{pistão}^2 \pi}{4} x_i(t = 0) = cte \text{ (volume do cilindro de freio fixo)}$$

- Valores de  $k$  e  $c$  foram escolhidos por meio de testes nas simulações, uma vez que não foram encontrados valores na literatura.

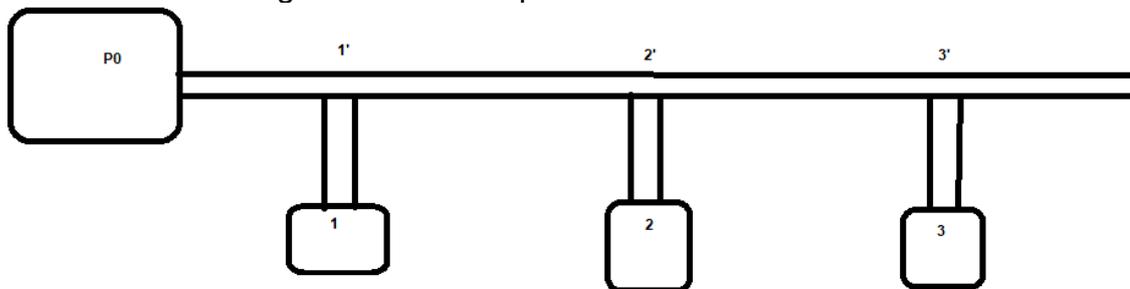
## 7.2 Modelo com cilindro de freio de volume fixo

Nesta seção serão apresentados e discutidos os resultados das simulações para os modelos de cilindros de freio com volume fixo.

### 7.2.1 $n = 3$ Cilindros de Freio

O modelo, mostrado na Figura 8, foi realizado para  $n = 3$  cilindros, uma vez que apresenta um número considerável de variáveis ( $P_1, P_2, P_3, P_{1'}, P_{2'}, P_{3'}$ ) e já permite observar a relação de atraso entre os diferentes cilindros.

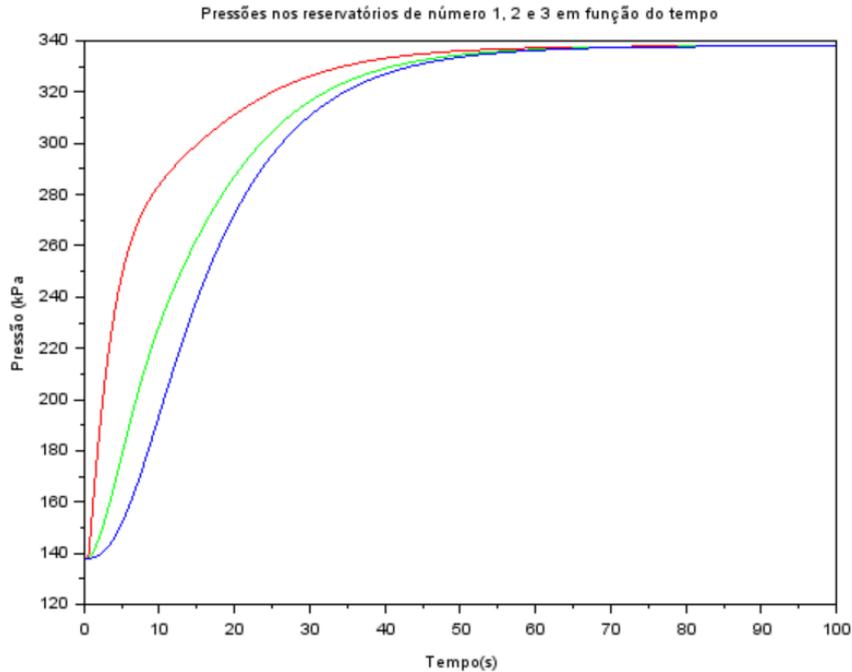
Figura 8 – Modelo para  $n=3$  cilindros de freio



Fonte: Autores

Esse atraso é observado pela defasagem de comportamento das pressões nos diferentes cilindros, de modo que quanto mais distante do reservatório principal de pressão  $P_0$ , maior o tempo para que o cilindro atinja a pressão de equilíbrio ( $P_0$ ). Os resultados obtidos são apresentados no Gráfico 1 para as pressões nos cilindros em função do tempo.

Gráfico 1 - Pressões nos cilindros 1, 2 e 3 em função do tempo



Fonte: Autores

No gráfico são observadas o comportamento das pressões nos cilindros 1 (vermelho), 2 (verde) e 3 (azul). Percebe-se que houve a defasagem esperada dos cilindros mais distantes, mas que todos atingiram o equilíbrio após intervalos de tempo distintos.

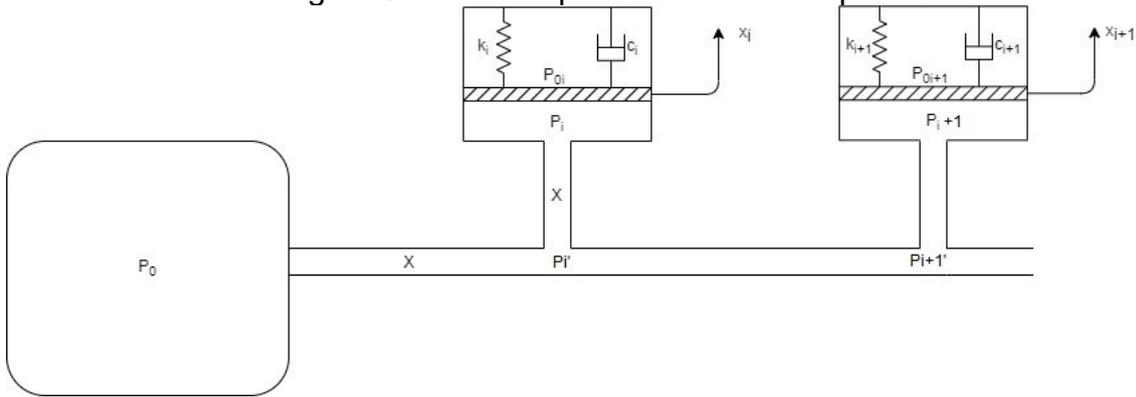
### 7.3 Modelo com cilindro de freio de volume variável

Nesta seção serão apresentados e discutidos os resultados das simulações para os modelos de cilindros de freio com volume variável.

#### 7.3.1. $n = 2$ Cilindros com pistão

O modelo da Figura 9 apresenta o maior grau de complexidade e representa mais fielmente os resultados práticos obtidos. A ideia inicial era obter os resultados gráficos para  $n = 3$  cilindros, mas a grande quantidade de variáveis (12) foge do escopo do curso. Portanto, optou-se por realizar a simulação para o modelo com 2 cilindros e 2 pistões, totalizando 8 variáveis de análise para o problema  $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, P_1, P_2, P_{1'}, P_{2'})$ .

Figura 9 - Modelos para 2 cilindros e 2 pistões



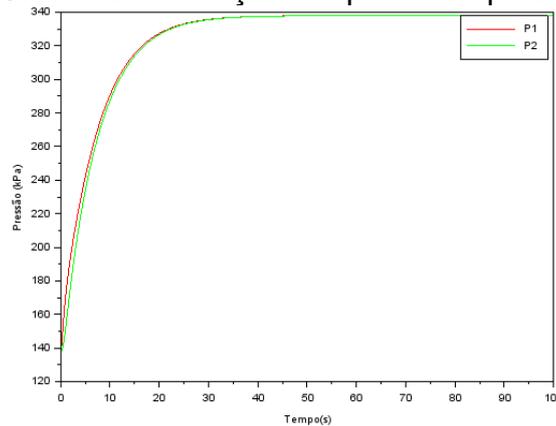
Fonte: Autores

Esse modelo será o utilizado para embasar as próximas análises (Linearização, Função de Transferência, Diagramas de Bode etc.). Dessa maneira, será apresentado detalhadamente o conjunto de equações que rege o sistema. Tal equacionamento foi obtido utilizando a análise realizada no tópico 6.2.

$$\begin{aligned}
 X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \\ p_1 \\ p_2 \\ p'_1 \\ p'_2 \end{bmatrix} &\Rightarrow \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}'_1 \\ \dot{p}'_2 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \frac{A_{pistao}}{m} \left[ p_1 - \frac{p_{inicial} V_{inicial}}{V_{inicial} - (x_1 - 0,2) A_{pistao}} \right] - \frac{k}{m} x_1 - \frac{c}{m} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \frac{A_{pistao}}{m} \left[ p_2 - \frac{p_{inicial} V_{inicial}}{V_{inicial} - (x_2 - 0,2) A_{pistao}} \right] - \frac{k}{m} x_2 - \frac{c}{m} \dot{x}_2 \\ \frac{(p'_1 - p_1) p_1 \pi d^4}{128 \mu A_{pistao} x_1 L m} \\ \frac{(p'_2 - p_2) p_2 \pi d^4}{128 \mu A_{pistao} x_2 L m} \\ \frac{RT}{VPC} \left\{ \frac{(P_0 - p'_1) p'_1 \pi d^4}{128 \mu L_m RT} - \frac{(p'_2 - p_2) p_2 \pi d^4}{128 \mu L_m RT} - \frac{(p'_1 - p_1) p_1 \pi d^4}{128 \mu L_m RT} - \left[ \frac{(p'_1 - p'_2) p'_2 \pi BPD^4}{128 \mu L_m RT} - \frac{(p'_2 - p_2) p_2 \pi d^4}{128 \mu L_m RT} \right] \right\} \\ \frac{RT}{VPC} \left[ \frac{(p_1 - p'_2) p'_2 \pi d^4}{128 \mu L_m RT} - \frac{(p'_2 - p_2) p_2 \pi d^4}{128 \mu L_m RT} \right] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Com esse sistema não linear de equações, construiu-se um código no software Scilab para análise dos fenômenos discutidos de defasagem de resposta. O esperado é obter a defasagem de resposta tanto para as pressões nos reservatórios como para os deslocamentos dos pistões, de forma que o cilindro 2 e o pistão 2 estejam defasados, respectivamente, do cilindro 1 e do pistão 1. As respostas podem ser observadas no Gráfico 2.

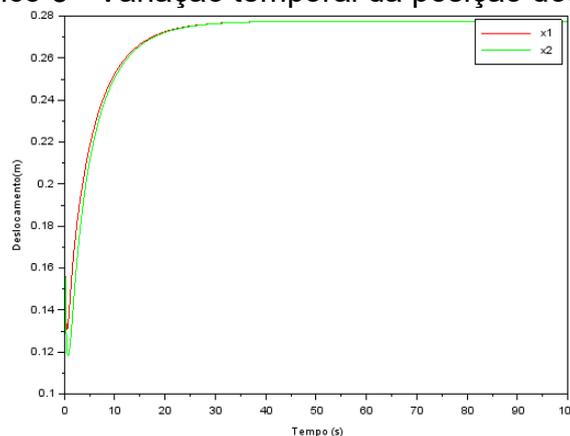
Gráfico 2 - Variação temporal das pressões



Fonte: Autores

Pode-se notar que, assim como no caso de volume fixo, o cilindro que se encontra mais próximo ao reservatório principal, nesse caso o número 1, apresenta uma resposta mais rápida que o cilindro 2. Além disso, nota-se que o sistema é estável e não apresenta oscilações bruscas que danifiquem seu funcionamento. Após cerca de 40 segundos as pressões dos dois reservatórios já tendem ao seu valor de equilíbrio ( $P_0 = P_{inicial} + 200 \text{ kPa}$ ). Obteve-se o Gráfico 3 das posições dos pistões dos cilindros 1 e 2, mostrado abaixo.

Gráfico 3 - Variação temporal da posição dos pistões

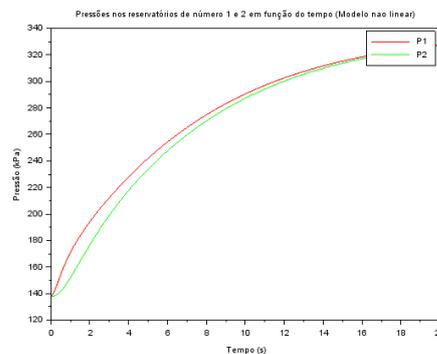


Fonte: Autores

Nesse gráfico percebe-se a alta similaridade com o gráfico das pressões nos reservatórios, que está totalmente ligado à composição das forças atuantes no sistema. Da mesma forma o primeiro pistão apresenta resposta mais rápida que o segundo, com ambos tendendo a sua posição de equilíbrio de aproximadamente  $0,277\text{ m}$  após aproximadamente 40 segundos.

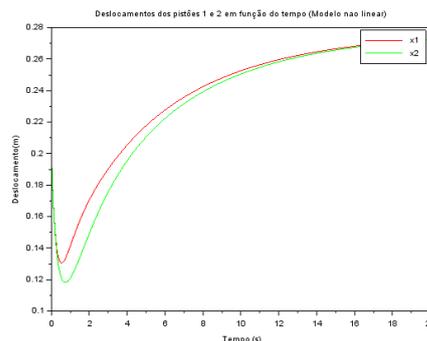
É importante notar que o pistão atinge o equilíbrio em aproximadamente  $0,277\text{ m}$  e, considerando as condições iniciais ( $x_i(0) = 0.2\text{ m}$ ) apresenta um deslocamento de, aproximadamente,  $7\text{ mm}$ . O resultado parece insignificante, mas considerando que esse deslocamento pressiona uma sapata de freio pode ser expressivo. Nos Gráficos 4 e 5 é possível analisar melhor a defasagem.

Gráfico 4 – Pressões nos reservatórios 1 e 2 em função do tempo (Não Linear)



Fonte: Autores

Gráfico 5 – Deslocamentos dos pistões 1 e 2 em função do tempo (Não Linear)



Fonte: Autores

A queda de deslocamento no pistão ocorre até que seja aplicada a entrada degrau em  $t = 0.5\text{ s}$  e é uma limitação da modelagem. Isso poderia ser facilmente corrigido por uma limitação que impedisse o deslocamento contrário dos pistões.

## 7.4 Linearização

Como já dito, será utilizado o modelo para 2 cilindros e 2 pistões para embasar a análise posterior. O sistema será exposto novamente.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \\ p_1 \\ p_2 \\ p'_1 \\ p'_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}'_1 \\ \dot{p}'_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \frac{A_{pistao}}{m} \left[ p_1 - \frac{p_{inicial} V_{inicial}}{V_{inicial} - (x_1 - 0,2) A_{pistao}} \right] - \frac{k}{m} x_1 - \frac{c}{m} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \frac{A_{pistao}}{m} \left[ p_2 - \frac{p_{inicial} V_{inicial}}{V_{inicial} - (x_2 - 0,2) A_{pistao}} \right] - \frac{k}{m} x_2 - \frac{c}{m} \dot{x}_2 \\ \frac{(p'_1 - p_1) p_1 \pi d^4}{128 \mu A_{pistao} x_1 L m} \\ \frac{(p'_2 - p_2) p_2 \pi d^4}{128 \mu A_{pistao} x_2 L m} \\ \frac{RT}{VPC} \left\{ \frac{(p_0 - p'_1) p'_1 \pi d^4}{128 \mu L_m RT} - \frac{(p'_2 - p_2) p_2 \pi d^4}{128 \mu L_m RT} - \frac{(p'_1 - p_1) p_1 \pi d^4}{128 \mu L_m RT} - \left[ \frac{(p'_1 - p'_2) p'_2 \pi B P D^4}{128 \mu L_m RT} - \frac{(p'_2 - p_2) p_2 \pi d^4}{128 \mu L_m RT} \right] \right\} \\ \frac{RT}{VPC} \left[ \frac{(p_1 - p'_2) p'_2 \pi d^4}{128 \mu L_m RT} - \frac{(p'_2 - p_2) p_2 \pi d^4}{128 \mu L_m RT} \right] \end{bmatrix}$$

As saídas escolhidas serão os deslocamentos dos pistões devido a sua relação com a frenagem pelo pressionamento das sapatas de freio para um estudo posterior:

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para facilitar a compreensão e evitar confusão com as variáveis de estado, ao invés de usar a matriz X para representá-la com os seus respectivos termos, foi usado a matriz Z como espaço de estados de entrada dada por:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{z}_6 \\ \dot{z}_7 \\ \dot{z}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}'_1 \\ \dot{p}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, u, t) \\ f_2(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, u, t) \\ f_3(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, u, t) \\ f_4(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, u, t) \\ f_5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, u, t) \\ f_6(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, u, t) \\ f_7(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, u, t) \\ f_8(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, u, t) \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, u, t) \\ g_2(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, u, t) \end{bmatrix}$$

Para realizar a linearização é feita a seguinte resolução, lembrando que a entrada U do sistema é dada pela pressão inicial  $P_0$ :

$$\dot{Z} - \dot{Z}_{eq} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \frac{\partial f_1}{\partial z_3} & \frac{\partial f_1}{\partial z_4} & \frac{\partial f_1}{\partial z_5} & \frac{\partial f_1}{\partial z_6} & \frac{\partial f_1}{\partial z_7} & \frac{\partial f_1}{\partial z_8} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \frac{\partial f_2}{\partial z_3} & \frac{\partial f_2}{\partial z_4} & \frac{\partial f_2}{\partial z_5} & \frac{\partial f_2}{\partial z_6} & \frac{\partial f_2}{\partial z_7} & \frac{\partial f_2}{\partial z_8} \\ \frac{\partial f_3}{\partial z_1} & \frac{\partial f_3}{\partial z_2} & \frac{\partial f_3}{\partial z_3} & \frac{\partial f_3}{\partial z_4} & \frac{\partial f_3}{\partial z_5} & \frac{\partial f_3}{\partial z_6} & \frac{\partial f_3}{\partial z_7} & \frac{\partial f_3}{\partial z_8} \\ \frac{\partial f_4}{\partial z_1} & \frac{\partial f_4}{\partial z_2} & \frac{\partial f_4}{\partial z_3} & \frac{\partial f_4}{\partial z_4} & \frac{\partial f_4}{\partial z_5} & \frac{\partial f_4}{\partial z_6} & \frac{\partial f_4}{\partial z_7} & \frac{\partial f_4}{\partial z_8} \\ \frac{\partial f_5}{\partial z_1} & \frac{\partial f_5}{\partial z_2} & \frac{\partial f_5}{\partial z_3} & \frac{\partial f_5}{\partial z_4} & \frac{\partial f_5}{\partial z_5} & \frac{\partial f_5}{\partial z_6} & \frac{\partial f_5}{\partial z_7} & \frac{\partial f_5}{\partial z_8} \\ \frac{\partial f_6}{\partial z_1} & \frac{\partial f_6}{\partial z_2} & \frac{\partial f_6}{\partial z_3} & \frac{\partial f_6}{\partial z_4} & \frac{\partial f_6}{\partial z_5} & \frac{\partial f_6}{\partial z_6} & \frac{\partial f_6}{\partial z_7} & \frac{\partial f_6}{\partial z_8} \\ \frac{\partial f_7}{\partial z_1} & \frac{\partial f_7}{\partial z_2} & \frac{\partial f_7}{\partial z_3} & \frac{\partial f_7}{\partial z_4} & \frac{\partial f_7}{\partial z_5} & \frac{\partial f_7}{\partial z_6} & \frac{\partial f_7}{\partial z_7} & \frac{\partial f_7}{\partial z_8} \\ \frac{\partial f_8}{\partial z_1} & \frac{\partial f_8}{\partial z_2} & \frac{\partial f_8}{\partial z_3} & \frac{\partial f_8}{\partial z_4} & \frac{\partial f_8}{\partial z_5} & \frac{\partial f_8}{\partial z_6} & \frac{\partial f_8}{\partial z_7} & \frac{\partial f_8}{\partial z_8} \end{bmatrix} (Z - Z_{eq}) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \\ \frac{\partial f_5}{\partial u} \\ \frac{\partial f_6}{\partial u} \\ \frac{\partial f_7}{\partial u} \\ \frac{\partial f_8}{\partial u} \end{bmatrix} (U - U_{eq})$$

$$Y - Y_{eq} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \frac{\partial g_1}{\partial z_2} & \frac{\partial g_1}{\partial z_3} & \frac{\partial g_1}{\partial z_4} & \frac{\partial g_1}{\partial z_5} & \frac{\partial g_1}{\partial z_6} & \frac{\partial g_1}{\partial z_7} & \frac{\partial g_1}{\partial z_8} \\ \frac{\partial g_2}{\partial z_1} & \frac{\partial g_2}{\partial z_2} & \frac{\partial g_2}{\partial z_3} & \frac{\partial g_2}{\partial z_4} & \frac{\partial g_2}{\partial z_5} & \frac{\partial g_2}{\partial z_6} & \frac{\partial g_2}{\partial z_7} & \frac{\partial g_2}{\partial z_8} \end{bmatrix} (Z - Z_{eq}) + \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} \end{bmatrix} (U - U_{eq})$$

O sistema linearizado, após aplicação do método exposto acima será, em que estão apresentadas as matrizes A, B, C e D:

$$\dot{Z} - \dot{Z}_{eq} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} - \frac{P_{inicial} V_{inicial} A^2 p_{istao}}{m(V_{aux} + (z_{1eq} - 0,2)A_{pistao})^2} & -\frac{c}{m} & 0 & 0 & \frac{A}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{m} - \frac{P_{inicial} V_{inicial} A^2 p_{istao}}{m(V_{aux} + (z_{3eq} - 0,2)A_{pistao})^2} & -\frac{c}{m} & 0 & \frac{A}{m} & 0 & 0 \\ -\frac{(z_{7eq} - z_{5eq})z_{6eq}\pi d^4}{128\mu A_{pistao} z_{1eq}^2 L m} & 0 & 0 & 0 & \frac{(z_{7eq} - 2z_{6eq})\pi d^4}{128\mu A_{pistao} z_{1eq}^2 m} & 0 & \frac{z_{6eq}\pi d^4}{128\mu A_{pistao} z_{1eq} L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(z_{8eq} - z_{6eq})z_{6eq}\pi d^4}{128\mu A_{pistao} z_{3eq}^2 L m} & 0 & 0 & \frac{(z_{8eq} - 2z_{6eq})\pi d^4}{128\mu A_{pistao} z_{3eq} L m} & 0 & \frac{z_{6eq}\pi d^4}{128\mu A_{pistao} z_{3eq} L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(z_{7eq} - 2z_{5eq})\pi d^4}{128\mu L m VPC} & 0 & \frac{(p_0 - 2z_{7eq})\pi d^4}{128\mu L m VPC} & \frac{z_{5eq}\pi d_m^4}{128\mu L m VPC} - \frac{z_{8eq}\pi d^4}{128\mu L m VPC} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(z_{8eq} - 2z_{6eq})\pi d^4}{128\mu L m VPC} & \frac{z_{8eq}\pi d^4}{128\mu L m VPC} & \frac{(z_{7eq} - z_{6eq})\pi d^4}{128\mu L m VPC} - \frac{z_{6eq}\pi d^4}{128\mu L m VPC} \end{bmatrix} (Z - Z_{eq}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{z_{2eq}\pi d_m^4}{128\mu L m VPC} \\ 0 \end{bmatrix} (U - U_{eq})$$

$$Y - Y_{eq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (Z - Z_{eq}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (U - U_{eq})$$

Calcula-se os pontos de equilíbrio do sistema, fazendo  $f_i = 0$ :

$$Z_{eq} = \begin{bmatrix} \frac{616247 - \sqrt{114741565009}}{1000000} \\ 0 \\ \frac{616247 + \sqrt{114741565009}}{1000000} \\ 0 \\ 338 \\ 338 \\ 338 \\ 338 \\ 338 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.27751 \\ 0 \\ 0.27751 \\ 0 \\ 338 \\ 338 \\ 338 \\ 338 \\ 338 \end{bmatrix}; \dot{Z}_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; Y_{eq} \approx \begin{bmatrix} 0.27751 \\ 0 \end{bmatrix}; U_{eq} = [338]$$

Utilizando os mesmos parâmetros apresentados no tópico 7.1.1, obtém-se as seguintes matrizes A, B, C e D:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1106.1908 & -100 & 0 & 0 & 0.4926017 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1106.1908 & -100 & 0 & 0.4926017 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.6823801 & 0 & 2.6823801 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.6823801 & 0 & 2.6823801 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18.52709 & 0 & -23.820545 & 2.6467272 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18.52709 & 2.6467272 & -21.173817 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.6467272 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

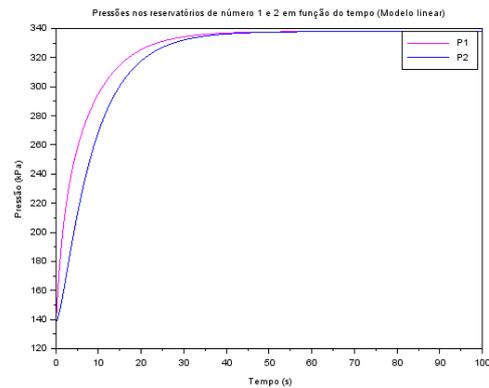
Após aplicar a linearização no sistema e escrever seu espaço de estados na forma:

$$\dot{Z} - \dot{Z}_{eq} = A(Z - Z_{eq}) + B(U - U_{eq})$$

$$Y - Y_{eq} = C(Z - Z_{eq}) + D(U - U_{eq})$$

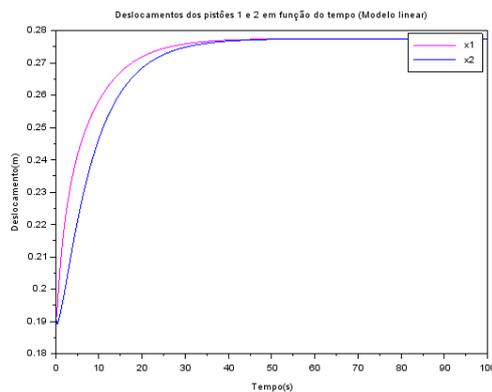
Utiliza-se o mesmo conjunto de parâmetros e condições iniciais apresentadas na seção 7.1. Os resultados gráficos para as pressões nos cilindros e deslocamento nos pistões são expostos nos Gráficos 6 e 7.

Gráfico 6 – Pressões nos reservatórios 1 e 2 em função do tempo (Modelo Linear)



Fonte: autores

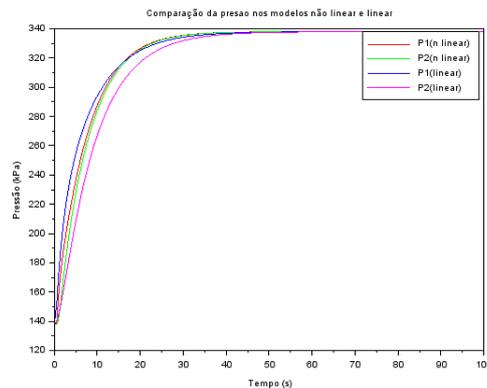
Gráfico 7 – Deslocamentos dos pistões 1 e 2 em função do tempo (Modelo Linear)



Fonte: Autores

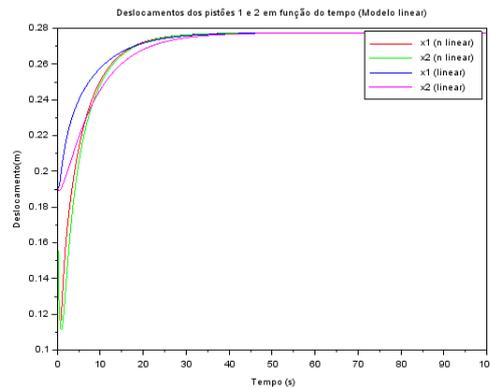
Os resultados do sistema linearizado aparentam o formato similar do sistema não linear o que valida a análise feita e a escolha dos pontos de equilíbrio. Além disso, indica a eficácia do método de linearização que conseguiu reduzir consideravelmente a complexidade do sistema. Percebe-se que os gráficos desse modelo linear apontam que o sistema caminha para o mesmo equilíbrio do modelo não linear. Os Gráficos 8 e 9 apresentam uma comparação entre os modelos linear e não linear.

Gráfico 8 - Comparação da pressão nos modelos não linear e linear



Fonte: Autores

Gráfico 9 – Deslocamentos dos pistões 1 e 2 em função do tempo (Modelo Linear)



Fonte: Autores

Com esses gráficos fica evidente que seus valores tendem ao mesmo valor depois de um determinado intervalo temporal e apresentam formato bastante semelhante. Uma diferença notável se dá no início dos gráficos de deslocamento, porque o modelo não linear apresenta termos mais sensíveis às variações resultando no retrocesso de posição, voltando a subir após a pressão de degrau aplicada em 0,5 s, distinto do que ocorre no caso linear.

Além disso, no caso linear, a diferença tão abrupta no início se deve a simplificação que se faz devido ao processo de linearização de Taylor que consegue aproximar a função muito bem para valores próximos da posição de equilíbrio, o que é constatado quando os valores e formatos dos gráficos ficam quase idênticos perto da posição final de equilíbrio.

## 8 DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Nesta seção será feita a análise da função de transferência e estudo das respostas no domínio da frequência.

### 8.1 Funções de Transferência

Após a linearização apontada no tópico anterior, obteve-se as matrizes A, B, C e D que descrevem o modelo linearizado em espaço de Estados.

$$\dot{Z} - \dot{Z}_{eq} = A(Z - Z_{eq}) + B(U - U_{eq})$$

$$Y - Y_{eq} = C(Z - Z_{eq}) + D(U - U_{eq})$$

Isolando as variáveis chega-se em:

$$\dot{Z} = A(Z) + B(U) + \dot{Z}_{eq} - (AZ_{eq} + BU_{eq})$$

$$Y = C(Z) + Y_{eq} - CZ_{eq}$$

Com os valores obtidos aplica-se a transformada de Laplace no sistema de tal forma que se obtém:

$$sZ = A(Z) + B(U) + \dot{Z}_{eq} - (AZ_{eq} + BU_{eq})$$

$$Y = C(Z) + Y_{eq} - CZ_{eq} \quad (X1)$$

Rearranjando os termos obtém-se os seguintes resultados:

$$BU = sZ - AZ - \dot{Z}_{eq} + (AZ_{eq} + BU_{eq}) \Rightarrow U = B^{-1}\{sZ - AZ - \dot{Z}_{eq} + (AZ_{eq} + BU_{eq})\}$$

Logo, com Y e U isolados, pode-se adquirir a matriz transformada  $G(s)$  fazendo Y dividido por U. A fim de poupar esforço manual, desenvolveu-se um programa no software Scilab para obter as funções de transferência do modelo, utilizando a função `ss2tf`.

Como já foi dito, o sistema apresenta 2 saídas ( $x_1$  e  $x_2$ ) e apenas uma entrada (degrau de pressão  $P_0$  em  $t = 0.5$  s). Dessa forma, o sistema apresentará 2 funções de transferência. As funções de transferência respectivas às variáveis ( $x_1$ ,  $x_2$ ) são:

$$G_1(s) =$$

$$\frac{27465.34 + 94773.311s + 12236.528s^2 + 433.15484s^3 + 3.49724s^4 + 1.513 * 10^{-9}s^5 + 1.819 * 10^{-11}s^6 + 8.527 * 10^{-14}s^7}{61676410 + 6.099 * 10^8s + 9 * 10^8s^2 + 2.107 * 10^8s^3 + 20358876s^4 + 966042.78s^5 + 22930.758s^6 + 250.35912s^7 + s^8}$$

$$G_2(s) =$$

$$\frac{27465.34 + 12722.043s + 950.45275s^2 + 9.2562403s^3 + 2.980 * 10^{-8}s^4 + 9.313 * 10^{-10}s^5 + 1.091 * 10^{-11}s^6 + 5.684 * 10^{-14}s^7}{61676410 + 6.099 * 10^8s + 9 * 10^8s^2 + 2.107 * 10^8s^3 + 20358876s^4 + 966042.78s^5 + 22930.758s^6 + 250.35912s^7 + s^8}$$

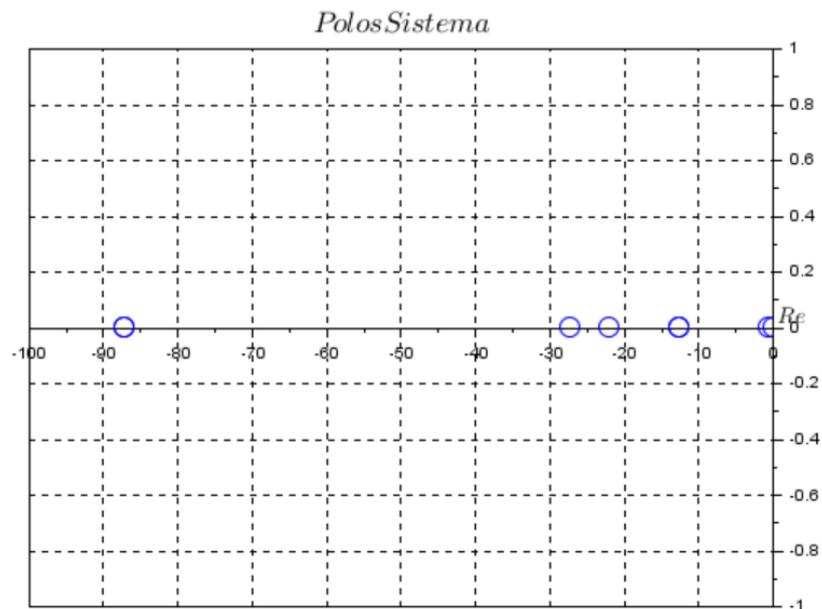
## 8.2 Polos e Estabilidade

Uma vez obtidas as funções de transferência, é possível obter os polos do sistema achando as raízes do polinômio do denominador. A fim de poupar esforço, utilizou-se mais uma vez do ambiente Scilab para obter os polos do sistema, expostos a seguir.

$$\begin{cases} s_1 \approx -87.364346 \\ s_2 \approx -87.303171 \\ s_3 \approx -27.461875 \\ s_4 \approx -22.09771 \\ s_5 \approx -12.666772 \\ s_6 \approx -12.66572 \\ s_7 \approx -0.6768223 \\ s_8 \approx -0.1227176 \end{cases}$$

Esses resultados realmente condizem com o sistema em análise, pode se perceber que todos os seus polos apresentam parte real negativa o que implica que o sistema é estável, algo condizente com os resultados gráficos obtidos das simulações lineares. Além disso, nenhum dos polos encontrados apresenta alguma parte imaginária o que implica que o sistema para esse caso é não oscilatório, como pode ser comprovado pela análise gráfica. Obteve-se, também, o Gráfico 10 contendo os polos do modelo, demonstrando que eles se encontram na parte real negativa (e diferentes de 0).

Gráfico 10 – Polos do Sistema

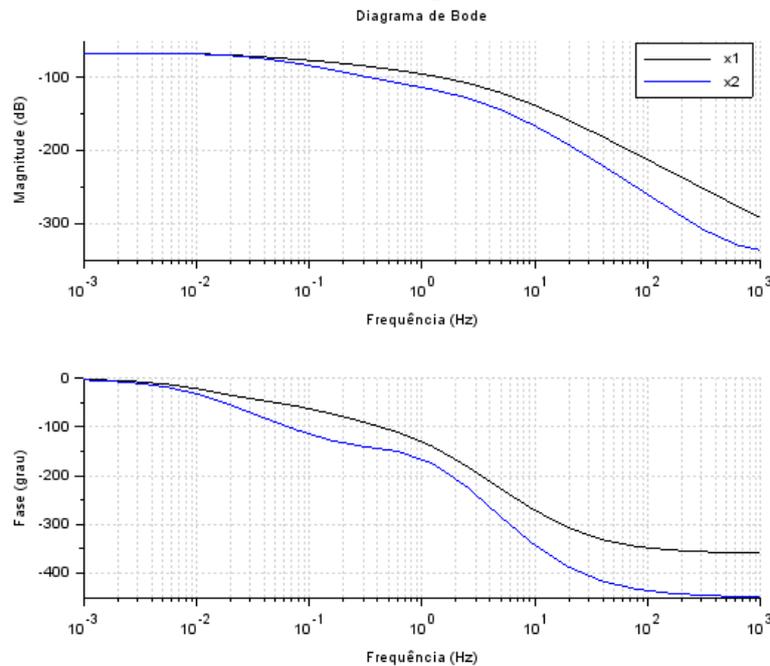


Fonte: Autores

### 8.3 Diagramas de Bode

Os diagramas de Bode são importantes para representação da resposta no domínio da frequência e análise da ressonância do sistema. Utilizou-se a função *bode* em uma rotina Scilab para obter os diagramas a partir das funções de transferência. Os resultados podem ser demonstrados no Gráfico 11.

Gráfico 11 – Diagrama de Bode



Fonte: Autores

Novamente a diferença de acionamento dos reservatórios se manifesta no sistema, indicando a diferença de respostas entre o primeiro e segundo reservatórios. O sistema em si não aparenta ter nenhuma frequência de ressonância por não apresentar valores acentuados de magnitude.

Como foi analisado anteriormente esse sistema é significativamente estável com poucos desníveis, para altas frequências, o ganho das saídas do sistema tende a ser aproximadamente 85 *dB* por década e para baixas frequências se mantém em aproximadamente 70 *dB*. Com relação à fase, ambas partem de 0 até chegar valores estáveis em altas frequências de aproximadamente  $-430^\circ$  para  $x_2$  e de  $-350^\circ$  graus para  $x_1$ .

## 9 CONCLUSÃO

A abordagem para elaboração do presente trabalho consistiu na elaboração de mais de um modelo para efeito de comparação dos resultados e análises posteriores daquele que representasse mais fielmente a realidade. A elaboração do modelo com reservatório fixo e 3 cilindros de freio gerou resultados satisfatórios, apresentando a defasagem esperada para os componentes mais distantes da entrada e a estabilidade no ponto de equilíbrio alguns instantes de tempo.

O modelo de dois cilindros de freio com pistões também apresentou características extremamente satisfatórias. Embora seja um problema complexo, que inclui inúmeros parâmetros e variáveis, as simplificações e considerações adotadas permitiram a obtenção de respostas desejadas, que apresentam poucas irregularidades e representam os fenômenos esperados de defasagem entre os cilindros e pistões.

Em termos comparativos entre os modelos apresentados no decorrer do relatório, escolheu-se, para dar prosseguimento em análises mais fundamentadas de linearização e domínio da frequência, o modelo com 2 cilindros e 2 pistões. Esse modelo, como era de se esperar devido à maior quantidade de variáveis consideradas, apresentou menor defasagem se comparado ao modelo de cilindros de volume fixo. A menor defasagem de respostas implica diretamente na menor defasagem da frenagem entre os vagões.

Dessa forma, ao trabalhar com um modelo que resulte em menores defasagens de tempo de frenagem entre os vagões, é possível garantir maior validade ao modelo, uma vez que defasagens maiores geram tempos de resposta maiores e frenagem tardia de alguns vagões, o que pode danificar elementos de conexão entre eles e causar acidentes. O modelo linearizado, por sua vez demonstrou estabilidade de resposta e boa sintonia com o modelo linear em todo o movimento.

Uma possível melhora posterior na modelagem é considerar um elemento de trava que impeça o deslocamento do pistão no sentido contrário, de forma que se mantenha na posição inicial até acionamento da entrada de grau. Outra possível melhora é a modelagem de um cilindro de freio com alívio para a tubulação geral. Da forma que foi considerado, com cilindro fechado, a parte superior do pistão segue a lei  $P_{0i_0} V_{0i_0} = P_{0i}(t) V_{0i}(t) = cte$  (gás ideal, isotérmico).

Isso claramente limita o movimento do pistão, pois uma grande compressão implica grande diminuição do volume e grande aumento da pressão na porção superior do pistão, o que pode ser mitigado com alívio e fluxo de fluido para outra parte do sistema.

Durante a modelagem dos sistemas o grupo apresentou grande dificuldade em consolidar um modelo. Devido à complexidade do assunto e grande número de variáveis, os sistemas sob análise sempre passavam de 12 variáveis a serem consideradas, o que dificultaria muito os passos posteriores. Além disso, o menor número de integrantes no grupo dificultou a realização das tarefas propostas.

Foi realizada apenas o estudo da entrada do tipo degrau por ela representar o processo de frenagem imposto pelo maquinista ao acionar o freio. As características e limitações do modelo impedem o processo de realimentação após a frenagem, o que limita o tipo de excitações-entradas que podem ser aplicados.

A maioria dos dados parâmetros utilizados proveio de “A Distributed Mathematical Model for Pressure Transient Analysis in Railway Pneumatic Brake System”, porém, alguns dados como  $P_{inicial}$  e  $x(0)$  foram obtidos pelo Dr. Roberto Spinola

## REFERÊNCIAS

Claudio Garcia. Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos. 2º edição. São Paulo: editora da Universidade de São Paulo, 2005.

Luiz Carlos Felício. Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta. 2º edição. São Paulo: RiMa Editora, 2010.

L Pugi; M Malvezzi; B Allotta; L Banchi; P Presciani. A parametric library for the simulation of a Union Internationale des Chemins de Fer (UIC) pneumatic braking system. 16 f. Artigo. Departamento de Energia 'Sergio Stecco', Seção de Mecânica Aplicada, Universidade de Florença, 2004.

S. Bharath; B. C. Nakra; K. N. Gupta. A Distributed Mathematical Model for Pressure Transient Analysis in Railway Pneumatic Brake System. 13 f. Artigo. Int. J. Mech, 1989.

PAVANI TEODORO, ÍCARO: Estudo do Comportamento do Sistema de Freio Pneumático de Trens de Carga utilizando o Método dos Volumes Finitos, Campinas, 2017

HENRIQUE SOARES, LEONARDO; FERREIRA MENDES, MANOEL: ESTUDO DE MELHORIAS OPERACIONAIS PARA REDUÇÃO DE EMERGÊNCIAS INDESEJADAS (EI)

JIA, BORU: A fast response free-piston engine generator numerical model for control applications