

Andrei Steschenko (9836502)  
Gabriel Jenner de Faria Orsi (10772800)  
João Pedro Dias Nunes (10705846)  
Rogério Yukio Tamaoki Rodriguez (10772709)

## **Modelagem de Sistemas Dinâmicos**

***Plataforma estabilizadora para  
otimização da transmissão de dados***

Brasil

2020

Andrei Steschenko (9836502)  
Gabriel Jenner de Faria Orsi (10772800)  
João Pedro Dias Nunes (10705846)  
Rogério Yukio Tamaoki Rodriguez (10772709)

## **Modelagem de Sistemas Dinâmicos**

### ***Plataforma estabilizadora para otimização da transmissão de dados***

Modelagem de uma plataforma estabilizadora para otimização de transmissão de dados

Universidade de São Paulo - USP

Escola Politécnica

PME 3380 - Modelagem de Sistema Dinâmicos

Orientador: Prof. Dr. Decio Crisol Donha  
Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

Brasil

2020

# Resumo

O presente trabalho tem por objetivo compreender os movimentos ao qual estará submetida uma plataforma estabilizada sem os restauradores de momento angular, dessa forma foi feita uma revisão bibliográfica com o intuito de obter o modelo matemático para tal plataforma, posteriormente, o sistema é linearizado e feito o espaço de estados. De posse de tais informações é possível transpor o modelo para o domínio da frequência e analisar a estabilidade do sistema. Além disso, foram obtidas as repostas do sistema para excitações elementares, além dos sinais elementares também foram estudados como diferentes perfis de via atuam sobre o sistema.

Palavras chave: plataforma, estabilizada, modelo.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustrações sobre plataformas estabilizadoras . . . . .	1
Figura 2 – Exemplo de ângulos de Euler . . . . .	2
Figura 3 – Esquema do Modelo Físico . . . . .	3
Figura 4 – Sistemas de coordenadas . . . . .	5
Figura 5 – Esquema de eixos do sistema de coordenadas da plataforma com o suporte cardan interior . . . . .	6
Figura 6 – Esquema de eixos do sistema de coordenadas do suporte cardan interior com o suporte cardan exterior . . . . .	6
Figura 7 – Esquema de eixos do sistema de coordenadas do suporte cardan exterior com a base . . . . .	7
Figura 8 – Plataforma <i>STABILIZED PLATFORM - 3 AXIS</i> . . . . .	18
Figura 9 – Polos do sistema no plano complexo . . . . .	24
Figura 10 – Diagrama de Bode para $\theta$ com $\dot{p}$ . . . . .	26
Figura 11 – Diagrama de Bode para $\phi$ com $\dot{p}$ . . . . .	27
Figura 12 – Diagrama de Bode para $\psi$ com $\dot{q}$ . . . . .	28
Figura 13 – Entradas degrau na origem . . . . .	29
Figura 14 – Resposta do sistema linear ao degrau unitário . . . . .	30
Figura 15 – Resposta do sistema não linear ao degrau unitário . . . . .	30
Figura 16 – Entradas impulso na origem . . . . .	31
Figura 17 – Resposta do sistema linear ao impulso unitário . . . . .	32
Figura 18 – Resposta do sistema não linear ao impulso unitário . . . . .	32
Figura 19 – Entradas de excitação senoidal de 1 rad/s . . . . .	33
Figura 20 – Resposta do sistema linear à excitação senoidal de 1 rad/s . . . . .	34
Figura 21 – Resposta do sistema não linear à excitação senoidal de 1 rad/s . . . . .	34
Figura 22 – Entradas de excitação senoidal de 10 rad/s . . . . .	35
Figura 23 – Resposta do sistema linear à excitação senoidal de 10 rad/s . . . . .	35
Figura 24 – Resposta do sistema não linear à excitação senoidal de 10 rad/s . . . . .	36
Figura 25 – Esquema de meia suspensão proposto por Ichige, Miazaki e Ribeiro (2019) . . . . .	37
Figura 26 – Perfil da via com lombada . . . . .	38
Figura 27 – Análise do sistema para transposição de lombada . . . . .	39
Figura 28 – Perfil da via com buraco para o caso longitudinal . . . . .	40
Figura 29 – Análise do sistema para transposição de buraco com modelo longitudinal . . . . .	40
Figura 30 – Perfil da via com buraco para o caso transversal . . . . .	41
Figura 31 – Análise do sistema para transposição de buraco com modelo transversal . . . . .	42
Figura 32 – Perfil da via com tachão . . . . .	43

Figura 33 – Análise do sistema para transposição de tachão . . . . .	43
Figura 34 – Resposta do sistema linear por matriz de transição a entrada degrau unitário . . . . .	45
Figura 35 – Resposta do sistema linear por matriz de transição a entrada impulso unitário . . . . .	45
Figura 36 – Resposta do sistema linear por matriz de transição a excitação senoidal com $\omega = 1 \text{ rad/s}$ de amplitude unitária . . . . .	46
Figura 37 – Resposta do sistema linear por matriz de transição a excitação senoidal com $\omega = 10 \text{ rad/s}$ de amplitude unitária . . . . .	46
Figura 38 – Resposta do sistema linear no domínio da frequência a entrada degrau unitário . . . . .	47
Figura 39 – Resposta do sistema linear no domínio da frequência a entrada impulso unitário . . . . .	47
Figura 40 – Resposta do sistema linear no domínio da frequência a excitação senoidal com $\omega = 1 \text{ rad/s}$ de amplitude unitária . . . . .	48
Figura 41 – Resposta do sistema linear no domínio da frequência a excitação senoidal com $\omega = 10 \text{ rad/s}$ de amplitude unitária . . . . .	48
Figura 42 – Diagrama de blocos do sistema linear . . . . .	49
Figura 43 – Ficha técnica da plataforma da <i>EUROCONTROL</i> . . . . .	53
Figura 44 – Entradas de excitação senoidal de 100 rad/s . . . . .	54
Figura 45 – Resposta linear à excitação senoidal de 100 rad/s . . . . .	54
Figura 46 – Resposta não linear à excitação senoidal de 100 rad/s . . . . .	55
Figura 47 – Polos e zeros do sistema de meia suspensão . . . . .	58

# Lista de símbolos

$\theta$	ângulo entre a plataforma e suporte cardan interno
$\dot{\theta}$	velocidade angular relativa entre a plataforma e o suporte cardan interno
$\ddot{\theta}$	aceleração angular relativa entre a plataforma e o suporte cardan interno
$\phi$	ângulo entre o suporte cardan externo e a carcaça
$\dot{\phi}$	velocidade angular relativa entre o suporte cardan externo e a carcaça
$\ddot{\phi}$	aceleração angular relativa entre o suporte cardan externo e a carcaça
$\psi$	ângulo entre o suporte cardan interno e o suporte cardan externo
$\dot{\psi}$	velocidade angular relativa entre o suporte cardan interno e o suporte cardan externo
$\ddot{\psi}$	aceleração angular relativa entre o suporte cardan interno e o suporte cardan externo
$p$	velocidade angular da carcaça com relação ao eixo de arfagem
$q$	velocidade angular da carcaça com relação ao eixo de rolagem
$r$	velocidade angular da carcaça com relação ao eixo de guinada
$\omega_c^c$	velocidade angular da carcaça nas coordenadas da carcaça
$\omega_o^c$	velocidade angular do suporte cardan externo nas coordenadas da carcaça
$\omega_o^o$	velocidade angular do suporte cardan externo nas coordenadas do suporte cardan externo
$\omega_i^o$	velocidade angular do suporte cardan interno nas coordenadas do suporte cardan externo
$\omega_i^i$	velocidade angular do suporte cardan interno nas coordenadas do suporte cardan interno
$\omega_p^i$	velocidade angular da plataforma nas coordenadas do suporte cardan interno
$\omega_p^p$	velocidade angular da plataforma nas coordenadas da plataforma
$[x]_{NL}$	
$[x]$	vetor de estados de dimensão [n,1]
$[y]$	vetor de saídas de dimensão [m,1]
$[u]$	vetor de entradas de dimensão [r,1]
$[A]$	matriz de estados ou matriz da planta do sistema de dimensão [n,n]
$[B]$	matriz de entradas de dimensão [n,r]
$[C]$	matriz de saídas de dimensão [m,n]
$[D]$	matriz de alimentação direta de dimensão [m,r]
$I_p$	momento polar de inércia da plataforma

$J_O$	matriz de inércia do suporte cardan externo
$J_I$	matriz de inércia do suporte cardan interno
$C_p$	coeficiente de amortecimento viscoso da plataforma
$C_o$	coeficiente de amortecimento viscoso do suporte cardan externo
$C_i$	coeficiente de amortecimento viscoso do suporte cardan interno

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>PLATAFORMA ESTABILIZADORA</b>	<b>2</b>
<b>2.1</b>	<b>Definição do problema</b>	<b>2</b>
<b>2.2</b>	<b>Revisão bibliográfica</b>	<b>2</b>
2.2.1	Giroscópio e os Ângulos de Euler	2
2.2.2	Plataformas estabilizadoras	3
<b>2.3</b>	<b>Modelo físico</b>	<b>3</b>
2.3.1	Elementos de análise	4
2.3.2	Hipóteses simplificadoras	4
<b>2.4</b>	<b>Objetivos</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>MODELAGEM DO SISTEMA</b>	<b>5</b>
<b>3.1</b>	<b>Descrição em ângulos de Euler</b>	<b>5</b>
3.1.1	Sistemas de coordenadas	5
3.1.2	Vetor velocidade	7
3.1.3	Vetor aceleração	8
<b>3.2</b>	<b>Dinâmica do sistema</b>	<b>9</b>
<b>3.3</b>	<b>Linearização</b>	<b>11</b>
<b>3.4</b>	<b>Espaço de Estados</b>	<b>13</b>
3.4.1	Caso não linear	13
3.4.2	Caso linear	14
3.4.3	Definição de parâmetros numéricos	17
3.4.4	Definição do espaço de estados numérico	20
<b>4</b>	<b>DESCRIZAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA</b>	<b>21</b>
<b>4.1</b>	<b>Funções de transferência</b>	<b>21</b>
4.1.1	Funções de transferência literais	21
4.1.2	Funções de transferência numéricas	22
<b>4.2</b>	<b>Análise de polos e zeros</b>	<b>23</b>
4.2.1	Polos dominantes	24
4.2.2	Sistema de fase mínima	24
<b>4.3</b>	<b>Análise de estabilidade</b>	<b>25</b>
4.3.1	Estabilidade por inspeção de polos	25
4.3.2	Estabilidade pelo critério de Routh-Hurwitz	25
<b>4.4</b>	<b>Diagramas de Bode</b>	<b>25</b>

4.4.1	Diagrama de Bode para $\theta$ com $\dot{p}$ . . . . .	26
4.4.2	Diagrama de Bode para $\phi$ com $\dot{p}$ . . . . .	27
4.4.3	Diagrama de Bode para $\psi$ com $\dot{q}$ . . . . .	27
4.4.4	Análise dos diagramas de Bode . . . . .	28
<b>5</b>	<b>DESCRIÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>5.1</b>	<b>Simulações numéricas . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>5.2</b>	<b>Resposta aos sinais elementares . . . . .</b>	<b>29</b>
5.2.1	Resposta ao degrau unitário na origem . . . . .	29
5.2.2	Resposta ao impulso unitário na origem . . . . .	31
5.2.3	Resposta à excitação senoidal . . . . .	32
5.2.3.1	Excitação para $\omega = 1 \text{ rad/s}$ . . . . .	33
5.2.3.2	Excitação para $\omega = 10 \text{ rad/s}$ . . . . .	34
<b>5.3</b>	<b>Resposta aos sinais de operação . . . . .</b>	<b>36</b>
5.3.1	Modelo de meio carro . . . . .	36
5.3.2	Parâmetros numéricos do modelo de suspensão . . . . .	37
5.3.3	Simulações . . . . .	37
5.3.3.1	Lombada . . . . .	38
5.3.3.2	Buraco longitudinal . . . . .	39
5.3.3.3	Buraco transversal . . . . .	41
5.3.3.4	Tachão . . . . .	42
<b>5.4</b>	<b>Simulação por matriz de transição . . . . .</b>	<b>44</b>
5.4.1	Introdução . . . . .	44
<b>5.5</b>	<b>Comparação entre a simulação no domínio do tempo e da frequência</b>	<b>46</b>
5.5.1	Simulações no domínio da frequência . . . . .	46
5.5.2	Comparação de resultados . . . . .	48
<b>6</b>	<b>DIAGRAMA DE BLOCOS . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>50</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>51</b>
	<b>APÊNDICE A – FICHA TÉCNICA DA PLATAFORMA DA EU-ROCONTROL . . . . .</b>	<b>53</b>
	<b>APÊNDICE B – EXCITAÇÃO DE <math>100 \text{ rad/s}</math> . . . . .</b>	<b>54</b>
	<b>APÊNDICE C – MODELO DE MEIA SUSPENSÃO . . . . .</b>	<b>56</b>
	<b>APÊNDICE D – CÓDIGOS . . . . .</b>	<b>59</b>

# 1 Introdução

Plataformas inercialmente estabilizadas são mecanismos que têm como finalidade isolar algum objeto de um movimento externo. Em particular uso, foi muito desenvolvida para a manutenção da direção de antenas em submarinos, uma vez que eles estavam sujeitos a movimentos das ondas do mar (LEGHMIZI; LIU, 2011). No entanto, essa tecnologia, que já é usada há aproximadamente 100 anos, se mostra promissora em outros segmentos da sociedade (HILKERT, 2008), como mostra a figura 1a. Esse vasto campo de aplicação de componentes estabilizadores é devido à importância que a estabilidade de algum elemento pode significar para o funcionamento do sistema como um todo.

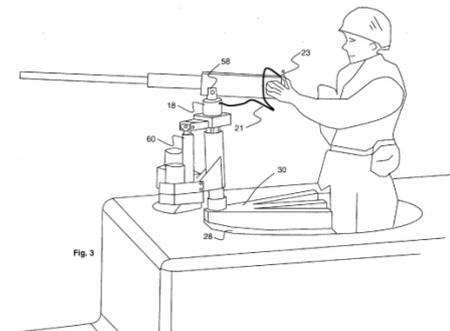
No campo científico, pode-se citar seu uso em diversos telescópios com um controle de estabilidade que garante o foco em astros a milhares de quilômetros de distância, o que permite um aumento considerável na comunicação entre o espaço e a Terra (JACKA et al., 2017); militarmente, existem diversas plataformas para estabilização de armas e sua consequente utilização remota; comercialmente, podem-se encontrar controladores de estabilidade em diversos dispositivos portáteis, como em câmeras e filmadoras (NEGRO; GRIFFIN, 2006).

Já no campo corporativo, existem empresas que trabalham diretamente ou indiretamente com esse ramo. A *LORD Microstrain<sup>®</sup> Sensing Systems*, por exemplo, é uma empresa que fornece sensores para mecanismos robóticos e trabalha com uma linha voltada para plataformas estabilizadoras (MICROSTRAIN, 2015). Outros modelos também já foram desenvolvidos até mesmo em patentes, como a *US 2008.0034954A1*, ilustrada na figura 1b que possui aplicações em câmeras, sensores e armas em movimento nos diversos veículos (GROBER, 2008).

Figura 1 – Ilustrações sobre plataformas estabilizadoras



(a) Exemplos de aplicação de plataformas estabilizadoras. Extraído de Leghmizi e Liu (2011)



(b) Ilustração de uma das aplicações da patente. Fonte: Grober (2008)

## 2 Plataforma estabilizadora

### 2.1 Definição do problema

Neste trabalho será modelada **uma plataforma com três graus de liberdade composta por dois aros retangulares externos à plataforma (suportes cardan) que será posteriormente estabilizada**. Sua utilização será na estabilização, em carros, de transmissores ou receptores que precisam estar sempre voltadas para o mesmo ponto, evitando assim a perda de sinal ou falha na transmissão de dados.

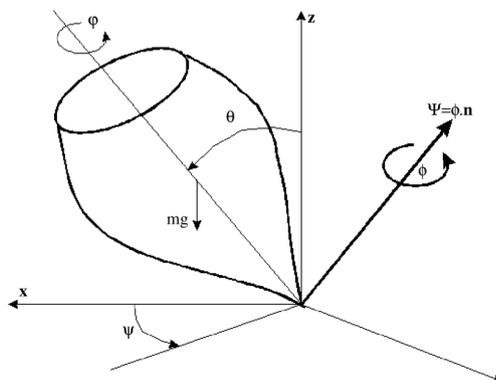
### 2.2 Revisão bibliográfica

#### 2.2.1 Giroscópio e os Ângulos de Euler

Como dito no capítulo 1, a modelagem desse sistema possui diversas aplicações, ainda mais quando integrada com aplicações com giroscópio, regidas pelos ângulos de Euler. Como propriedade, a inércia giroscópica faz com que o eixo de rotação tenda a conservar sua direção com relação ao ponto fixo que define o referencial (JUNIOR, 2014). Dado que o giroscópio está em constante movimento, um referencial baseado em coordenadas cartesianas pode não ser o mais eficiente para descrever o movimento realizado. Todavia, dado que o giroscópio movimenta-se ao redor de um ponto fixo, é conveniente representá-los através dos ângulos de Euler (ABRAHAO; MARCONI, 1975).

A representação através dos ângulos de Euler consiste na representação de um vetor através de versores dependentes dos ângulos de rotação ( $\phi$ ), de precessão ( $\psi$ ), e de nutação ( $\theta$ ), conforme a figura 2.

Figura 2 – Exemplo de ângulos de Euler



Fonte: Trindade (1996)

## 2.2.2 Plataformas estabilizadoras

Utilizando apenas dois dos três ângulos de Euler, uma proposta de controle para uma plataforma estabilizadora foi feita, no sistema de inspeção de uma linha de energia aerotransportada (ZHOU; ZHANG; YU, 2014). O objetivo, nesse caso, era desenvolver um sistema inverso dos estados do sistema medidos, considerando efeitos não lineares e de acoplamento.

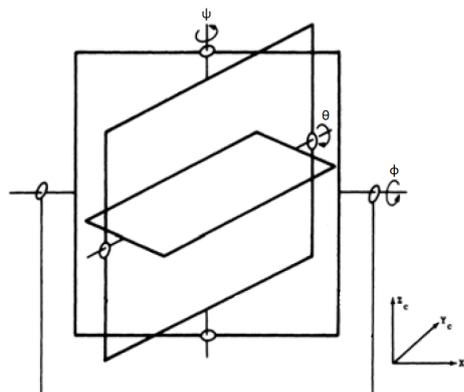
No entanto, esse não é um problema recente. A combinação de uma plataforma já com os três graus de liberdade e uma integração com o sistema e controle de servos (BARNES, 1971) foi utilizada para implementação em um sistema de medição de movimentos de um veículo. A partir de uma plataforma dentro de dois suportes com três acelerômetros (um para cada ângulo de Euler), foi possível a modelagem da estabilização do componente alvo, a partir de torques como entradas forçantes no sistema. Em específico, essa análise foi feita com um sistema de 12ª ordem, visto que além dos ângulos de Euler, havia, também os ângulos do giroscópio.

Para mitigar os erros de turbulências e incertezas de medição, também foi proposta uma outra modelagem utilizando conceitos de inteligência artificial e aprendizado de máquinas em uma plataforma estabilizadora com três graus de liberdade. A modelagem também foi feita utilizando a mecânica de Newton-Euler, com os três ângulos de Euler, a fim de promover uma comparação entre o modelo de controle tradicional PID e um por redes neurais. Como conclusão, o erro de rastreamento foi reduzido em 80% (FANG; YIN; LEI, 2015).

## 2.3 Modelo físico

Na figura 3 está representado como será o modelo físico do projeto, como descrito na seção 2.1.

Figura 3 – Esquema do Modelo Físico



Fonte: Said e Latifa (2011)

### 2.3.1 Elementos de análise

Os elementos que compõem o sistema consistem na plataforma, suporte cardan interno, suporte cardan externo e carcaça (fixa no veículo no qual está instalada a plataforma estabilizadora). Os ângulos de Euler respectivos a cada elemento são:  $\theta$ ,  $\psi$  e  $\phi$  como se pode observar na figura 3. O sistema é, portanto, de 6ª ordem, pois envolve as segundas derivadas no tempo dos ângulos de Euler:  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\psi}$  e  $\ddot{\phi}$ . Os sensores são os giroscópios e acelerômetros e os atuadores são servos-motores que aplicam torques restauradores de acordo com dados colhidos pelos sensores para estabilizar a plataforma. As entradas por sua vez correspondem aos movimentos externos, ou seja, os movimentos nos quais a base está submetida e gera torques nos suportes e na plataforma. O sistema responde a esses esforços gerando torques contrários para estabilizar o sistema.

Os vínculos (anéis) entre a plataforma e o suporte cardan interno, entre o suporte cardan interno e externo, e entre o suporte cardan externo e a carcaça apresentam atrito.

### 2.3.2 Hipóteses simplificadoras

Assim, adotaremos as seguintes hipóteses para modelagem do mecanismo:

- todos os suportes e a plataforma são considerados corpos rígidos ideais;
- a plataforma e os suportes cardan são os únicos elementos com massa e inércia consideráveis;
- todos os vínculos cinemáticos permitem movimento relativo de um grau de liberdade entre dois componentes;
- os atritos dos anéis são modelados como amortecedores viscosos lineares em função das velocidades angulares respectivas;
- o sistema é linearizado ao redor da posição de equilíbrio estável;
- as únicas entradas são as velocidades angulares aplicados pela base, resultantes do movimento do veículo no qual a plataforma estabilizadora está instalada. Essas, por sua vez, não estão presentes nas saídas do sistema (matriz 'D' nula).

## 2.4 Objetivos

Assim, esse trabalho tem como objetivo o estudo de movimentos de uma plataforma estabilizadora em cima de um veículo, com relação aos ângulos de arfagem, rolagem e guinada, quando suscetível a entradas de operação, como buracos em uma via. Não é escopo desse projeto estudar as entradas forçantes dos atuadores, pois está sob interesse o estudo apenas das respostas naturais.

## 3 Modelagem do sistema

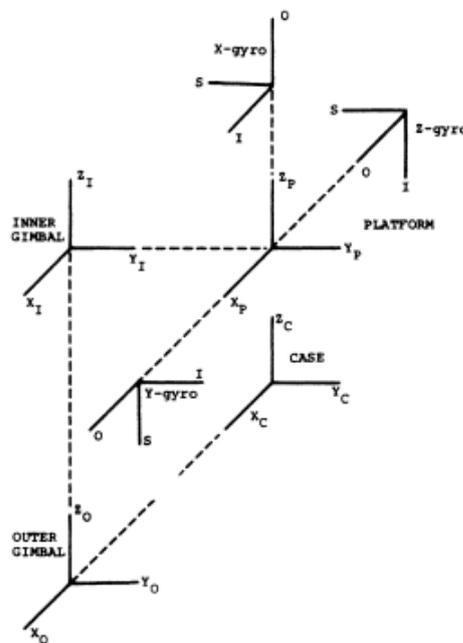
Para obter o modelo matemático do sistema, será retomado o estudo feito por Barnes (1971). Nele, o estudo parte da premissa de que serão analisados sete elementos, uma carcaça, um suporte cardan interno, um suporte cardan externo, a plataforma que deve permanecer estável, e três giroscópios.

### 3.1 Descrição em ângulos de Euler

#### 3.1.1 Sistemas de coordenadas

O modelo físico visto na figura 3 pode ser descrito de forma mais simples com o auxílio de 4 sistemas de coordenadas, relativos à plataforma, ao sistema cardan interno, ao sistema cardan externo e à carcaça, exemplificados na figura 4. Dessa forma, para poder efetuar operações entre eles é necessário contruir matrizes de mudança de base.

Figura 4 – Sistemas de coordenadas

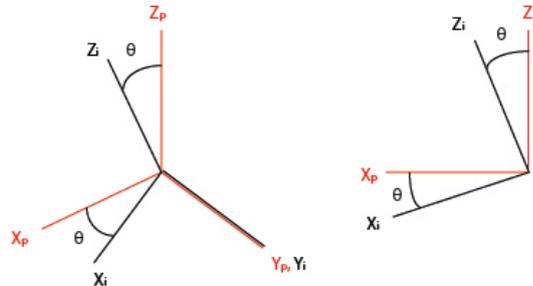


Fonte: adaptado de Barnes (1971)

Conforme visto na figura 3, a plataforma sofre diversas rotações, e, dessa forma, faz-se necessário o artifício dos ângulos de Euler. Suponhamos, inicialmente, um sistema de coordenadas  $O_p$  solidário a plataforma. Em seguida, movimentemos o suporte cardan

interior cuja base solidária sistema  $O_i$  de um ângulo  $\theta$ . A figura 5 mostra um esboço dessa rotação.

Figura 5 – Esquema de eixos do sistema de coordenadas da plataforma com o suporte cardan interior



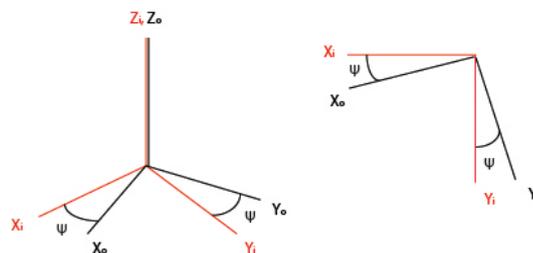
Fonte: adaptado de Barnes (1971)

Dessa forma, escrevemos a matriz de mudança de base  $B_{pi}$  como:

$$B_{pi} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Fixemos agora o suporte cardan interior e movimentemos o suporte cardan exterior (com um sistema de coordenadas  $O_e$  de um ângulo  $\psi$ ). A figura 6 mostra isso em um esquema de eixos.

Figura 6 – Esquema de eixos do sistema de coordenadas do suporte cardan interior com o suporte cardan exterior



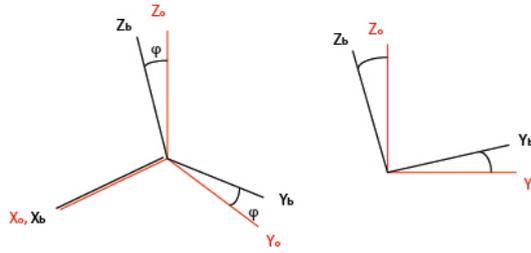
Fonte: adaptado de Barnes (1971)

e a matriz de mudança de base  $B_{io}$ :

$$B_{io} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 \\ -\text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Analogamente, fixando o suporte cardan exterior e impondo um deslocamento angular  $\phi$  na base, cujo sistema é  $O_b$ , podemos representar a mudança de coordenadas na figura 7.

Figura 7 – Esquema de eixos do sistema de coordenadas do suporte cardan exterior com a base



Fonte: adaptado de Barnes (1971)

e a matriz de mudança de base  $B_{oc}$ :

$$B_{oc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

### 3.1.2 Vetor velocidade

Para descrever o vetor velocidade do sistema, serão descritos os vetores velocidade dos seguintes componentes do sistema: carcaça, suporte cardan externo, suporte cardan interno, e a plataforma. Vale ressaltar que o sistema será descrito em função das velocidades angulares, tendo em vista que o deslocamento linear do espaço está fora do escopo da análise, sendo assim, pode-se dizer que a carcaça apresenta a velocidade  $\omega_c^c$ , descrita no sistema de coordenadas da carcaça, dada por 3.4.

$$\omega_c^c = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Nas coordenadas da carcaça, a velocidade do eixo cardan externo  $\omega_o^c$  é dada por 3.5.

$$\omega_o^c = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Para obter a velocidade do eixo cardan externo no seu próprio sistema de coordenadas  $\omega_o^o$ , é necessário aplicar uma matriz de transformação, dessa forma  $\omega_o^o$  é dado por

3.6.

$$\omega_o^o = [B_{oc}]^{-1}\omega_o^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p + \dot{\phi} \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + \dot{\phi} \\ q\cos\phi - r\text{sen}\phi \\ q\text{sen}\phi + r\cos\phi \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

De forma análoga pode se obter a velocidade do suporte cardan interno nas coordenadas do suporte cardan externo, através de 3.7, e nas coordenadas do próprio suporte cardan interno dada por 3.8. Além disso, para a plataforma, as velocidades são dadas por 3.9 e 3.10.

$$\omega_i^o = \begin{bmatrix} p + \dot{\phi} \\ q\cos\phi - r\text{sen}\phi \\ q\text{sen}\phi + r\cos\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\omega_i^i = [B_{io}]^{-1}\omega_i^o = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi & 0 \\ \text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p + \dot{\phi} \\ q\cos\phi - r\text{sen}\phi \\ q\text{sen}\phi + r\cos\phi + \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\omega_i^i = \begin{bmatrix} (p + \dot{\phi})\cos\psi - (q\cos\phi - r\text{sen}\phi)\text{sen}\psi \\ (p + \dot{\phi})\text{sen}\psi + (q\cos\phi - r\text{sen}\phi)\cos\psi \\ q\text{sen}\phi + r\cos\phi + \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\omega_p^i = \begin{bmatrix} (p + \dot{\phi})\cos\psi - (q\cos\phi - r\text{sen}\phi)\text{sen}\psi \\ (p + \dot{\phi})\text{sen}\psi + (q\cos\phi - r\text{sen}\phi)\cos\psi \\ q\text{sen}\phi + r\cos\phi + \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\omega_p^p = [B_{pi}]^{-1}\omega_p^i = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (p + \dot{\phi})\cos\psi - (q\cos\phi - r\text{sen}\phi)\text{sen}\psi \\ (p + \dot{\phi})\text{sen}\psi + (q\cos\phi - r\text{sen}\phi)\cos\psi + \dot{\theta} \\ q\text{sen}\phi + r\cos\phi + \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\omega_p^p = \begin{bmatrix} [(p + \dot{\phi})\cos\psi - (q\cos\phi - r\text{sen}\phi)\text{sen}\psi]\cos\theta + [q\text{sen}\phi + r\cos\phi + \dot{\psi}]\text{sen}\theta \\ (p + \dot{\phi})\text{sen}\psi + (q\cos\phi - r\text{sen}\phi)\cos\psi + \dot{\theta} \\ -[(p + \dot{\phi})\text{sen}\psi - (q\cos\phi - r\text{sen}\phi)\text{sen}\psi]\cos\theta + [q\text{sen}\phi + r\cos\phi + \dot{\psi}]\cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

### 3.1.3 Vetor aceleração

Para dar prosseguimento à análise cinemática do sistema, serão desenvolvidas as acelerações angulares da mesma forma que fizeram Leghmizi e Liu (2010). Para tal é

necessário retomar as equações 3.6, 3.8 e 3.10, e fazer as considerações descritas em 3.11, 3.12 e 3.13.

$$\omega_o^o = \begin{bmatrix} \omega_{ox} \\ \omega_{oy} \\ \omega_{oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + \dot{\phi} \\ q \cos \phi - r \operatorname{sen} \phi \\ q \operatorname{sen} \phi + r \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\omega_i^i = \begin{bmatrix} \omega_{ix} \\ \omega_{iy} \\ \omega_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p + \dot{\phi}) \cos \psi - (q \cos \phi - r \operatorname{sen} \phi) \operatorname{sen} \psi \\ (p + \dot{\phi}) \operatorname{sen} \psi + (q \cos \phi - r \operatorname{sen} \phi) \cos \psi \\ q \operatorname{sen} \phi + r \cos \phi + \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{ox} \cos \psi - \omega_{oy} \operatorname{sen} \psi \\ \omega_{ox} \operatorname{sen} \psi + \omega_{oy} \cos \psi \\ \omega_{oz} + \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\omega_p^p = \begin{bmatrix} \omega_{px} \\ \omega_{py} \\ \omega_{pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [(p + \dot{\phi}) \cos \psi - (q \cos \phi - r \operatorname{sen} \phi) \operatorname{sen} \psi] \cos \theta + [q \operatorname{sen} \phi + r \cos \phi + \dot{\psi}] \operatorname{sen} \theta \\ (p + \dot{\phi}) \operatorname{sen} \psi + (q \cos \phi - r \operatorname{sen} \phi) \cos \psi + \dot{\theta} \\ -[(p + \dot{\phi}) \operatorname{sen} \psi - (q \cos \phi - r \operatorname{sen} \phi) \operatorname{sen} \psi] \cos \theta + [q \operatorname{sen} \phi + r \cos \phi + \dot{\psi}] \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\omega_p^p = \begin{bmatrix} \omega_{px} \\ \omega_{py} \\ \omega_{pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{ix} \cos \theta + \omega_{iz} \operatorname{sen} \theta \\ \omega_{iy} + \dot{\theta} \\ -\omega_{ix} \operatorname{sen} \theta + \omega_{iz} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

De posse das equações 3.11, 3.12 e 3.13, a obtenção da aceleração angular de cada um dos componentes é dada pelas equações 3.14, 3.15 e 3.16.

$$\dot{\omega}_o^o = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ox} \\ \dot{\omega}_{oy} \\ \dot{\omega}_{oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} + \ddot{\phi} \\ \dot{q} \cos \phi - \dot{r} \operatorname{sen} \phi - \dot{\phi} \omega_{oz} \\ \dot{q} \operatorname{sen} \phi + \dot{r} \cos \phi + \dot{\phi} \omega_{oy} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\dot{\omega}_i^i = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ix} \\ \dot{\omega}_{iy} \\ \dot{\omega}_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ox} \cos \psi - \dot{\omega}_{oy} \operatorname{sen} \psi - \dot{\psi} \omega_{iy} \\ \dot{\omega}_{ox} \operatorname{sen} \psi + \dot{\omega}_{oy} \cos \psi + \dot{\psi} \omega_{ix} \\ \dot{\omega}_{oz} + \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\dot{\omega}_p^p = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{px} \\ \dot{\omega}_{py} \\ \dot{\omega}_{pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ix} \cos \theta + \dot{\omega}_{iz} \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta} \omega_{pz} \\ \dot{\omega}_{iy} + \ddot{\theta} \\ -\dot{\omega}_{ix} \operatorname{sen} \theta + \dot{\omega}_{iz} \cos \theta - \dot{\theta} \omega_{px} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

## 3.2 Dinâmica do sistema

Para obter as equações diferenciais que regem o sistema, pode-se avaliar a variação do momento angular a partir da expressão 3.17 (FRANÇA; MATSUMURA, 2004).

$$\frac{d}{dt}(J_O \omega_O) + m(G - O) \wedge \vec{a}_O = \vec{M}_O^{ext} \quad (3.17)$$

Para o problema em questão, devem ser feitas algumas considerações, a primeira é que, neste trabalho, não existe o intuito de controlar a plataforma que deverá ser estabilizada, apenas entender como ela responde às entradas as quais é submetida, dessa forma, não haverá momentos restauradores, a única fonte de momento externo é o amortecimento viscoso existente nas juntas entre as peças do sistema. A segunda consideração é que estão sendo abordadas as rotações de cada um dos componentes, como a rotação é uma propriedade do corpo e não do ponto, o termo da análise relativo a aceleração linear é nulo. Por fim, a simetria do problema permite dizer que os produtos de inércia são nulos, de modo que a equação 3.17 pode ser reescrita como 3.18.

$$\begin{bmatrix} J_{Ox}\dot{\omega}_{Ox} \\ J_{Oy}\dot{\omega}_{Oy} \\ J_{Oz}\dot{\omega}_{Oz} \end{bmatrix} = \vec{M}_O^{ext} \quad (3.18)$$

Dessa forma, ao aplicar a equação 3.18 para o suporte cardan externo, para o suporte cardan interno, e para a plataforma, são obtidas as equações 3.19, 3.20 e 3.21, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} J_{ox}(\ddot{p} + \ddot{\phi}) \\ J_{oy}(\dot{q}\cos\phi - \dot{r}\sin\phi - \dot{\phi}\omega_{oz}) \\ J_{oz}(\dot{q}\sin\phi + \dot{r}\cos\phi + \dot{\phi}\omega_{oy}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_o\dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\begin{bmatrix} J_{ix}(\dot{\omega}_{ox}\cos\psi - \dot{\omega}_{oy}\sin\psi - \dot{\psi}\omega_{iy}) \\ J_{iy}(\dot{\omega}_{ox}\sin\psi + \dot{\omega}_{oy}\cos\psi + \dot{\psi}\omega_{ix}) \\ J_{iz}(\dot{\omega}_{oz} + \ddot{\psi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -C_i\dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} J_{px}(\dot{\omega}_{ix}\cos\theta + \dot{\omega}_{iz}\sin\theta + \dot{\theta}\omega_{pz}) \\ J_{py}(\dot{\omega}_{iy} + \ddot{\theta}) \\ J_{pz}(-\dot{\omega}_{ix}\sin\theta + \dot{\omega}_{iz}\cos\theta - \dot{\theta}\omega_{px}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_p\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Isolando as componentes  $\ddot{\phi}$ ,  $\ddot{\psi}$ , e  $\ddot{\theta}$ , presentes nas equações 3.19, 3.20 e 3.21, são obtidas as equações diferenciais do sistema, dadas por 3.22, 3.23 e 3.24.

$$\ddot{\phi} = -\frac{C_o\dot{\phi}}{J_{ox}} - \dot{p} \quad (3.22)$$

$$\ddot{\psi} = -\frac{C_i\dot{\psi}}{J_{iz}} - (\dot{q} - r\dot{\phi})\sin\phi - (\dot{r} + q\dot{\phi})\cos\phi \quad (3.23)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{C_p\dot{\theta}}{J_{py}} + \frac{C_o\dot{\phi}}{J_{ox}}\sin\psi - \cos\psi[(\dot{q} - r\dot{\phi})\cos\phi - (\dot{r} + q\dot{\phi})\sin\phi] - \dot{\psi}[(p + \dot{\phi})\cos\psi - (q\cos\phi - r\sin\phi)\sin\psi] \quad (3.24)$$

### 3.3 Linearização

A linearização do sistema consiste na expansão em série de Taylor, excluindo os termos de ordem superior da expansão (ordem 2 ou superior), ficando apenas com os termos lineares da série (OGATA, 2011). A expansão é a seguinte.

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_{eq})}{n!} (x - x_{eq})^n \quad (3.25)$$

Seja  $x_{eq}$  o ponto de equilíbrio do sistema, definido por  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ . Ademais, excluindo os termos de ordem superior, tem-se.

$$f(x,t) = f(x_{eq}) + \frac{\partial f(x_{eq})}{\partial x} (x - x_{eq}) \quad (3.26)$$

Como normalmente ocorre, as funções que representam sistemas dinâmicos são multivariáveis, assim aplica-se a expansão da equação 3.26 para o caso multivariável, cujo resultado é.

$$f(x_i,t) = \sum_{i=1}^n f(x_{ieq}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_{ieq})}{\partial x_i} (x - a) \quad (3.27)$$

Com  $n$  representando o número de variáveis do sistema.

Para o caso do sistema em análise, a função geral de linearização para cada ângulo de Euler ao redor de um ponto de equilíbrio é a seguinte.

$$\begin{aligned}
f_1 \approx \ddot{\theta} \approx f_1(eq) &+ \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \theta} \right|_{eq} (\theta - \theta_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{\theta}} \right|_{eq} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \phi} \right|_{eq} (\phi - \phi_{eq}) \\
+ \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{\phi}} \right|_{eq} (\dot{\phi} - \dot{\phi}_{eq}) &+ \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \psi} \right|_{eq} (\psi - \psi_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{\psi}} \right|_{eq} (\dot{\psi} - \dot{\psi}_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial p} \right|_{eq} (p - p_{eq}) \\
+ \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{p}} \right|_{eq} (\dot{p} - \dot{p}_{eq}) &+ \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial q} \right|_{eq} (q - q_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{q}} \right|_{eq} (\dot{q} - \dot{q}_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial r} \right|_{eq} (r - r_{eq}) \\
&+ \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{r}} \right|_{eq} (\dot{r} - \dot{r}_{eq})
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
f_2 \approx \ddot{\phi} \approx f_1(eq) &+ \left. \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \theta} \right|_{eq} (\theta - \theta_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \dot{\theta}} \right|_{eq} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \phi} \right|_{eq} (\phi - \phi_{eq}) \\
+ \left. \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \dot{\phi}} \right|_{eq} (\dot{\phi} - \dot{\phi}_{eq}) &+ \left. \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \psi} \right|_{eq} (\psi - \psi_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \dot{\psi}} \right|_{eq} (\dot{\psi} - \dot{\psi}_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial p} \right|_{eq} (p - p_{eq}) \\
+ \left. \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \dot{p}} \right|_{eq} (\dot{p} - \dot{p}_{eq}) &+ \left. \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial q} \right|_{eq} (q - q_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \dot{q}} \right|_{eq} (\dot{q} - \dot{q}_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial r} \right|_{eq} (r - r_{eq}) \\
&+ \left. \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \dot{r}} \right|_{eq} (\dot{r} - \dot{r}_{eq})
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
f_3 \approx \ddot{\psi} \approx f_1(eq) &+ \left. \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \theta} \right|_{eq} (\theta - \theta_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \dot{\theta}} \right|_{eq} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \phi} \right|_{eq} (\phi - \phi_{eq}) \\
+ \left. \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \dot{\phi}} \right|_{eq} (\dot{\phi} - \dot{\phi}_{eq}) &+ \left. \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \psi} \right|_{eq} (\psi - \psi_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \dot{\psi}} \right|_{eq} (\dot{\psi} - \dot{\psi}_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial p} \right|_{eq} (p - p_{eq}) \\
+ \left. \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \dot{p}} \right|_{eq} (\dot{p} - \dot{p}_{eq}) &+ \left. \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial q} \right|_{eq} (q - q_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \dot{q}} \right|_{eq} (\dot{q} - \dot{q}_{eq}) + \left. \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial r} \right|_{eq} (r - r_{eq}) \\
&+ \left. \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial \dot{r}} \right|_{eq} (\dot{r} - \dot{r}_{eq})
\end{aligned} \tag{3.30}$$

O equilíbrio neste caso consiste nas posições angulares, velocidades angulares e entradas que mantém a plataforma estabilizada e na posição horizontal.

$$\theta_{eq} = \phi_{eq} = \psi_{eq} = \frac{\pi}{2} \tag{3.31}$$

$$\dot{\theta}_{eq} = \dot{\phi}_{eq} = \dot{\psi}_{eq} = 0 \tag{3.32}$$

$$p_{eq} = q_{eq} = r_{eq} = 0 \tag{3.33}$$

$$\dot{p}_{eq} = \dot{q}_{eq} = \dot{r}_{eq} = 0 \tag{3.34}$$

Calculando, portanto, as derivadas parciais e as funções de 3.28, 3.29 e 3.30, todas avaliadas no equilíbrio (dado por 3.31 a 3.34), chega-se nas equações diferenciais linearizadas por expansão em série de Taylor de cada ângulo de Euler.

$$f_1 \approx \ddot{\theta} \approx -\frac{C_p}{J_{py}}\dot{\theta} + \frac{C_o}{J_{ox}}\dot{\phi} \quad (3.35)$$

$$f_2 \approx \ddot{\phi} \approx -\frac{C_o}{J_{ox}}\dot{\phi} - \dot{p} \quad (3.36)$$

$$f_3 \approx \ddot{\psi} \approx -\frac{C_i}{J_{iz}}\dot{\psi} - \dot{q} \quad (3.37)$$

Nota-se que a dependência da rotação angular em relação ao eixo de guinada desaparece, o que indica que os movimentos de guinada realizados pelo veículo pouco interferem no movimento da plataforma, o que parece razoável dado que ao se movimentar sobre uma superfície plana, a tendência é de que a plataforma não esteja sujeita a muitas perturbações, ainda mais quando esta movimentação ocorre próxima da condição de equilíbrio.

## 3.4 Espaço de Estados

### 3.4.1 Caso não linear

No caso não linear, as variáveis de estado escolhidas correspondem aos ângulos de Euler, e suas respectivas derivadas temporais (velocidades angulares), como elucidada a equação 3.38.

$$[x]_{NL} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}_{NL} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

O vetor  $[u]$  é chamado de vetor de entradas do sistema. Segue a definição das entradas do sistema não linear.

$$[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \\ q \\ \dot{q} \\ r \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Ao derivar o vetor  $[x]_{NL}$ <sup>1</sup>, designado de vetor de estados, em relação ao tempo, é possível chegar na equação 3.40.

$$[\dot{x}]_{NL} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix}_{NL} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Igualando, então, os termos  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\phi}$  e  $\ddot{\psi}$  aos resultados obtidos na seção 3.2 - equações 3.24, 3.22 e 3.23 - chega-se à representação do espaço de estados do sistema não linear.

$$[\dot{x}]_{NL} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix}_{NL} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{C_p x_2}{J_{py}} + \frac{C_o x_4}{J_{ox}} \text{sen}(x_5) - \cos(x_5)[(u_4 - u_5 x_4) \cos(x_3) - (u_6 + u_3 x_4) \text{sen}(x_3)] \\ -x_6[(u_1 + x_4) \cos(x_5) - (u_3 \cos(x_3) - u_5 \text{sen}(x_3)) \text{sen}(x_5)] \\ x_4 \\ -\frac{C_o x_4}{J_{ox}} - u_2 \\ x_6 \\ -\frac{C_i x_6}{J_{iz}} - (u_4 - u_5 x_4) \text{sen}(x_3) - (u_6 + u_3 x_4) \cos(x_3) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

### 3.4.2 Caso linear

Para os ângulos de Euler em questão, as variáveis de estado do caso linear correspondem à diferença entre ângulos e suas posições de equilíbrio, bem como as diferenças entre suas respectivas derivadas (velocidades angulares) e velocidades de equilíbrio (OGATA, 2011). O equilíbrio é definido na seção 3.3.

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta - \theta_{eq} \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_{eq} \\ \phi - \phi_{eq} \\ \dot{\phi} - \dot{\phi}_{eq} \\ \psi - \psi_{eq} \\ \dot{\psi} - \dot{\psi}_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta - \frac{\pi}{2} \\ \dot{\theta} - 0 \\ \phi - \frac{\pi}{2} \\ \dot{\phi} - 0 \\ \psi - \frac{\pi}{2} \\ \dot{\psi} - 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

<sup>1</sup> Os inscritos 'NL' indicam variáveis de estado do sistema não linear.

Definindo agora o vetor das entradas  $[u]$  em 3.43.

$$[u] = \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

A partir do vetor de variáveis de estado definido em 3.42, é possível encontrar a derivada temporal deste, desenvolvida em 3.44

$$[\dot{x}] = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Substituindo os valores obtidos em 3.42 para  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  e  $\dot{\psi}$ , os valores obtidos em 3.35, 3.36 e 3.37 para  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\phi}$  e  $\ddot{\psi}$ , e substituindo as entradas definidas em 3.43, a equação 3.44 fica da seguinte forma (escrita em função das variáveis de estado).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{C_p}{J_{py}}x_2 + \frac{C_o}{J_{ox}}x_4 \\ x_4 \\ -\frac{C_o}{J_{ox}}x_4 - u'_1 \\ x_6 \\ -\frac{C_i}{J_{iz}}x_6 - u'_2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Por fim, define-se o vetor das saídas  $[y]$ , como sendo as saídas medidas ou observadas de  $[x]$ , no caso em análise, estas correspondem aos deslocamentos angulares de  $\theta$ ,  $\phi$  e  $\psi$ .

$$[y] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Assim, com os vetores de estados, saídas e entradas definidos, é possível rearranjar as equações do sistema da seguinte forma.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.47)$$

Com os termos definidos da seguinte forma.

Vetores:

- $[x]$  - vetor de estados de dimensão  $[n,1]$  definido em 3.42
- $[y]$  - vetor de saídas de dimensão  $[m,1]$  definido em 3.46
- $[u]$  - vetor de entradas de dimensão  $[r,1]$

Matrizes Jacobianas:

- $[A]$  - matriz de estados ou matriz da planta do sistema de dimensão  $[n,n]$
- $[B]$  - matriz de entradas de dimensão  $[n,r]$
- $[C]$  - matriz de saídas de dimensão  $[m,n]$
- $[D]$  - matriz de alimentação direta de dimensão  $[m,r]$

Para o caso em análise, as dimensões são:  $n = 6$ ,  $r = 2$  e  $m = 3$ .

As Matrizes Jacobianas são definidas da seguinte forma para o caso em análise.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial u_6} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_3}{\partial x_6} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial u_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_3}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial y_3}{\partial u_6} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Finalmente, substituindo os valores das derivadas parciais, chega-se na equação 3.45 da forma exposta em 3.47. As matrizes de 3.48 a 3.51 ficam como em 3.52 a 3.55.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_p}{J_{py}} & 0 & \frac{C_o}{J_{ox}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C_o}{J_{ox}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_i}{J_{iz}} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

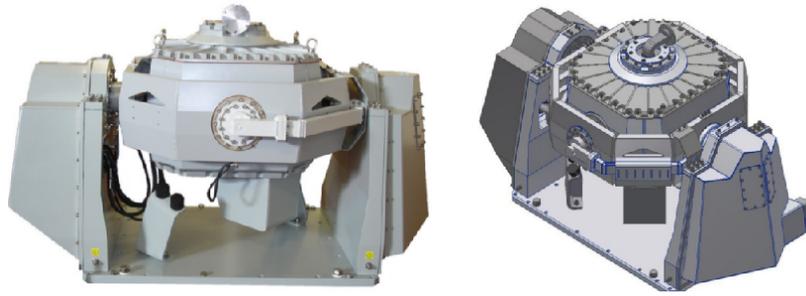
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Observando as Matrizes Jacobianas do sistema é possível perceber que não há alimentação direta ( $[D] = 0$ ), ou seja, as saídas não dependem diretamente das entradas e não sofrem variações sob variações destas; também pode-se concluir que as variáveis de saída correspondem aos deslocamentos angulares medidos, como já exposto anteriormente; ademais, as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são constantes no tempo, e, portanto, o sistema pode ser classificado como SLIT (Sistema Linear Invariante no Tempo).

Por conseguinte, as equações 3.45 e 3.47 correspondem ao espaço de estados do sistema representados de duas formas distintas.

### 3.4.3 Definição de parâmetros numéricos

Foi feita uma estimativa de parâmetros numéricos para a simulação através de uma analogia com uma plataforma estabilizadora do mercado. A empresa *EUROCONTROL* possui em seu catálogo o equipamento mostrado na figura 8. É um equipamento de estabilização de antena, portanto, factível de se fazer uma analogia para o caso estudado nessa modelagem (EUROCONTROL, 2018).

Figura 8 – Plataforma *STABILIZED PLATFORM - 3 AXIS*

Fonte: adaptado de EUROCONTROL (2018)

A seguir, será feita uma analogia entre os valores numéricos da plataforma estabilizadora da figura 8 e os componentes da figura 3. A massa total dessa plataforma é de  $200kg$ . A seguir, algumas hipóteses adotadas sobre essa distribuição de massa:

- 40% dessa massa está concentrada na base (ou carcaça) da plataforma da figura 8;
- a massa restante (60%) está distribuída entre os suportes internos, externos e plataforma;
- o suporte externo possui 15% da massa restante, o suporte interno, 10% da massa restante e a plataforma com a antena os 75% da massa restante;
- com as hipóteses anteriores, a massa do eixo cardan externo, interno e da plataforma são, respectivamente, iguais a  $18kg$ ,  $12kg$  e  $90kg$ .

Além disso, as dimensões nominais da plataforma são  $1260 \times 830 \times 630mm$  (a ficha técnica da plataforma pode ser encontrada no apêndice A). Para desprezar as medidas da base e, portanto, adquirir uma medida estimada para o eixo cardan, utiliza-se a largura, isto é,  $830mm$ . Essa seria a medida estimada do "diâmetro" do eixo cardan externo. A seguir, as seguintes hipóteses foram feitas:

- os eixos cardans interno e externo são modelados como grades de forma quadrática, e a plataforma como uma placa plana;
- o eixo cardan externo tem lado igual a  $830mm$ ;
- o eixo cardan interno tem lado igual a  $810mm$ , isto é, entre os eixos cardans há uma distância de  $20mm$ ;
- a plataforma tem comprimento igual a  $790mm$ , ou seja, há  $20mm$  entre o eixo cardan interno e a plataforma;

- cada eixo cardan pode ser modelado como uma placa plana maciça subtraída de outra placa plana maciça, de lado  $10mm$  menor.

Com os comprimentos e massas, pode-se estimar os momentos de inércia. O momento de inércia de uma placa plana quadrática é definido pela equação 3.56

$$I_p = \frac{ml^2}{6} \quad (3.56)$$

sendo  $l$ , o lado da placa. Dessa forma, pode-se estimar os momentos de inércia do eixo cardan externo ( $J_O$ ), eixo cardan interno ( $J_I$ ) e a plataforma ( $J_P$ ). Para o eixo cardan externo, o momento de inércia é a subtração de uma placa plana de  $830mm$  e  $18kg$  de uma de  $825mm$ :

$$J_O = J_{Oe} - J_{Oi} \implies \frac{18 \times 0,830^2}{6} - \frac{18 \times 820^2}{830^2} \frac{0,820^2}{6} = 0,0636kgm^2 \quad (3.57)$$

Para o eixo cardan interno, o momento de inércia é a subtração de uma placa plana de  $810mm$  e  $12kg$  de uma de  $800mm$ :

$$J_I = J_{Ie} - J_{Ii} \implies \frac{12 \times 0,810^2}{6} - \frac{12 \times 800^2}{810^2} \frac{0,800^2}{6} = 0,0978kgm^2 \quad (3.58)$$

Em ambos os casos, foi utilizada a razão de áreas para determinação da massa da placa a ser subtraída. Finalmente, a placa plana:

$$J_p = \frac{90 \times 0,790^2}{6} = 9,3615kgm^2 \quad (3.59)$$

A tabela 2 mostra uma síntese dessas medidas. Como pode ser observado, o momento de inércia da plataforma é consideravelmente mais significativo que o dos eixos cardans, visto que, além dela ser maciça, sua massa também é maior.

Tabela 2 – Parâmetros numéricos para simulação

Componente	Massa ( $kg$ )	Largura externa ( $m$ )	Largura Interna ( $m$ )	Momento de Inércia ( $kgm^2$ )
Eixo cardan externo	18	0,83	0,82	0,0978
Eixo cardan interno	12	0,81	0,80	0,0636
Plataforma	90	0,79	0,00	9,3615

Fonte: autoria própria

Na tabela 2 foi calculado o *momento de inércia polar*. Na simulação, o interesse é no momento de inércia do eixo perpendicular. Pelo teorema dos eixos perpendiculares, para uma geometria quadrada:

$$I_p = I_x + I_y \implies I = \frac{I_p}{2} \text{ para cada momento de inércia} \quad (3.60)$$

Além disso, foi utilizado o coeficiente de amortecimento  $C$  entre os eixos e a plataforma como  $C = 1,6Nms/rad$ , como previsto em (SCHEURICH et al., 2014).

### 3.4.4 Definição do espaço de estados numérico

Com os parâmetros da tabela 2, o espaço de estados previsto na equação 3.52 fica:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3418 & 0 & 32,7198 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -32,7198 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25,1572 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

as outras matrizes do espaço de estado linear (B, C, D) continuam as mesmas previstas nas equações 3.53, 3.54, 3.55. As entradas numéricas  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $\dot{p}$ ,  $\dot{q}$ ,  $\dot{r}$  serão detalhadas no decorrer desse relatório, de acordo com a necessidade ilustrada.

## 4 Descrição no domínio da frequência

Nesta etapa da análise, o intuito é transpor a análise do sistema no domínio no tempo para o domínio na frequência. Dessa forma, deve-se obter a equação 3.47 em função da frequência.

Considerando que o problema abordado é um problema multivariável com condições iniciais nulas, a transformada de Laplace deve ser executada na forma matricial descrita na equação 4.1.

$$\begin{cases} sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (4.1)$$

Desenvolvendo a equação 4.1, obtém-se a equação 4.2.

$$\begin{cases} (sI - A)X(s) = BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (4.2)$$

Dessa forma percebe-se que a função de transferência é dada por 4.3.

$$G(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] \quad (4.3)$$

### 4.1 Funções de transferência

#### 4.1.1 Funções de transferência literais

Nesta seção, serão empregadas as matrizes 3.52, 3.53, 3.54 e 3.55 na função de transferência 4.3. Com o intuito de simplificar a representação das operações, será empregada a notação a seguir.

$$B_o = \frac{C_o}{J_{ox}}; B_i = \frac{C_i}{J_{iz}}; B_p = \frac{C_p}{J_{py}}$$

Efetuada a operação a seguir é obtida a equação 4.4.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2+B_p s} & 0 & \frac{B_o}{s^3+(B_o+B_p)s^2+B_o B_p s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_p+s} & 0 & \frac{B_o}{s^2+(B_o B_p)s+B_o B_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2+B_o s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{B_o+s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2+B_i s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+B_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-B_o}{s^3+(B_o+B_p)s^2+B_o B_p s} & 0 \\ \frac{-1}{s^2+B_o s} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{s^2+B_i s} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

#### 4.1.2 Funções de transferência numéricas

Diante da função de transferência exposta em 4.4, é possível utilizar os valores observados para a plataforma no capítulo anterior. Realizando a substituição de valores, é obtida a função de transferência exposta em 4.5.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-32,7198}{s^3+33,0616s^2+11,1836s} & 0 \\ \frac{-1}{s^2+32,7198s} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{s^2+25,1572s} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

A partir do resultado exposto em 4.5, pode-se desenvolver até que sejam obtidas 4.6, 4.7 e 4.8.

$$\begin{bmatrix} \Theta(s) \\ \Phi(s) \\ \Psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-32,7198}{s^3+33,0616s^2+11,1836s} & 0 \\ \frac{-1}{s^2+32,7198s} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{s^2+25,1572s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{P}(s) \\ \dot{Q}(s) \end{bmatrix}$$

$$\Theta(s) = \frac{-32,7198}{s^3 + 33,0616s^2 + 11,1836s} \dot{P}(s) \quad (4.6)$$

$$\Phi(s) = \frac{-1}{s^2 + 32,7198s} \dot{P}(s) \quad (4.7)$$

$$\Psi(s) = \frac{-1}{s^2 + 25,1572s} \dot{Q}(s) \quad (4.8)$$

## 4.2 Análise de polos e zeros

Os zeros do sistema correspondem às raízes do polinômio do numerador das funções de transferência desenvolvidas na seção 4.1. Como é possível observar, o sistema não apresenta zeros, uma vez que os numeradores das funções são constantes.

Os polos por sua vez podem ser obtidos de 2 formas distintas: através dos autovalores da matriz  $[A]$  do sistema, ou pelas raízes do denominador das funções de transferência.

Primeiramente, calculam-se os polos pelo método dos autovalores, obtidos pela seguinte equação.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_p}{J_{py}} - \lambda & 0 & \frac{C_o}{J_{ox}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C_o}{J_{ox}} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_i}{J_{iz}} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (4.9)$$

A partir da equação 4.9 chega-se na equação característica exposta em 4.10

$$\lambda^3 \left( \frac{C_p}{J_{py}} + \lambda \right) \left( \frac{C_o}{J_{ox}} + \lambda \right) \left( -\frac{C_i}{J_{iz}} - \lambda \right) = 0 \quad (4.10)$$

cujas raízes correspondem aos polos do sistema. Substituindo os valores numéricos obtidos em 3.61 e utilizando o comando  $\text{eig}(A)$  do *Matlab*, chega-se nos polos (ou autovalores).

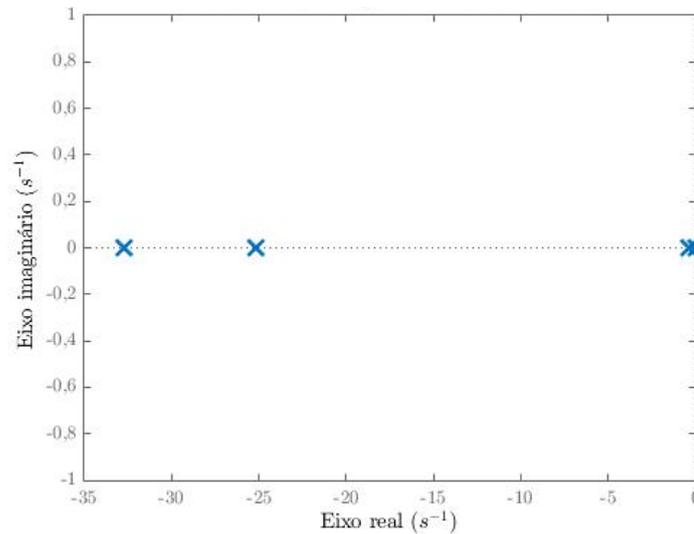
$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = -0,3418 \\ \lambda_5 = -25,1572 \\ \lambda_6 = -32,7198 \end{cases} \quad (4.11)$$

Agora, calculam-se os polos a partir das raízes do denominador das funções de transferência do sistema, exposta em 4.4. Substituindo os valores numéricos no polinômio e utilizando a função  $\text{pole}(\text{sys})$  do *Matlab*, obtém-se os polos do sistema.

$$\begin{cases} p_1 = p_2 = p_3 = 0 \\ p_4 = -0,3418 \\ p_5 = -25,1572 \\ p_6 = -32,7198 \end{cases} \quad (4.12)$$

Por fim, a figura 9 ilustra os polos no plano complexo. Observa-se que todos os polos são reais e negativos.

Figura 9 – Polos do sistema no plano complexo



Fonte: autoria própria

Assim sendo, independentemente do método utilizado (autovalores de  $[A]$  ou raízes do denominador no domínio da frequência) os polos obtidos são os mesmos - como esperado.

#### 4.2.1 Polos dominantes

Os polos dominantes são aqueles que estão mais próximos do eixo imaginário no semiplano esquerdo, pois correspondem aos termos cujas respostas transitórias decrescem mais lentamente (OGATA, 2011). Assim sendo, o polo dominante do sistema em questão é:  $p_4 = -0,3418$ .

#### 4.2.2 Sistema de fase mínima

Também segundo a definição de Ogata (2011), o modelo da plataforma é um sistema de fase mínima, uma vez que não possui polos ou zeros no semiplano direito (ou seja, não possui parte real positiva).

## 4.3 Análise de estabilidade

### 4.3.1 Estabilidade por inspeção de polos

Ao analisar os polos explicitados no final da seção 4.2 ( $p_1=p_2=p_3=0$ ;  $p_4=-0,3418$ ;  $p_5=-25,1572$ ;  $p_6=-32,7198$ ), vê-se que três deles se encontram no semi-plano complexo esquerdo e os outros três se encontram na origem. Sendo assim, é possível aferir que o sistema apresentará uma resposta com oscilação permanente e é considerado marginalmente estável.

### 4.3.2 Estabilidade pelo critério de Routh-Hurwitz

Para definir a estabilidade de um sistema a partir do critério de Routh-Hurwitz é necessário desenvolver a Tabela de Routh-Hurwitz (Tabela 3) para, então, ser feita análise dos elementos de sua primeira coluna. Para que o sistema seja considerado estável, todos os elementos da primeira coluna da tabela devem ser positivos.

Tabela 3 – Tabela de Routh-Hurwitz

$s^6$	1	842,92	0	0
$s^5$	58,2188	281,348	0	0
$s^4$	838,087	0	0	0
$s^3$	281,348	0	0	0
$s^2$	$+\epsilon$	0	0	0
$s^1$	$+\epsilon$	0	0	0
$s^0$	0	0	0	0

A partir da análise da tabela, vê-se que não há mudança de sinal na primeira coluna, o que implica que o sistema não é instável. No entanto, aparecem zeros (que quando não na última linha, são substituídos por  $+\epsilon$  para dar continuidade à análise) na primeira coluna, podendo-se então considerar que o sistema é marginalmente estável, assim como foi concluído pela análise de polos.

## 4.4 Diagramas de Bode

Os diagramas de Bode são amplamente utilizados, pois permitem a interpretação da resposta de um sistema linear para uma excitação senoidal. A magnitude representa  $20\log|G(j\omega)|$ , em que  $G(j\omega)$  é o módulo da função de transferência para entrada senoidal. Além disso, a fase representa a diferença temporal entre a entrada e a resposta do sistema. Nesse caso, com as funções de transferência definidas em 4.4, observa-se que há três diagramas possíveis para análise:  $\theta$  com  $\dot{p}$ ,  $\phi$  e  $\dot{p}$  e, finalmente,  $\psi$  com  $\dot{q}$ . Para as análises, utilizaremos um intervalo de frequências adotado já na literatura (SINGH; THAKUR; CHATTERJEE, 2014), adequada para o sistema.

#### 4.4.1 Diagrama de Bode para $\theta$ com $\dot{p}$

O diagrama mostrado na figura 10 é o equivalente à função de transferência da equação 4.6. Fatorando-a, obtemos a equação 4.13.

$$G(j\omega) = \frac{-32,72}{j\omega(j\omega + 32,7198)(j\omega + 0,3418)} \quad (4.13)$$

transformando-a na forma de Bode, obtém-se a equação 4.14.

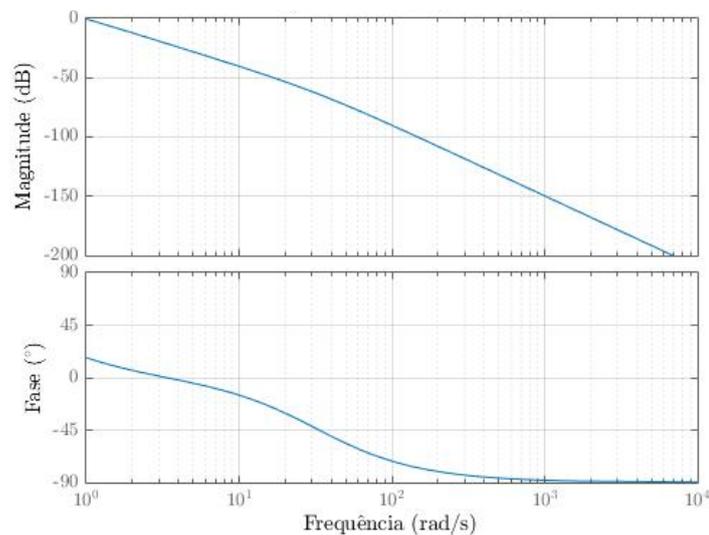
$$G(j\omega) = \frac{-2,926}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{32,7198}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{0,3418}\right)} \quad (4.14)$$

Escrevendo esses termos em função da composição estimada pelas assíntotas do diagrama:

- ganho  $K = -2,926$ , equivale à uma constante de  $20\log(2,926) = 9,325$  e fase de  $-180^\circ$ ;
- fator integral  $(j\omega)^{-1}$ , equivale a  $-20dB$  por década, passando por  $0dB$  para  $\omega = 1$  e fase de  $-90^\circ$ ;
- fator de primeira ordem  $\left(1 + \frac{j\omega}{32,7198}\right)$ , é aproximada por uma linha reta em  $0dB$  até  $\omega = 32,7198$  e depois cai com  $20dB$  por década, enquanto a fase vai de  $0^\circ$  até  $-90^\circ$  passando em  $45^\circ$  em  $\omega = 32,7198$ ;
- fator de primeira ordem  $\left(1 + \frac{j\omega}{0,3418}\right)$ , é aproximada por uma linha reta em  $0dB$  até  $\omega = 0,3418$  e depois cai com  $20dB$  por década, enquanto a fase vai de  $0^\circ$  até  $-90^\circ$  passando em  $45^\circ$  em  $\omega = 0,3418$ .

Unindo esses termos, obtém-se o diagrama da figura 10.

Figura 10 – Diagrama de Bode para  $\theta$  com  $\dot{p}$



Fonte: autoria própria

#### 4.4.2 Diagrama de Bode para $\phi$ com $\dot{p}$

O diagrama mostrado na figura 11 é o equivalente à função de transferência da equação 4.7. Fatorando-a, obtemos a equação 4.15.

$$G(j\omega) = \frac{-1}{j\omega(j\omega + 32,72)} \quad (4.15)$$

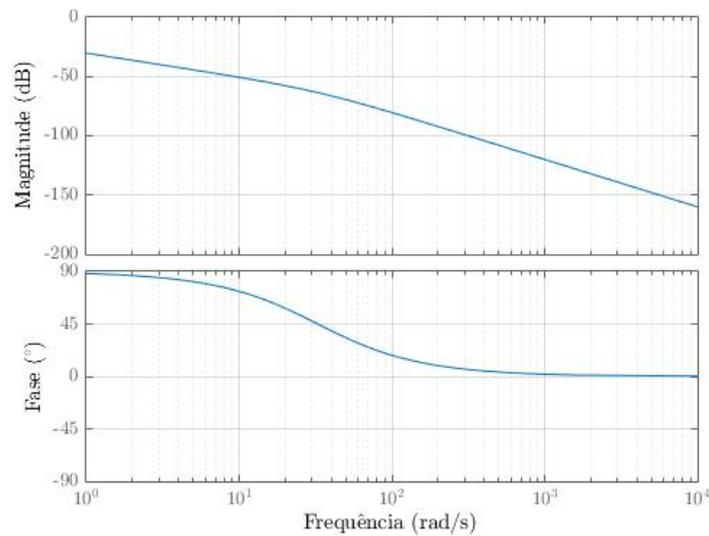
transformando-a na forma de Bode, obtém-se a equação 4.16.

$$G(j\omega) = \frac{-0,0031}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{32,72}\right)} \quad (4.16)$$

Escrevendo esses termos em função da composição estimada pelas assíntotas do diagrama:

- ganho  $K = -0,0031$ , equivale à uma constante de  $20\log(2,926) = -30,30$  e fase de  $-180^\circ$ ;
- fator integral  $(j\omega)^{-1}$ , equivale a  $-20dB$  por década, passando por  $0dB$  para  $\omega = 1$  e fase de  $-90^\circ$ ;
- fator de primeira ordem  $\left(1 + \frac{j\omega}{32,72}\right)$ , é aproximada por uma linha reta em  $0dB$  até  $\omega = 32,72$  e depois cai com  $20dB$  por década, enquanto a fase vai de  $0^\circ$  até  $-90^\circ$  passando em  $45^\circ$  em  $\omega = 32,72$ .

Figura 11 – Diagrama de Bode para  $\phi$  com  $\dot{p}$



Fonte: autoria própria

#### 4.4.3 Diagrama de Bode para $\psi$ com $\dot{q}$

O diagrama mostrado na figura 12 é o equivalente à função de transferência da equação 4.8. Fatorando-a, obtemos a equação 4.17.

$$G(j\omega) = \frac{-1}{j\omega(j\omega + 25,16)} \quad (4.17)$$

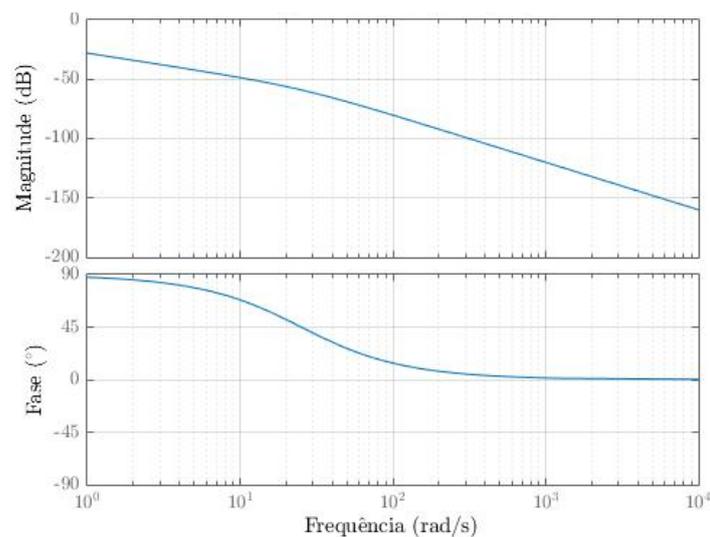
transformando-a na forma de Bode, obtém-se a equação 4.18.

$$G(j\omega) = \frac{-0,0040}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{25,16}\right)} \quad (4.18)$$

Escrevendo esses termos em função da composição estimada pelas assíntotas do diagrama:

- ganho  $K = -0,0040$ , equivale à uma constante de  $20\log(2,926) = -28,01$  e fase de  $-180^\circ$ ;
- fator integral  $(j\omega)^{-1}$ , equivale a  $-20dB$  por década, passando por  $0dB$  para  $\omega = 1$  e fase de  $-90^\circ$ ;
- fator de primeira ordem  $\left(1 + \frac{j\omega}{25,16}\right)$ , é aproximada por uma linha reta em  $0dB$  até  $\omega = 25,16$  e depois cai com  $20dB$  por década, enquanto a fase vai de  $0^\circ$  até  $-90^\circ$  passando em  $45^\circ$  em  $\omega = 25,16$ .

Figura 12 – Diagrama de Bode para  $\psi$  com  $\dot{q}$



Fonte: autoria própria

#### 4.4.4 Análise dos diagramas de Bode

Em todos os casos, o maior ganho de amplitude se dá pela menor frequência, em  $rad/s$  na faixa de atuação estudada. Além disso, por mais que o ganho de amplitude diminua, no caso do diagrama 10, a fase tende a  $-90^\circ$ .

## 5 Descrição no domínio do tempo

### 5.1 Simulações numéricas

Para efetuar uma análise coerente e precisa do sistema, foi utilizado o programa *MatlabR2015a*. Foram definidos os parâmetros de simulação como entradas, massas, inércias e comprimentos.

### 5.2 Resposta aos sinais elementares

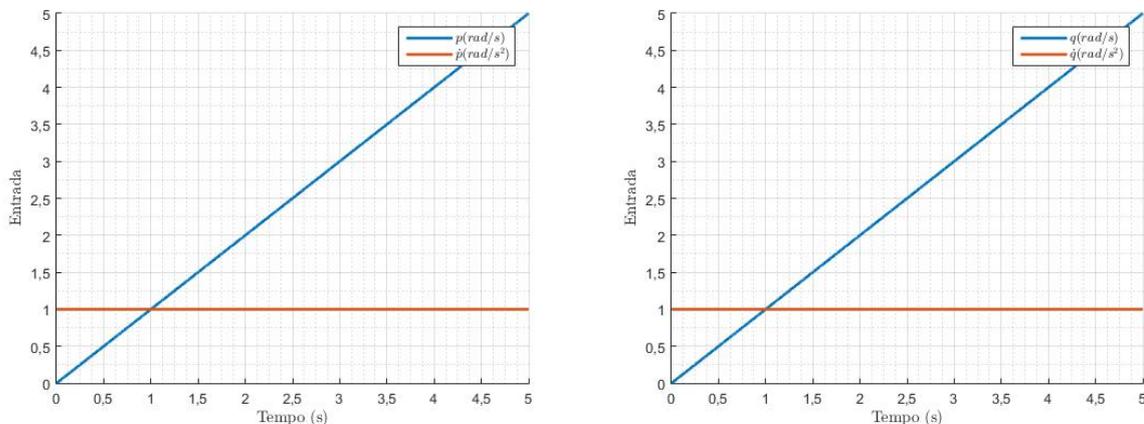
Nesta seção, é exposta e discutida a influência dos sinais elementares como entrada do sistema, e como este reage a cada um dos sinais. São eles: degrau unitário, impulso unitário (ambos na origem) e excitação senoidal de amplitude unitária.

#### 5.2.1 Resposta ao degrau unitário na origem

Os gráficos expostos na figura 13 mostram um sinal de degrau unitário de entrada na origem em  $\dot{p}$  e em  $\dot{q}$  - sendo presente no sistema linear somente as derivadas das entradas (acelerações angulares) - resultando em um sinal de rampa para as velocidades angulares  $p$  e  $q$ , como indicam, respectivamente, as sub figuras 13a e 13b.

O sinal degrau indica uma aceleração angular constante aplicada pelo veículo sobre a base da plataforma estabilizadora, isto ocorreria, por exemplo, em uma curva na qual o veículo realizaria sob aceleração constante.

Figura 13 – Entradas degrau na origem

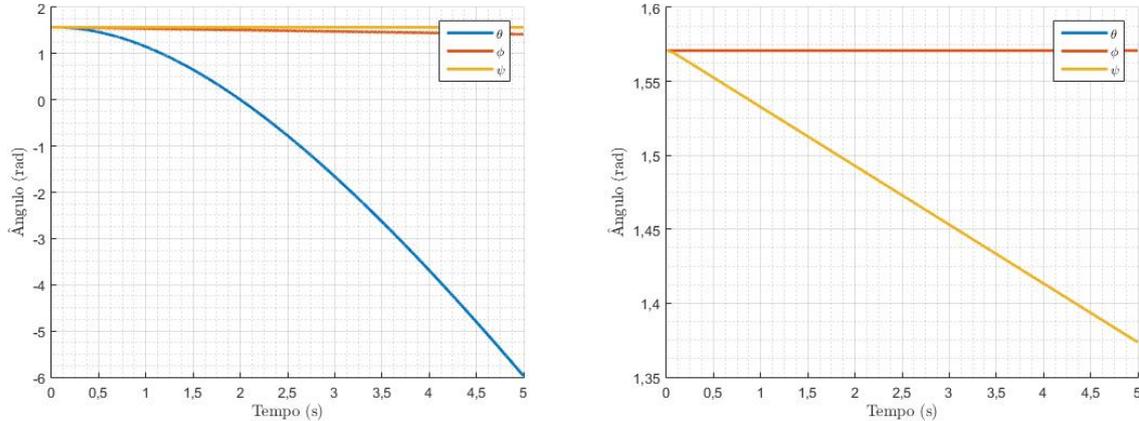


(a) Entrada degrau unitário da origem em  $\dot{p}$       (b) Entrada degrau unitário da origem em  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

Os gráficos de 14 e 15 mostram respectivamente as repostas do sistema linear e não linear para a entrada de degrau unitário.

Figura 14 – Resposta do sistema linear ao degrau unitário

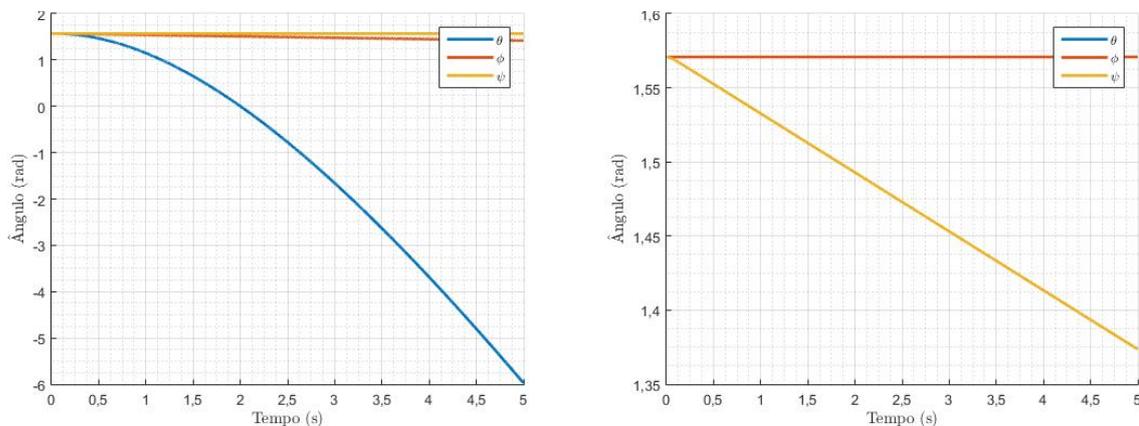


(a) Resposta ao degrau unitário de  $\dot{p}$  na origem (b) Resposta ao degrau unitário de  $\dot{q}$  na origem

Fonte: autoria própria

No caso linear, a resposta do sistema ao degrau unitário consiste num decréscimo constante e indefinido do ângulo. No primeiro caso - ilustrado em 14a - a entrada é somente um degrau em  $\dot{p}$  e o ângulo  $\theta$  decresce muito intensamente, enquanto que os demais permanecem estáveis. No caso mostrado em 14b, a única entrada é o  $\dot{q}$  e o ângulo  $\psi$  decresce indefinidamente, mas com intensidade muito inferior ao caso anterior (ângulo  $\theta$  com entrada somente em  $\dot{p}$ ). Pode-se concluir que a influência sobre  $\theta$  é muito mais significativa que a influência sobre os demais ângulos para o degrau unitário.

Figura 15 – Resposta do sistema não linear ao degrau unitário



(a) Resposta ao degrau unitário de  $\dot{p}$  na origem (b) Resposta ao degrau unitário de  $\dot{q}$  na origem

Fonte: autoria própria

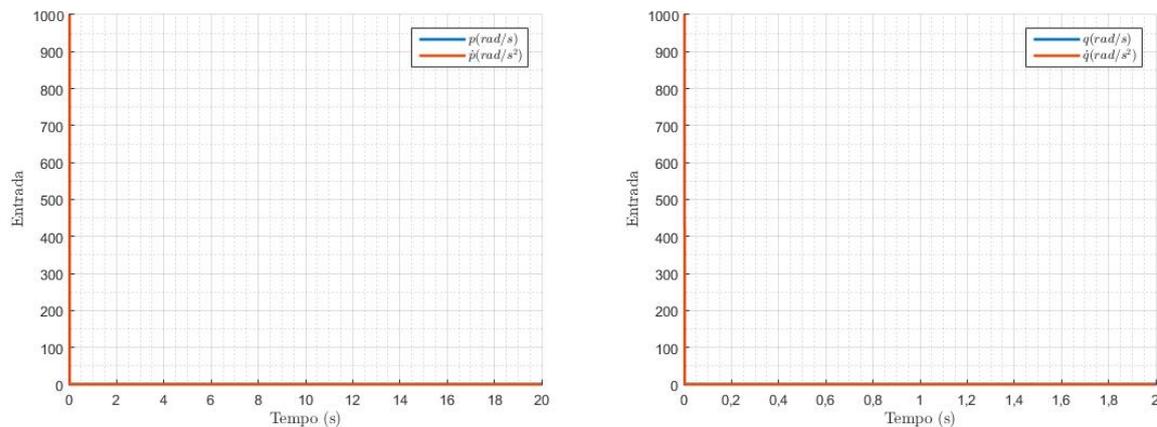
O caso não linear mostra o mesmo comportamento exposto para o caso linear, um

indicador de que a linearização está coerente e é uma boa aproximação para o sistema não linear. As análises, portanto, são as mesmas para os dois casos.

### 5.2.2 Resposta ao impulso unitário na origem

A figura 16 mostra o impulso unitário na origem aplicado ao sistema, tanto para  $\dot{p}$  quanto para  $\dot{q}$ . O impulso seria equivalente ao veículo passando sobre um obstáculo, causando um pico de aceleração angular quase que instantâneo.

Figura 16 – Entradas impulso na origem

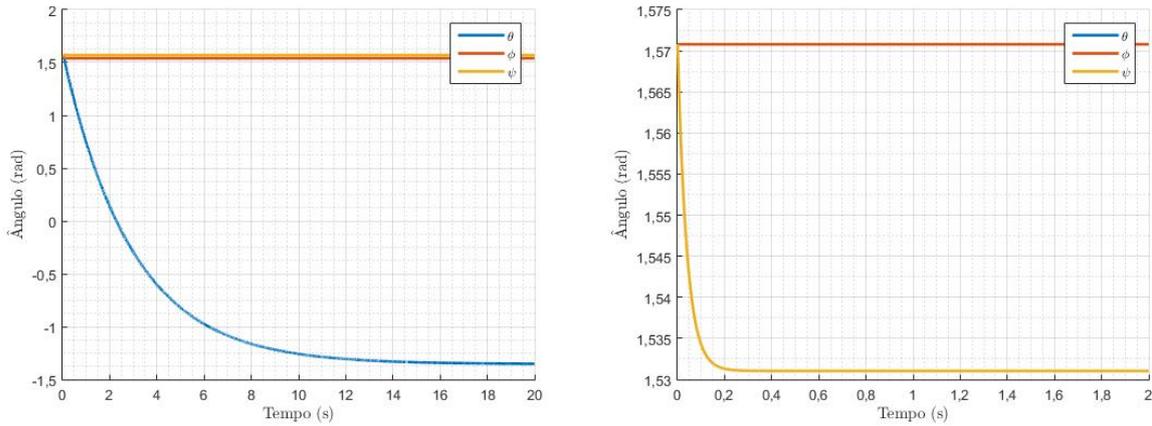


(a) Entradas do impulso unitário de  $\dot{p}$  na origem (b) Entradas do impulso unitário de  $\dot{q}$  na origem

Fonte: autoria própria

Para o caso linear, representado pelos gráficos da figura 17, quando a entrada é somente em  $\dot{p}$ , o ângulo  $\theta$  sofre um deslocamento de aproximadamente  $\pi \text{ rad}$ , ou 180 graus. O deslocamento é exponencial, e se estabiliza em  $-1,4 \text{ rad}$  após 15 segundos, enquanto que os demais ângulos permanecem estáveis na posição de equilíbrio. Para o impulso de  $\dot{q}$  como entrada, ocorre uma queda brusca, porém de amplitude muito pequena (cerca de  $0,04 \text{ rad}$ ) sobre o deslocamento do ângulo  $\psi$ . Portanto, como no caso do degrau, a maior influência ocorre sobre o ângulo  $\theta$  a partir da entrada  $\dot{p}$ .

Figura 17 – Resposta do sistema linear ao impulso unitário

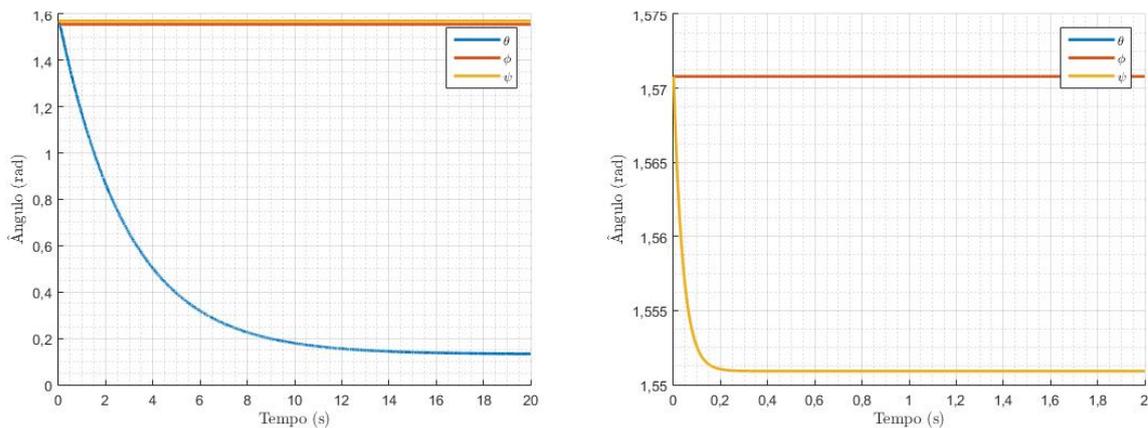


(a) Resposta ao impulso unitário de  $\dot{p}$  na origem (b) Resposta ao impulso unitário de  $\dot{q}$  na origem

Fonte: autoria própria

Para a resposta do sistema não linear, o comportamento dos ângulos é o mesmo do caso linear, mas a amplitude do deslocamento é metade, se comparada a resposta linear, como é possível observar nos gráficos expostos em 18a e 18b. Isto se deve ao fato da linearização ocorrer ao redor de uma posição de equilíbrio - descrita na seção 3.3 - e do impulso unitário ser uma entrada muito distante da entrada de equilíbrio ( $\dot{p} = \dot{q} = 0 \text{ rad/s}^2$ )

Figura 18 – Resposta do sistema não linear ao impulso unitário



(a) Resposta ao impulso unitário de  $\dot{p}$  na origem (b) Resposta ao impulso unitário de  $\dot{q}$  na origem

Fonte: autoria própria

### 5.2.3 Resposta à excitação senoidal

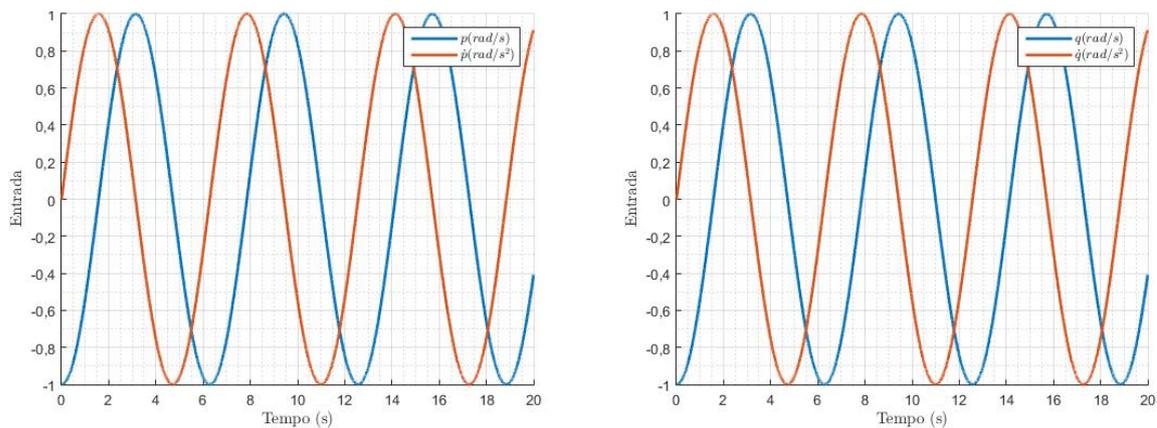
As excitações senoidais aqui analisadas são todas de amplitude unitária, e são da forma:  $\dot{p} = \text{sen}(\omega t)$  e  $\dot{q} = \text{sen}(\omega t)$ . Esse tipo de entrada simula, por exemplo, o veículo

transitando sobre um perfil de estrada irregular, de tal forma que as acelerações angulares impostas sobre a base pelo veículo variam de forma senoidal.

### 5.2.3.1 Excitação para $\omega = 1 \text{ rad/s}$

Os gráficos das figuras 19a e 19b mostram, respectivamente, as entradas  $p$  e  $q$  e suas derivadas  $\dot{p}$  e  $\dot{q}$ .

Figura 19 – Entradas de excitação senoidal de  $1 \text{ rad/s}$



(a) Entradas da excitação senoidal de  $\dot{p}$

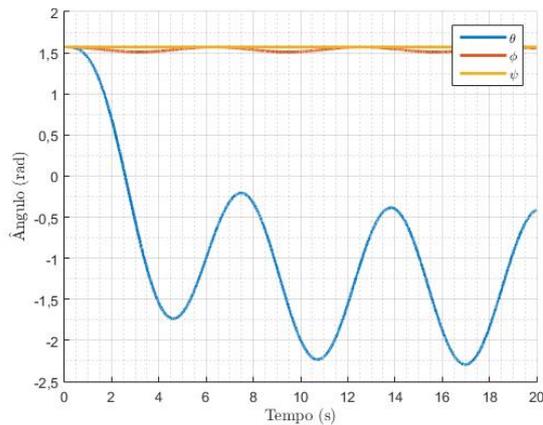
(b) Entradas da excitação senoidal de  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

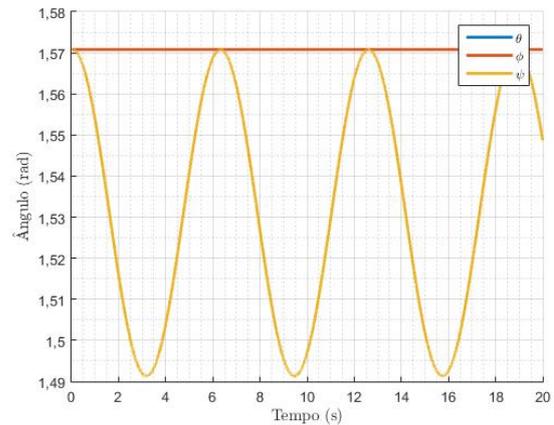
A resposta do caso linear mostra o mesmo já evidenciado nas demais entradas elementares. A figura 20a indica que a influência da entrada  $\dot{p}$  é dominante, e influencia muito no deslocamento angular do ângulo  $\theta$ , o qual, após um deslocamento de aproximadamente 180 graus - de  $1,5 \text{ rad}$  para  $-1,5 \text{ rad}$  - passa a oscilar ao redor do último valor com a mesma amplitude da entrada (unitária), ademais, o deslocamento dura cerca de 5 segundos. A posição angular de  $\psi$  é constante, enquanto que a de  $\phi$  apresenta comportamento também senoidal, mas com amplitude desprezível e sem deslocamento inicial.

No gráfico apresentado em 20b fica evidente que a influência de  $\dot{q}$  é inferior à de  $\dot{p}$ , causando apenas uma oscilação de pequena amplitude ( $0,04 \text{ rad}$ ) sobre o deslocamento angular de  $\psi$ .

Figura 20 – Resposta do sistema linear à excitação senoidal de 1 rad/s



(a) Resposta à excitação senoidal de  $\dot{p}$

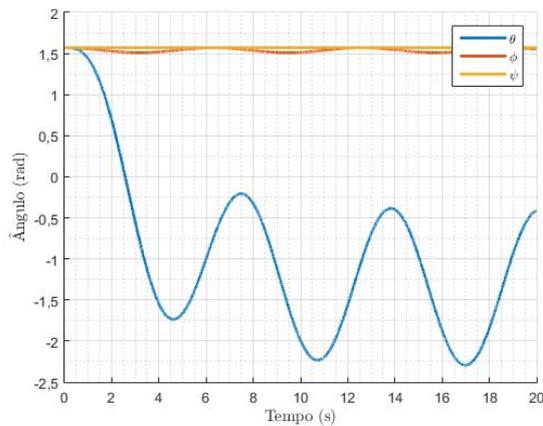


(b) Resposta à excitação senoidal de  $\dot{q}$

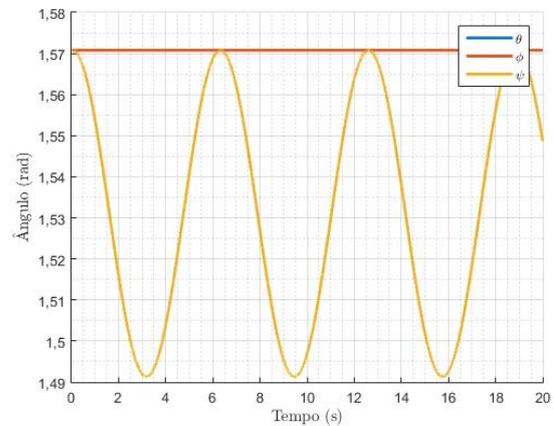
Fonte: autoria própria

A figura 21 mostra o caso não linear. A resposta não linear é muito próxima do caso linear, e as análises são análogas. Isto indica que a linearização está coerente com o problema em questão.

Figura 21 – Resposta do sistema não linear à excitação senoidal de 1 rad/s



(a) Resposta à excitação senoidal de  $\dot{p}$



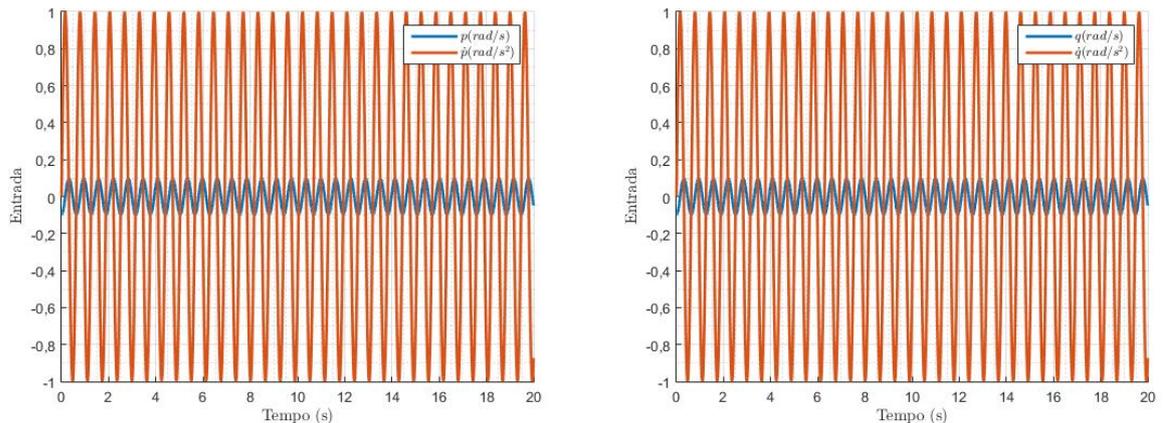
(b) Resposta à excitação senoidal de  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

### 5.2.3.2 Excitação para $\omega = 10 \text{ rad/s}$

Os gráficos 22a e 22b mostram, respectivamente, a excitação senoidal de  $p$  e  $q$  e suas derivadas.

Figura 22 – Entradas de excitação senoidal de 10 rad/s



(a) Entradas da excitação senoidal de  $\dot{p}$

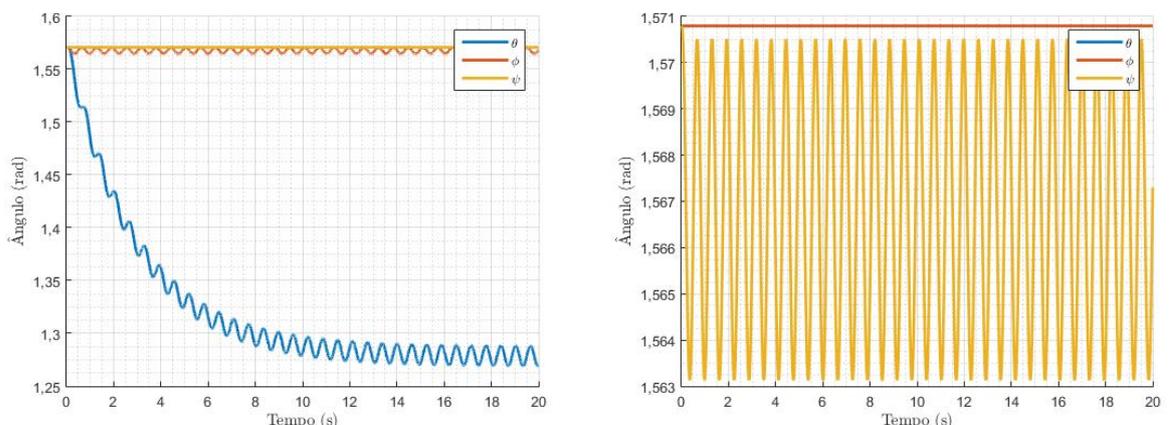
(b) Entradas da excitação senoidal de  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

A resposta do sistema linear para a excitação de maior frequência apresenta um comportamento análogo à de  $1 \text{ rad/s}$ , portanto, a influência de  $\dot{p}$  é mais significativa que a de  $\dot{q}$ , como mostra a figura 23. O deslocamento angular de  $\theta$ , neste caso, é inferior e de aproximadamente  $0,3 \text{ rad}$  (de  $1,57 \text{ rad}$  a aproximadamente  $1,29 \text{ rad}$ , e a oscilação é de maior frequência, e de menor amplitude - cerca de  $0,01 \text{ rad}$  ao redor de  $1,27 \text{ rad}$ . O ângulo  $\phi$  também sofre um deslocamento senoidal, porém sem variação inicial da posição angular e com amplitude menor que o primeiro ângulo. O ângulo  $\psi$  não varia sua posição.

Para a entrada  $\dot{q}$  (figura 23b) somente o ângulo  $\psi$  responde com uma oscilação angular de amplitude  $0,004 \text{ rad}$  - 10 vezes menor à amplitude da resposta de  $1 \text{ rad/s}$  e com frequência 10 vezes maior. Os ângulo  $\theta$  e  $\phi$  permanecem constantes.

Figura 23 – Resposta do sistema linear à excitação senoidal de 10 rad/s



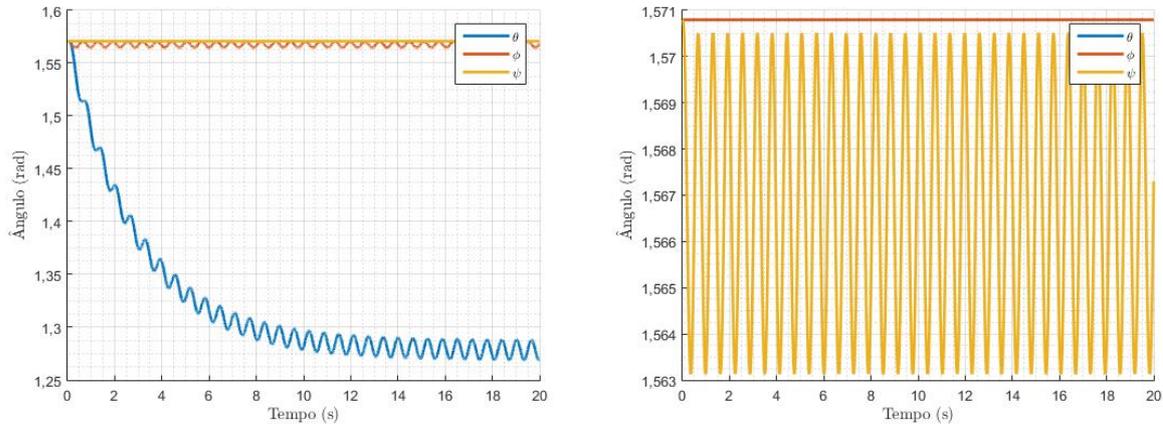
(a) Resposta à excitação senoidal de  $\dot{p}$

(b) Resposta à excitação senoidal de  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

A resposta do caso não linear é muito próxima do linear nesta situação, como esperado - analogamente à excitação de menor frequência.

Figura 24 – Resposta do sistema não linear à excitação senoidal de 10 rad/s



(a) Resposta à excitação senoidal de  $\dot{p}$

(b) Resposta à excitação senoidal de  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

A resposta a excitação de 100 rad/s encontra-se no apêndice B deste relatório.

### 5.3 Resposta aos sinais de operação

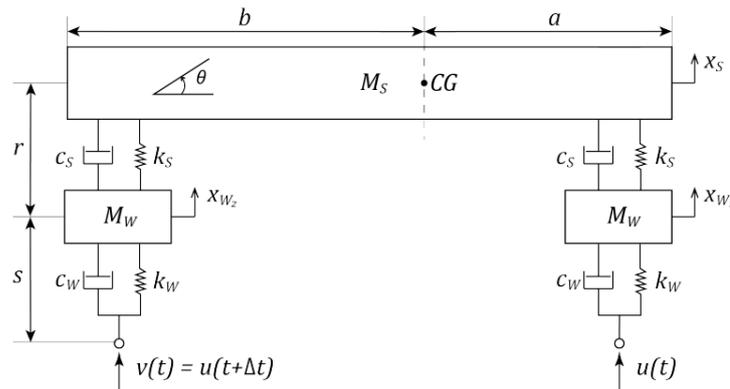
Nesta seção o intuito é aplicar ao sistema entradas mais próximas às que seriam observada durante a operação real do sistema. Para realizar tal estudo, é necessário fazer algumas observações, retomando as equações 3.35, 3.36 e 3.37, percebe-se que as entradas que afetam os sistema estão associadas aos eixos de rolagem e arfagem, sendo desprezados os sinais associados ao eixo de guinada. Por conta disso, os obstáculos que serão avaliados correspondem a lombadas, buracos e tachões.

Para obter os sinais de entrada do sistema ( $\dot{p}$  e  $\dot{q}$ ) para cada um desses elementos, foi necessário obter as acelerações angulares a partir do perfil da via, por conta disso, foi necessário empregar um modelo de suspensão de meio carro que associa o perfil da via a aceleração angular sentida pelo carro. Tais modelos foram aplicados para a arfagem e para a rolagem.

#### 5.3.1 Modelo de meio carro

O modelo de meia suspensão utilizado foi proposto por Ichige, Miazaki e Ribeiro (2019), mostrado na figura 25, e encontra-se descrito no apêndice C.

Figura 25 – Esquema de meia suspensão proposto por Ichige, Miazaki e Ribeiro (2019)



Fonte: Ichige, Miazaki e Ribeiro (2019)

### 5.3.2 Parâmetros numéricos do modelo de suspensão

Com as entradas do modelo da plataforma estabilizadora dadas por 3.43, pode-se utilizar o modelo de meia suspensão obtido anteriormente tanto para meio veículo longitudinalmente, como previsto em Shelke e Mitra (2018), a fim de estimarmos uma saída de  $\dot{p}$ , como uma boa aproximação para a meia suspensão transversalmente, como previsto em Giua, Seatzu e Usai (2001), para uma estimativa de  $\dot{q}$ . Dessa forma, a tabela 4 mostra os parâmetros dos modelos dessas.

Tabela 4 – Parâmetros numéricos para a simulação da meia suspensão

Símbolo	Componente	Metade longitudinal	Metade transversal	Unidade
$M_s$	Massa da metade do chassi	600	577,8	kg
$J$	Momento de inércia	730	108,3	kgm <sup>2</sup>
$M_w$	Massa da suspensão e da roda	45	45	kg
$k_s$	Constante elástica da suspensão	18000	18000	N/m
$c_s$	Coefficiente de amortecimento da suspensão	500	500	Ns/m
$k_w$	Constante elástica do pneu	102017,3	102017,3	N/m
$c_w$	Constante de amortecimento do pneu	138	138	Ns/m
$a$	Distância do centro de massa até a roda 1	1,5	1,325	m
$b$	Distância do centro de massa até a roda 2	1,15	1,325	m

Fonte: adaptado de Shelke e Mitra (2018) e Giua, Seatzu e Usai (2001)

### 5.3.3 Simulações

Neste trecho, serão feitas as simulações para transposição de obstáculo através dos modelos de meia suspensão. Os estudos serão feitos considerando a rotação apenas ao redor do eixo no qual deseja-se avaliar o movimento, para avaliar a superposição de efeitos seria ideal considerar um modelo de suspensão completa, o que se distancia do escopo do presente relatório.

### 5.3.3.1 Lombada

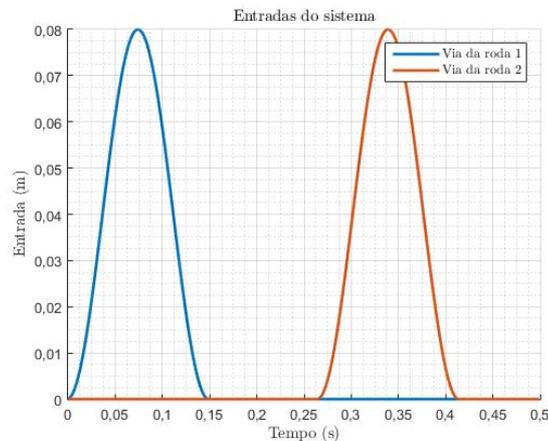
Nesta primeira simulação, o obstáculo a ser transposto é uma lombada, para isso, considera-se o modelo de meia suspensão longitudinal, dessa forma a transposição é feita primeiro pela roda dianteira e posteriormente pela roda traseira, sendo observada como entrada a aceleração angular relativa ao ângulo de arfagem.

O perfil da via será feito através de funções cossenoidais (PRASAD; SHIRAHATTI, 2020?), sendo a transposição das rodas, dianteiras e traseiras, representada na equação 5.1, a lombada a ser transposta apresenta amplitude máxima de  $0,08m$  e comprimento de  $1,5m$ , conforme modelo proposto pelo CONTRAN (1998).

$$\begin{cases} Z_d(t) = (0.08/2) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi Vt}{1,5}\right)\right) \\ Z_t(t) = (0.08/2) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi V(t-t(a+b/V))}{1,5}\right)\right) \end{cases} \quad (5.1)$$

O perfil da via pode ser identificado na figura 26, é possível perceber que a primeira elevação descreve a roda dianteira transpondo o obstáculo, e a segunda elevação descreve a roda traseira realizando a transposição.

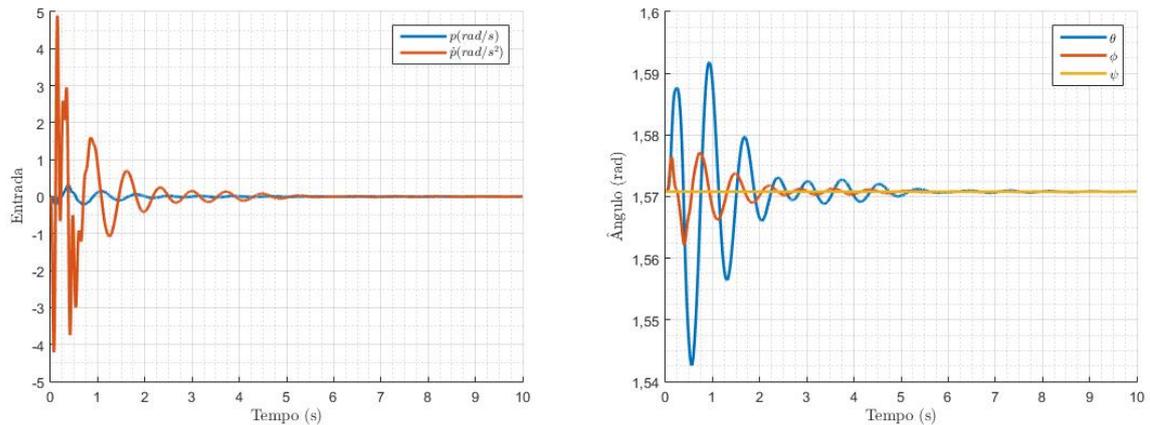
Figura 26 – Perfil da via com lombada



Fonte: autoria própria

Utilizando o modelo de meia suspensão proposto, a entrada relacionada ao ângulo de arfagem do sistema é dada por 27a. E, diante de tal informação, é possível visualizar as saídas obtidas para a transposição de uma lombada na figura 27b.

Figura 27 – Análise do sistema para transposição de lombada



(a) Perfil das entradas do sistema com lombada

(b) Respostas do sistema com lombada

Fonte: autoria própria

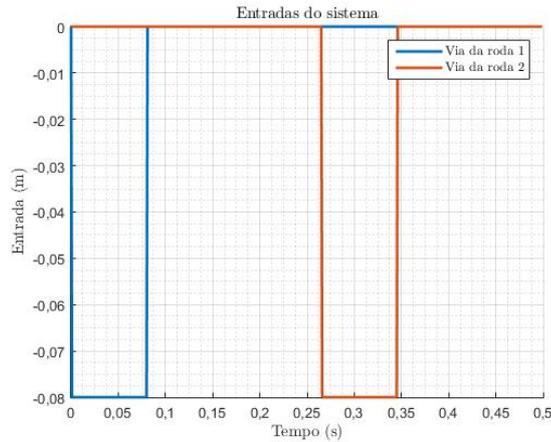
Analisando as figuras 27a e 27b, percebe-se que, após a transposição do obstáculo, a tendência é que o sistema oscile até retornar a posição de equilíbrio. É interessante avaliar que a transposição da lombada ocorre em menos de  $0,5s$ , enquanto o sistema retorna ao equilíbrio após  $5s$  da transposição. Além disso, assim como era esperado, só houve resposta do sistema para os ângulos  $\theta$  e  $\phi$ .

### 5.3.3.2 Buraco longitudinal

Assim como no caso anterior, nesta seção espera-se avaliar o movimento de arfagem do veículo, por conta disso será avaliada a transposição das rodas sobre um buraco. Conforme o estudo proposto por Xue et al. (2017), podem ser aplicados variados modelos para buracos, variando de  $2cm$  de profundidade a  $10cm$ , e largura variando entre  $30cm$  e  $120cm$ . Por conta disso, nesse estudo será proposta uma via com um buraco retangular de  $8cm$  de profundidade e  $80cm$  de comprimento.

O perfil da via com buraco pode ser identificado na figura 28, é possível perceber que a primeira elevação descreve a roda dianteira transpondo o obstáculo, e a segunda elevação descreve a roda traseira realizando a transposição.

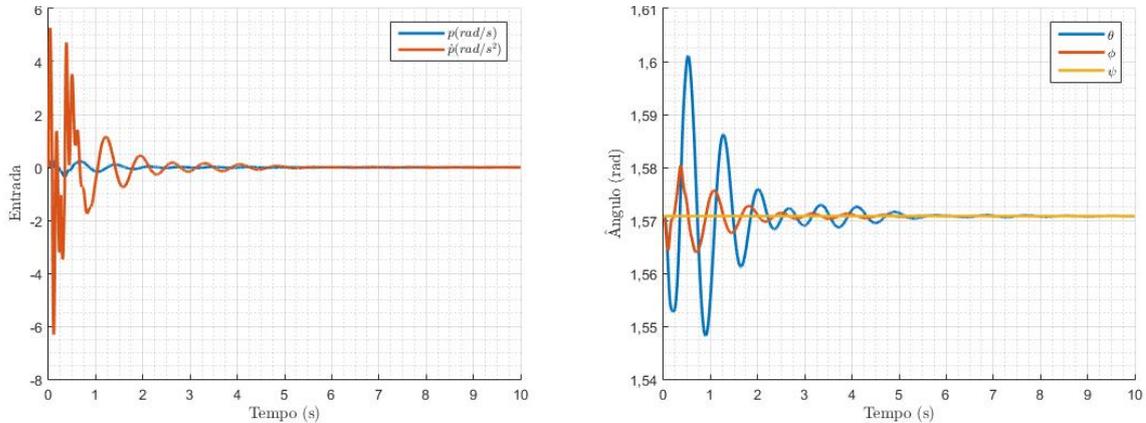
Figura 28 – Perfil da via com buraco para o caso longitudinal



Fonte: autoria própria

Utilizando o modelo de meia suspensão proposto, a entrada relacionada ao ângulo de arfagem do sistema é dada por 29a. E, diante de tal informação, é possível visualizar as saídas obtidas para a transposição de um buraco na figura 29b.

Figura 29 – Análise do sistema para transposição de buraco com modelo longitudinal



- (a) Perfil das entradas do sistema para a via com buraco longitudinal  
 (b) Resposta do sistema para a via com buraco longitudinal

Fonte: autoria própria

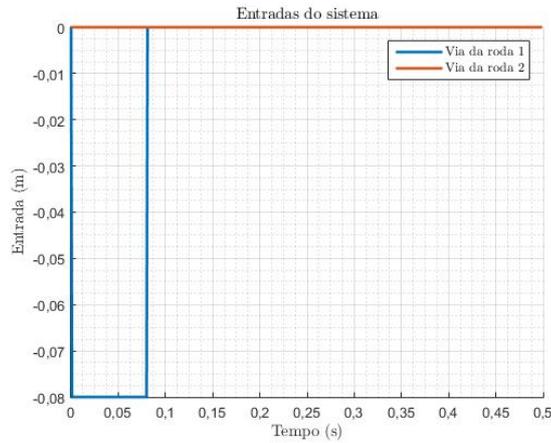
Ao comparar as figuras 29a e 29b com as figuras 27a e 27b, percebe-se que o comportamento do sistema é muito similar nas duas situações, no entanto nota-se diferença ao comparar a amplitude de oscilações das variáveis do sistema. Essa maior amplitude no caso com buraco pode-se justificar na diferença de perfis observados nas figuras 26 e 28. Percebe-se que a mudança abrupta de perfil induz o sistema a uma perturbação mais intensa.

### 5.3.3.3 Buraco transversal

Nesta etapa da análise, o eixo de interesse deixa de ser o eixo no qual ocorre o movimento de arfagem e passa a ser o eixo no qual ocorre o movimento de rolagem, sendo assim, o olhar estará direcionado a variável de entrada  $\dot{q}$ . Neste caso, será considerando o mesmo buraco do item anterior, a diferença é que neste caso, apenas a roda de um dos lados, esquerdo ou direito, transpõe o obstáculo da via.

O perfil da via com buraco pode ser identificado na figura 30, repare que apenas uma das rodas fica sujeita a transposição do obstáculo, enquanto a outra permanece no referencial nulo.

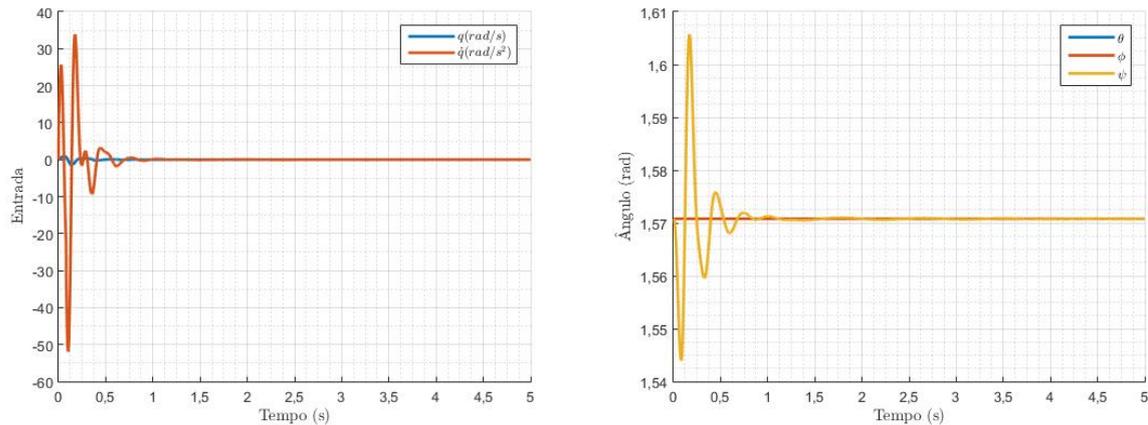
Figura 30 – Perfil da via com buraco para o caso transversal



Fonte: autoria própria

Utilizando o modelo de meia suspensão transversal, a entrada relacionada ao ângulo de rolagem do sistema é dada por 31a. E, diante de tal informação, é possível visualizar as saídas obtidas para a transposição do buraco com apenas um dos lados do veículo na figura 31b.

Figura 31 – Análise do sistema para transposição de buraco com modelo transversal



(a) Perfil das entradas do sistema para a via com buraco transversal (b) Resposta do sistema para a via com buraco transversal

Fonte: autoria própria

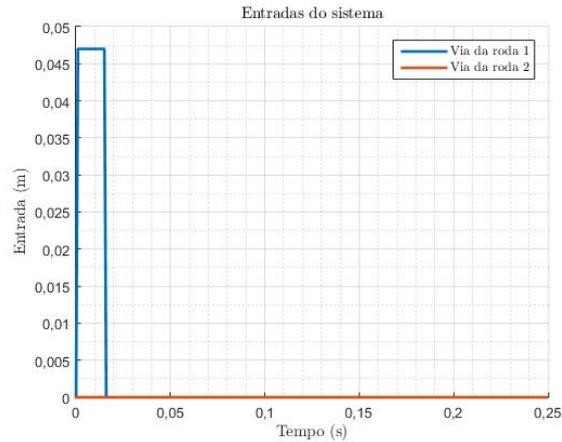
Analisando as figuras 31a e 31b, nota-se que ocorrem menos oscilações quando comparado ao caso em que duas rodas transpunham o obstáculo, porém, assim como nos casos em que o veículo transpunha o obstáculo com duas rodas, o tempo para que o sistema retorne ao equilíbrio é aproximadamente dez vezes maior que o tempo necessário para transpor o obstáculo. Além disso, o fenômeno de rolagem, também de forma esperada, atuou apenas na variação do ângulo  $\psi$ .

#### 5.3.3.4 Tachão

Por fim, será feita a análise para um último obstáculo a ser transposto. O tachão é um dispositivo localizado na via com o intuito de realizar a iluminação reflexiva desta. Nesta simulação, o tachão será considerado como tendo uma seção transversal de  $4,7\text{cm}$  e  $15\text{cm}$  de extensão, conforme descrito pela CET (2018).

O perfil da via com tachão pode ser identificado na figura 32, é possível perceber que está representada a elevação de apenas uma das rodas. De modo que o movimento irá ocorrer ao redor do eixo de rolagem do veículo.

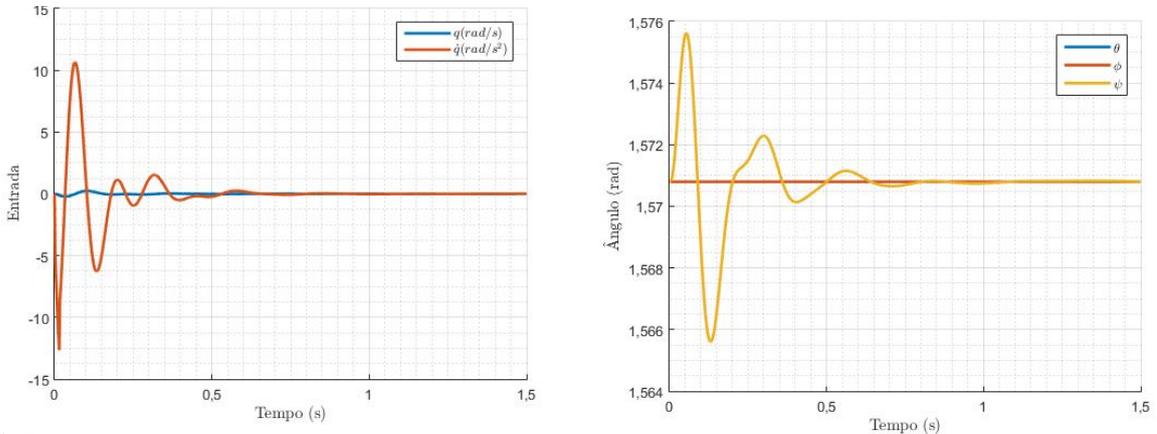
Figura 32 – Perfil da via com tachão



Fonte: autoria própria

Utilizando o modelo de meia suspensão transversal proposto, a entrada relacionada ao ângulo de rolagem do sistema é dada por 33a. E, diante de tal informação, é possível visualizar as saídas obtidas para a transposição do tachão na figura 33b.

Figura 33 – Análise do sistema para transposição de tachão



(a) Perfil das entradas do sistema para a via com tachão

(b) Resposta do sistema para a via com tachão

Fonte: autoria própria

Observando os perfis propostos em 30 e 32, já era de se esperar que a resposta do sistema fosse similar, no entanto com uma diferença na amplitude de oscilação, como pode ser observado nas figuras 31b e 33b.

## 5.4 Simulação por matriz de transição

### 5.4.1 Introdução

Como visto, o espaço de estados para o sistema é dada pela equação 5.2.

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (5.2)$$

A resposta linear do sistema também pode ser encontrada por 5.3, em que  $\Gamma(\Delta t)$  e  $\Phi(\Delta t)$  são, respectivamente, a matriz de termos forçantes e a matriz de transição dadas por 5.4 e 5.5.

$$X_{i+1} = \underbrace{e^{A\Delta t}}_{\Phi(\Delta t)} X_i + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau}_{\Gamma(\Delta t)} Bu_i \quad (5.3)$$

$$\Phi = e^{A\Delta t} \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k \Delta t^k}{k!} \quad (5.4)$$

$$\Gamma = \int_0^t \Phi(t-\tau) d\tau \approx \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k \Delta t^k}{(k+1)!} \quad (5.5)$$

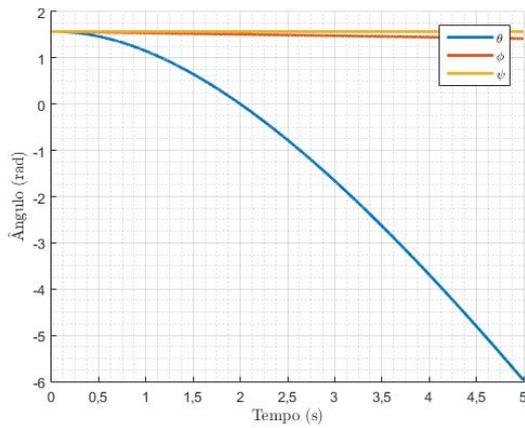
Com o espaço de estados do modelo apresentado, as matrizes de transição e resolvente são calculadas para uma precisão de  $n = 100$  iterações, nas equações 5.6 e 5.7.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0010 & 0 & 0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9997 & 0 & 0,0322 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0,0010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9678 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0,0010 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9752 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

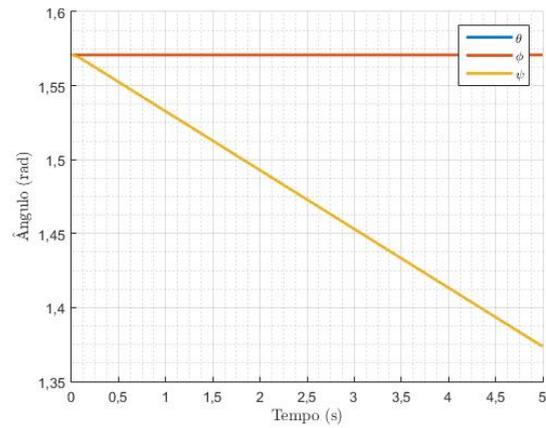
$$\Gamma = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0005 & 0 & 0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9998 & 0 & 0,0162 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0,0005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9838 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0,0005 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9875 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Segue os resultados obtidos através da simulação do sistema por matriz de transição e de termos forçantes. As figuras 34, 35, 36 e 37 mostram, respectivamente, a resposta do sistema linear, através de matriz de transição, às entradas elementares: degrau, impulso (unitários) e senoidal (amplitude unitária e frequências de 1 e 10 rad/s).

Figura 34 – Resposta do sistema linear por matriz de transição a entrada degrau unitário



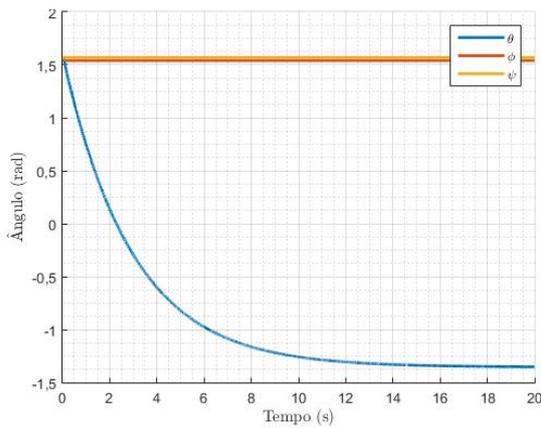
(a) Resposta a entrada degrau de  $\dot{p}$



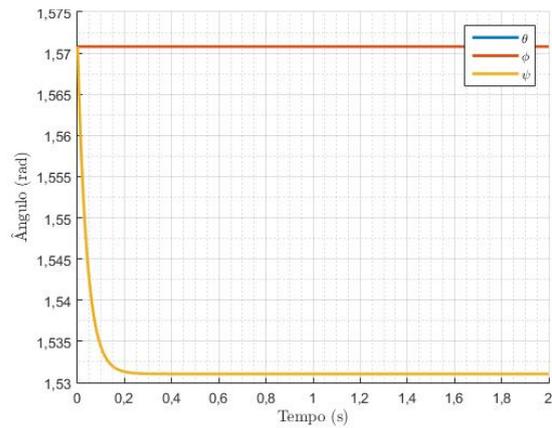
(b) Resposta a entrada degrau de  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

Figura 35 – Resposta do sistema linear por matriz de transição a entrada impulso unitário



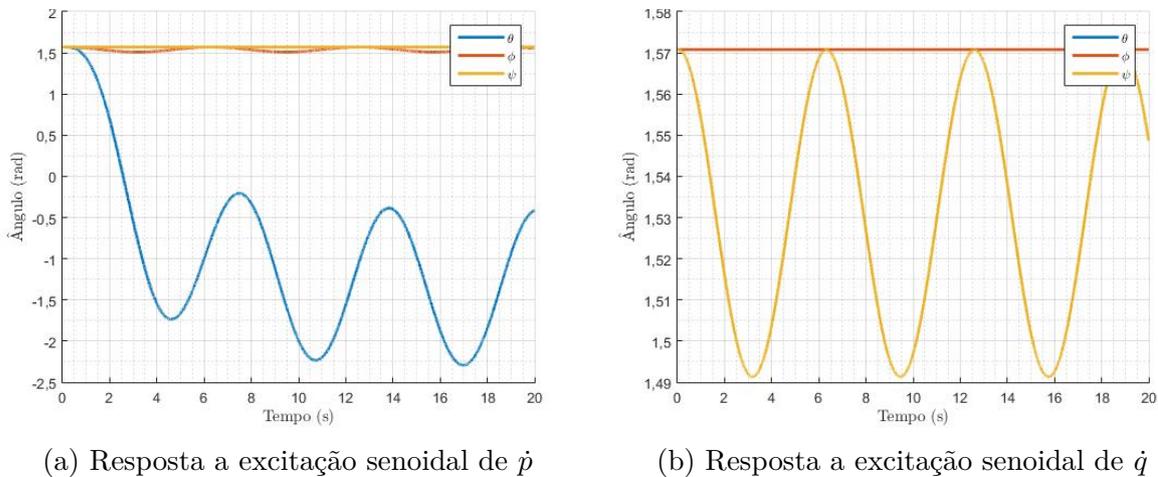
(a) Resposta a entrada impulso de  $\dot{p}$



(b) Resposta a entrada impulso de  $\dot{q}$

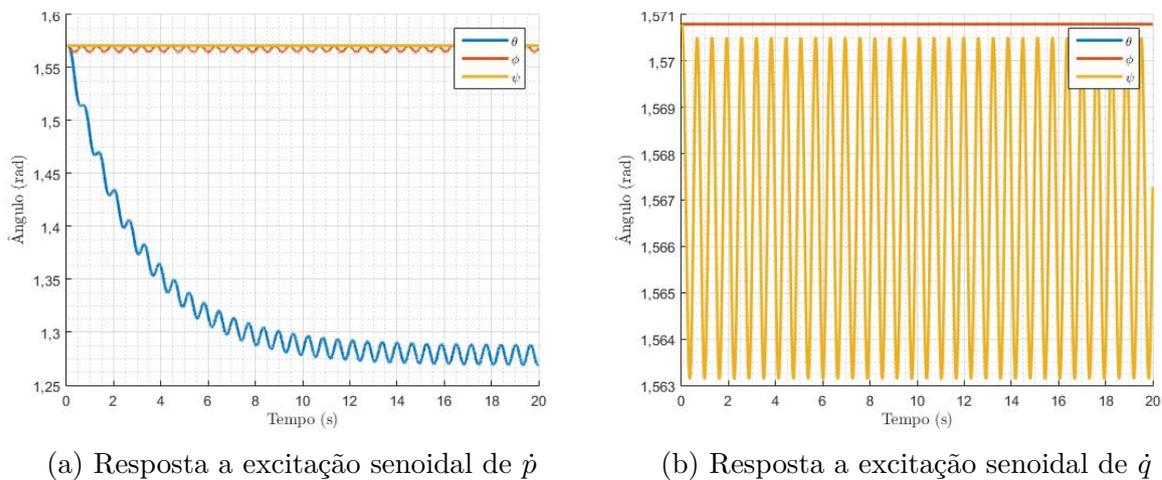
Fonte: autoria própria

Figura 36 – Resposta do sistema linear por matriz de transição a excitação senoidal com  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  de amplitude unitária



Fonte: autoria própria

Figura 37 – Resposta do sistema linear por matriz de transição a excitação senoidal com  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  de amplitude unitária



Fonte: autoria própria

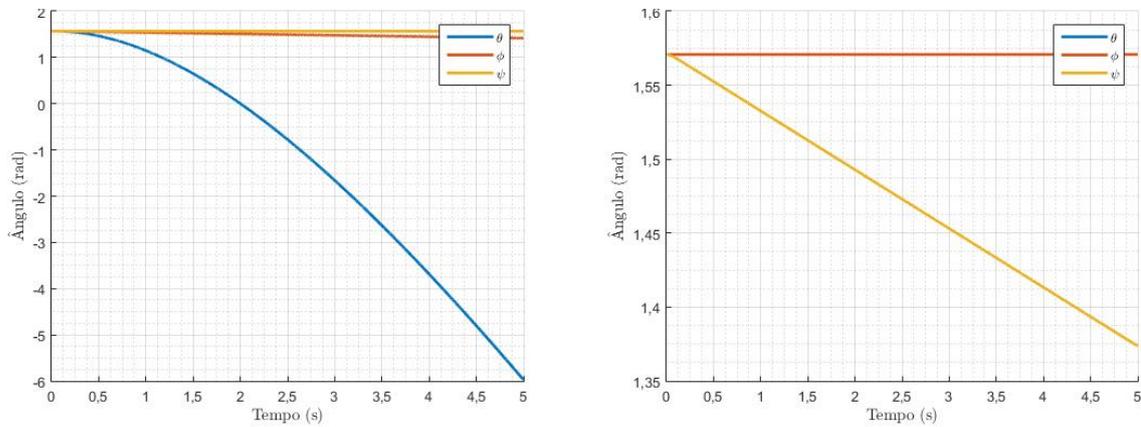
## 5.5 Comparação entre a simulação no domínio do tempo e da frequência

### 5.5.1 Simulações no domínio da frequência

Simulando o sistema no domínio da frequência, através das equações e funções de transferência desenvolvidas na seção 4, obtém-se as seguintes respostas. As figuras 38, 39, 40 e 41 mostram, respectivamente, a simulação do sistema linear no domínio da

frequência para as entradas degrau, impulso (unitários) e senoidal (frequência de 1 e 10 rad/s e amplitude unitária).

Figura 38 – Resposta do sistema linear no domínio da frequência a entrada degrau unitário

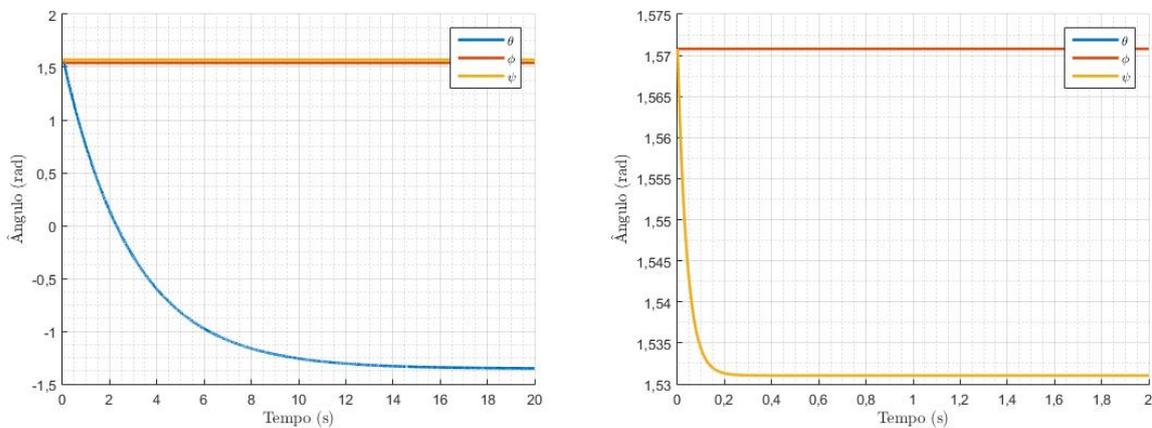


(a) Resposta a entrada degrau de  $\dot{p}$

(b) Resposta a entrada degrau de  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

Figura 39 – Resposta do sistema linear no domínio da frequência a entrada impulso unitário

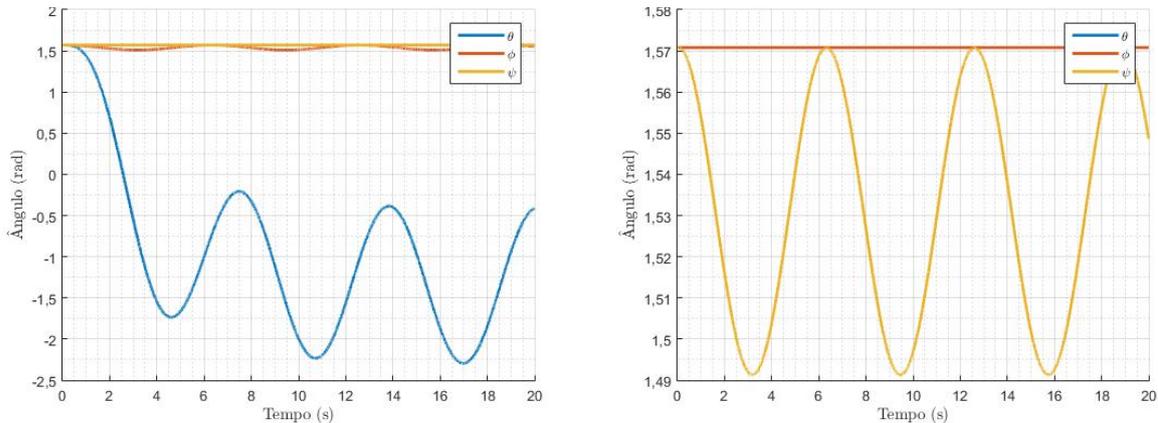


(a) Resposta a entrada impulso de  $\dot{p}$

(b) Resposta a entrada impulso de  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

Figura 40 – Resposta do sistema linear no domínio da frequência a excitação senoidal com  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  de amplitude unitária

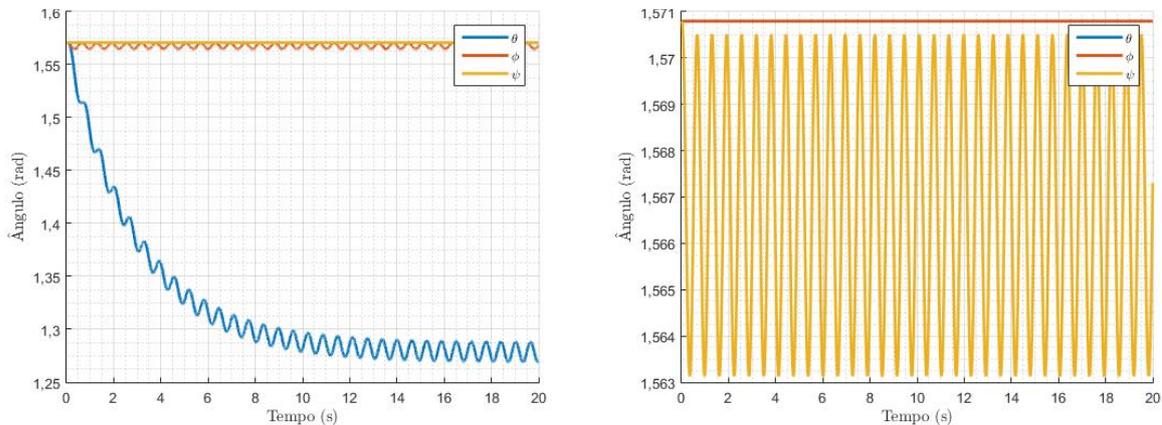


(a) Resposta a excitação senoidal de  $\dot{p}$

(b) Resposta a excitação senoidal de  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

Figura 41 – Resposta do sistema linear no domínio da frequência a excitação senoidal com  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  de amplitude unitária



(a) Resposta a excitação senoidal de  $\dot{p}$

(b) Resposta a excitação senoidal de  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

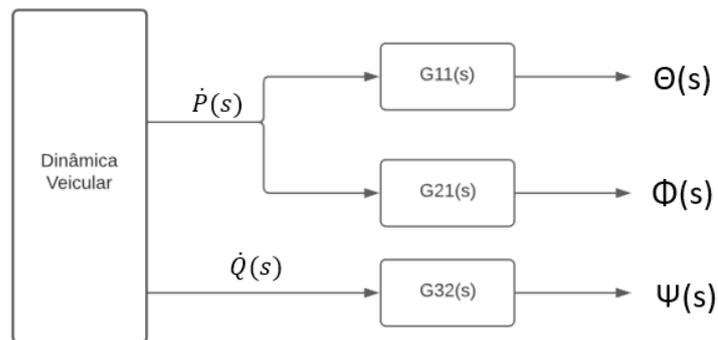
### 5.5.2 Comparação de resultados

Observando os resultados obtidos através da simulação do sistema linear no domínio do tempo, utilizando-se do espaço de estados, expostos nas figuras 14, 17, 20 e 23, comparando-os com os obtidos através da simulação por matriz de transição, ainda no domínio do tempo (34, 35, 36 e 37) e com a simulação do sistema linear no domínio da frequência (38, 39, 40 e 41); pode-se concluir que todos os métodos convergem para os mesmos resultados, e obtêm as mesmas respostas do sistema linear mediante diferentes entradas elementares. Sendo assim, todos são válidos ao se analisar o sistema em questão.

## 6 Diagrama de blocos

O diagrama de blocos para o sistema leva em consideração as entradas, advindas da dinâmica veicular, as funções que modificam essas entradas, e as saídas.

Figura 42 – Diagrama de blocos do sistema linear



Fonte: autoria própria

Na figura, os termos  $G_{11}$ ,  $G_{21}$  e  $G_{32}$  se referem às funções de transferência desenvolvidas em 4.4, e o diagrama como um todo se refere à resolução de 4.6 a 4.8.

## 7 Considerações finais

Nesse trabalho foi elaborada uma profunda modelagem e uma análise dinâmica de uma plataforma estabilizadora de três graus de liberdade. Como motivação, conclui-se que é um tema relevante para diversas aplicações na sociedade, como telecomunicações, transmissão de dados, militar, entre outros.

Em seguida, foi proposto um modelo físico do componente, com sua respectiva modelagem cinemática e dinâmica a partir dos ângulos de Euler. Assim, do modelo físico, foi encontrado o modelo matemático, com as leis da mecânica clássica e hipóteses simplificadoras.

Dessa forma, foi possível obter o espaço de estados para o modelo analisado. Após uma intensa linearização, chegou-se, também, ao espaço de estados linearizado. Com os valores numéricos, obteve-se os polos e zeros do sistema, que é dado como marginalmente estável e de fase mínima.

Com isso, foi possível executar a simulação do modelo de diferentes maneiras, de forma que o modelo linear atendeu com bastante precisão ao modelo não linear. Além disso, os modelos lineares foram todos suficientemente próximos (desprezando-se erros numéricos), como a simulação no domínio do tempo, da frequência e por matriz de transição e termos forçantes. Para toda essa simulação, foi utilizado o *software MatlabR2015a*, cujo código se encontra no apêndice D.

Para a simulação, foram utilizados sinais elementares, como impulso, degrau e excitação senoidal, e também a simulação em cima de uma suspensão já modelada, para a obtenção de um resultado mais prático. As respostas obtidas nas simulações foram coerentes com o esperado pelo significado físico do componente.

Finalmente, como explicitado na introdução desse trabalho, não foi de escopo analisar o sistema de controles e atuadores desse modelo, e sim apenas as respostas a excitações pré-definidas. Dessa forma, como próximo passo para uma melhor otimização do uso desse componente, é de interesse o desenvolvimento de um sistema de controle para o mecanismo.

## Referências

- ABRAHAO, I. O.; MARCONI, A. *As fórmulas de Euler em projeção estereográfica e seu significado físico no levantamento de indicatrizes óticas*. 1975. Citado na página 2.
- BARNES, F. N. Stable member equations of motion for a three-axis gyro stabilized platform. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, IEEE, n. 5, p. 830–842, 1971. Citado 4 vezes nas páginas 3, 5, 6 e 7.
- CET, C. de Engenharia de T. *Dispositivos auxiliares*. 2018. Disponível em: <<http://www.cetsp.com.br/media/858252/MSU-Vol-07-Dispositivos-Auxiliares-Delimitadores.pdf>>. Citado na página 42.
- CONTRAN, C. N. D. T. *RESOLUÇÃO Nº 39, DE 21 DE MAIO DE 1998*. 1998. Disponível em: <[https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/prop\\_mostrarintegra;jsessionid=F7942D5E6867E13EAC2276579099167B.proposicoesWebExterno2?codteor=450324&filename=LegislacaoCitada+-INC+301/2007](https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/prop_mostrarintegra;jsessionid=F7942D5E6867E13EAC2276579099167B.proposicoesWebExterno2?codteor=450324&filename=LegislacaoCitada+-INC+301/2007)>. Citado na página 38.
- EUROCONTROL. *STABILIZED PLATFORM - 3 AXIS*. 2018. Disponível em: <<https://www.eurocontrol-spa.com/project/stabilized-platform-antenna-rotation-3-axis/>>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 53.
- FANG, J.; YIN, R.; LEI, X. An adaptive decoupling control for three-axis gyro stabilized platform based on neural networks. *Mechatronics*, Elsevier, v. 27, p. 38–46, 2015. Citado na página 3.
- FRANÇA, L.; MATSUMURA, A. *Mecânica geral*. Edgard Blücher, 2004. ISBN 9788521203414. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=IUnSAwAACA AJ>>. Citado na página 9.
- GIUA, A.; SEATZU, C.; USAI, G. A mixed suspension system for a half-car vehicle model. *Kluwer Academic Publishers*, p. 375–397, 2001. Citado na página 37.
- GROBER, D. E. *Stabilizing mount for hands-on and remote operation of cameras, sensors, computer intelligent devices and weapons*. [S.l.]: Google Patents, 2008. US Patent App. 11/343,711. Citado na página 1.
- HILKERT, J. Inertially stabilized platform technology concepts and principles. *IEEE control systems magazine*, IEEE, v. 28, n. 1, p. 26–46, 2008. Citado na página 1.
- ICHIGE, E.; MIAZAKI, G.; RIBEIRO, L. Análise de conforto de motoristas de ônibus. 2019. Citado 4 vezes nas páginas 3, 36, 37 e 57.
- JACKA, N. et al. Design of stabilized platforms for deep space optical communications (dsoc). In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS. *Free-Space Laser Communication and Atmospheric Propagation XXIX*. [S.l.], 2017. v. 10096, p. 100960P. Citado na página 1.
- JUNIOR, H. C. de S. *Modelagem, simulação e controle de um giroscópio*. 2014. Projeto de Graduação, UFRJ (Escola Politécnica), Rio de Janeiro, Brazil. Citado na página 2.

- LEGHMIZI, S.; LIU, S. *Kinematics Modeling for Satellite Antenna Dish Stabilized Platform*. 2010. 2010 International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation. Citado na página 8.
- LEGHMIZI, S.; LIU, S. A survey of fuzzy control for stabilized platforms. *arXiv preprint arXiv:1109.0428*, 2011. Citado na página 1.
- MICROSTRAIN. *Platform Stabilization on Dynamic Vehicles*. 2015. Disponível em: <<https://www.microstrain.com/sites/default/files/Platform.pdf>>. Citado na página 1.
- NEGRO, J.; GRIFFIN, S. *Inertially Stabilized Platforms for Precision Pointing Applications to Directed-Energy Weapons and Space-Based Lasers (Preprint)*. [S.l.], 2006. Citado na página 1.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL BRASIL, 2011. ISBN 9788576058106. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iL3FYgEACAAJ>>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 14 e 24.
- PRASAD, P.; SHIRAHATTI, A. Investigation on effect of hump on a vehicle suspension for the comfortable ride. 2020? Citado na página 38.
- SAID, L.; LATIFA, B. Modeling and control of mechanical systems in simulink of matlab. *Applications of MATLAB in science and engineering. UK: InTech*, p. 317–335, 2011. Citado na página 3.
- SCHEURICH, B. et al. *A Gyroscopic Damper System – Damping with New Characteristics*. 23rd Aachen Colloquium Automobile and Engine Technology 2014, 2014. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/266621868\\_A\\_Gyroscopic\\_Damper\\_System\\_-\\_Damping\\_with\\_New\\_Characteristic](https://www.researchgate.net/publication/266621868_A_Gyroscopic_Damper_System_-_Damping_with_New_Characteristic)>. Citado na página 19.
- SHELKE, G. D.; MITRA, A. C. Analysis and validation of linear half car passive suspension system with different road profiles. *IOSR Journal of Engineering*, p. 14–19, 2018. Citado na página 37.
- SINGH, A.; THAKUR, R.; CHATTERJEE, D. S. Design and optimal control of line of sight stabilization of moving target. *IOSR Journal of Electrical and Electronics Engineering*, v. 9, n. 5, p. 27–32, 2014. Citado na página 25.
- TRINDADE, M. *Uma introdução à dinâmica de sistemas multicorpos*. 1996. Citado na página 2.
- Xue, G. et al. Pothole in the dark: Perceiving pothole profiles with participatory urban vehicles. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, v. 16, n. 5, p. 1408–1419, 2017. Citado na página 39.
- ZHOU, X.; ZHANG, H.; YU, R. Decoupling control for two-axis inertially stabilized platform based on an inverse system and internal model control. *Mechatronics*, Elsevier, v. 24, n. 8, p. 1203–1213, 2014. Citado na página 3.

# APÊNDICE A – Ficha técnica da plataforma da *EUROCONTROL*

Figura 43 – Ficha técnica da plataforma da *EUROCONTROL*



Weapon controls  
Power electronics  
Control electronics  
Servo systems  
Electro optical systems  
Electromechanics

## STABILIZED PLATFORM - 3 AXIS

**P/N: M334**

**DESCRIPTION: 3 AXIS STABILIZED PLATFORM**

**SYSTEM COMPONENTS > ST077:**

- M334 PLATFORM
- Q615 CONTROL CABINET
- Q612 CONTROL PANEL
- Q618 SAFETY SWITCH

INPUT LINE: THREE PHASE 380V 50Hz or  
THREE PHASE 440V 60Hz

ANGLES RANGE: Azimuth: continuous

Roll: +/- 25°

Pitch: +/- 10°

ANGLES ACCURACY: Azimuth: continuous

Roll: +/- 25°

Pitch: +/- 10°

DIMENSIONS & MASS: [mm] 1260 x 830 x 630  
200 Kg

MAIN PROJECT STANDARDS REFERENCES:

- MIL-STD-810 (Environmental conditions)
- MIL-STD-461 (EMC)
- MIL-STD-167-1 (Vibration)
- MIL-STD-740 (Noise)
- MIL-S-901 (Shock)

IP GRADE: IP54

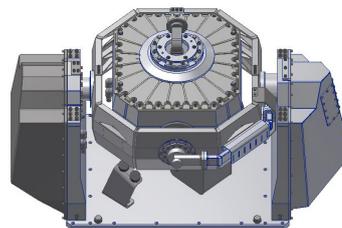
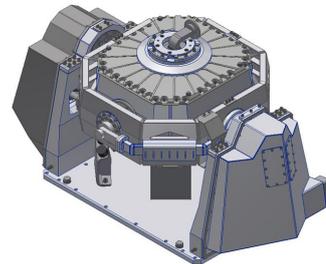
ELECTRIC INTERFACE: MIL CONNECTORS

SYSTEM (e.g.)

- ANTENNA ROTATION
- RADAR ROTATION

APPLICATION FIELD: NAVAL DEFENCE

**KEY POINT: WAVEGUIDE TO PAYLOAD WITH 3 ROTARY JOINTS  
LOW ERROR DURING ROTATION/STABILIZATION**



Eurocontrol S.p.A. | Via Varenna, 52/A - 16155 Genova  
Tel. +39 010 42 25 11 | Fax +39 010 699 00 01  
info@eurocontrol-spa.com | [www.eurocontrol-spa.com](http://www.eurocontrol-spa.com)

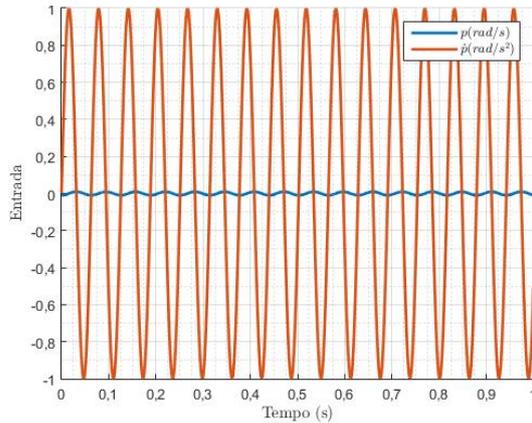
Capitale Sociale € 1.769.268,28 | Codice Fiscale - Partita IVA - Numero di iscrizione Registro Imprese Genova 02241420104 | R.E.A. GE-269640



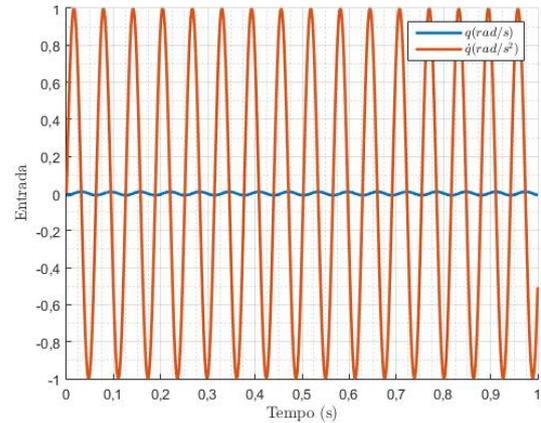
Fonte: EUROCONTROL (2018)

## APÊNDICE B – Excitação de $100 \text{ rad/s}$

Figura 44 – Entradas de excitação senoidal de  $100 \text{ rad/s}$



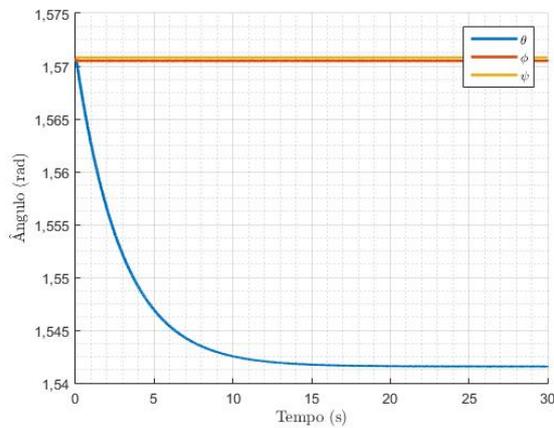
(a) Entradas da excitação senoidal de  $\dot{p}$



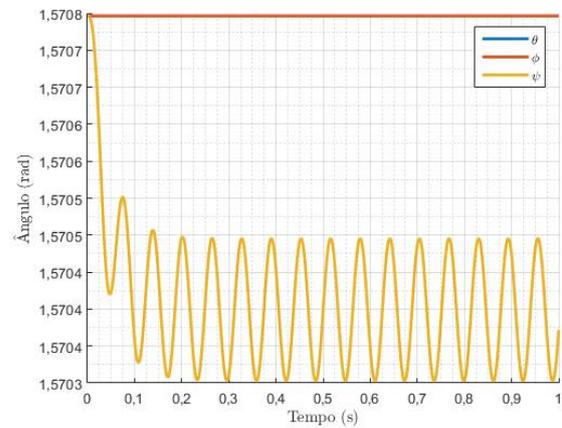
(b) Entradas da excitação senoidal de  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

Figura 45 – Resposta linear à excitação senoidal de  $100 \text{ rad/s}$



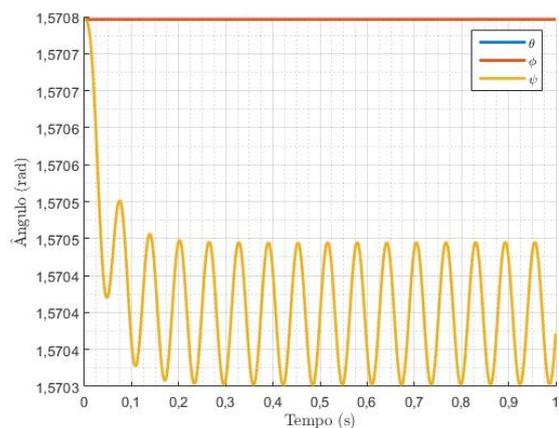
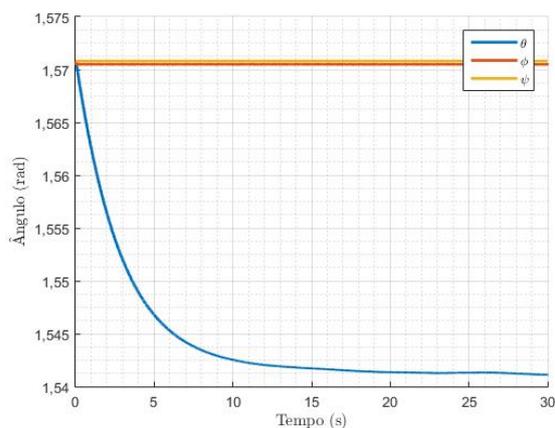
(a) Resposta linear à excitação senoidal de  $\dot{p}$



(b) Resposta linear à excitação senoidal de  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

Figura 46 – Resposta não linear à excitação senoidal de 100 rad/s



(a) Resposta não linear à excitação senoidal de  $\dot{p}$  (b) Resposta não linear à excitação senoidal de  $\dot{q}$

Fonte: autoria própria

## APÊNDICE C – Modelo de meia suspensão

Ao longo do trabalho foram empregados dois modelos de meia suspensão de veículo, um longitudinal e um transversal. O objetivo do uso de tais modelos foi visualizar a simetria em relação ao eixo de rolagem ( $Y_c$ ) para o modelo longitudinal, e a simetria em relação ao eixo de arfagem ( $X_c$ ), para o modelo transversal. Sendo assim no modelo longitudinal as duas rodas dianteiras se movem de forma idêntica, possibilitando apenas o movimento de arfagem, da mesma forma o par de rodas traseiras. Para o modelo longitudinal existe apenas o par de rodas traseiras, ou o par de rodas dianteiras, sendo assim, pode-se aplicar um perfil diferente a cada um dos lados do veículo, de modo que seja induzido o movimento de rolamento no veículo.

Para expressar tais modelos, foi necessário considerar a existência de alguns elementos puros, sendo eles a massa do meio carro e a massa das rodas, o amortecimento viscoso tanto da suspensão quanto do pneu, e a deformação elástico-linear tanto da mola da suspensão, quanto do pneu. Além disso, foi fundamental a hipótese de que a dinâmica da plataforma não influencia na dinâmica da suspensão.

De posse desses elementos, é possível representar ambos os modelos pela figura 25, de modo que as variáveis de estado desse modelo são:

- $\theta$  - inclinação do meio carro, variável de interesse;
- $x_{w1}$  - posição da roda 1;
- $x_{w2}$  - posição da roda 2;
- $x_s$  - posição do centro de massa do meio carro;

e suas respectivas derivadas. Enquanto que as seguintes constantes são utilizadas:

- $k_s$  - constante elástica da suspensão;
- $c_s$  - coeficiente de amortecimento da suspensão;
- $M_w$  - massa do conjunto da suspensão e roda;
- $k_w$  - constante elástica do pneu;
- $c_w$  - coeficiente de amortecimento do pneu;
- $M_s$  = massa da metade do veículo;
- $a$  e  $b$  - distâncias ao centro de massa da metade do veículo.

e as entradas:

- $u(t)$  - deslocamento vertical da via na roda 1;
- $v(t)$  - deslocamento vertical da via na roda 2;

e suas respectivas derivadas.

Dessa forma, após a modelagem e linearização feita por Ichige, Miazaki e Ribeiro (2019), as matrizes para descrição em espaço de estado são representadas pelas equações C.1, C.2, C.3 C.4, C.5. Sendo as constantes a serem empregadas no presente trabalho descritas na tabela 4.

$$X_s = [x_s \quad \dot{x}_s \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad x_{w1} \quad \dot{x}_{w1} \quad x_{w2} \quad \dot{x}_{w2}]^T \quad (C.1)$$

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s+k_s}{M_s} & -\frac{c_s+c_s}{M_s} & \frac{a k_s-b k_s}{M_s} & \frac{a c_s-b c_s}{M_s} & \frac{k_s}{M_s} & \frac{c_s}{M_s} & \frac{k_s}{M_s} & \frac{c_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a k_s-b k_s}{J} & \frac{a c_s-b c_s}{J} & -\frac{k_s a^2+k_r b^2}{J} & -\frac{c_s a^2+c_s b^2}{J} & -\frac{a k_s}{J} & -\frac{a c_s}{J} & \frac{b k_s}{J} & \frac{b c_s}{J} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_s}{m_w} & \frac{c_s}{m_w} & -\frac{a k_s}{m_w} & -\frac{a c_s}{m_w} & -\frac{k_s+k_w}{m_w} & -\frac{c_s+c_w}{m_w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_w} & \frac{c_s}{m_w} & \frac{b k_s}{m_w} & \frac{b c_s}{m_w} & 0 & 0 & -\frac{k_s+k_w}{m_w} & -\frac{c_s+c_w}{m_w} \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

$$B_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_w}{m_w} & \frac{c_s}{m_w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_w}{m_w} & \frac{c_s}{m_w} \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

$$C_s = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (C.4)$$

$$D_s = 0 \quad (C.5)$$

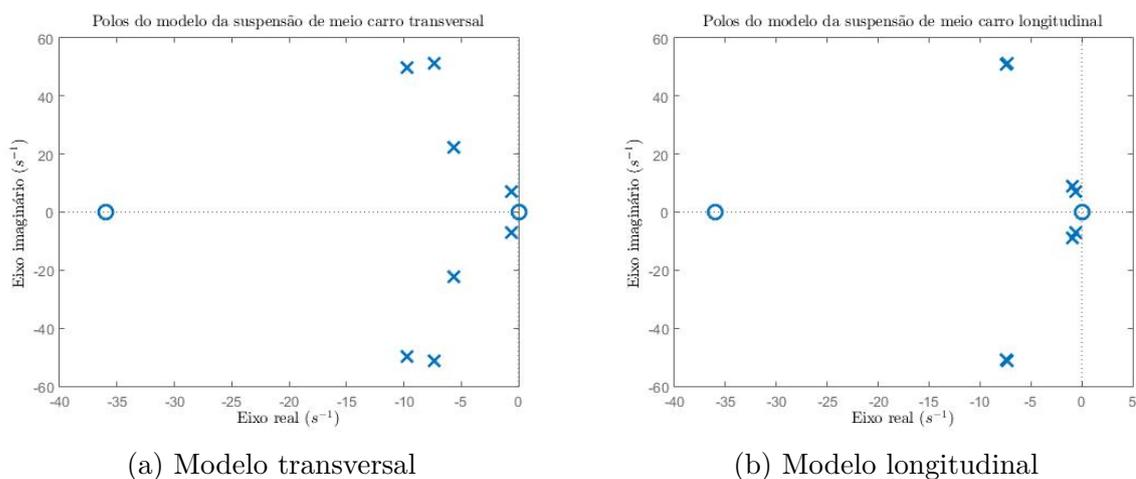
$$U_s = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ v \\ \dot{v} \end{bmatrix} \tag{C.6}$$

constituindo um espaço de estados por C.7 e C.8.

$$\dot{X}_s = A_s X_s + B_s U_s \tag{C.7}$$

$$\dot{\theta} = Y = C_s X_s + D_s U_s \tag{C.8}$$

Figura 47 – Polos e zeros do sistema de meia suspensão



Fonte: autoria própria

Na figura 47 estão representados os polos e zeros para os modelos de meia suspensão

# APÊNDICE D – Códigos

O código principal utilizado foi:

```

1 %%%%%%%%%% T MODELAGEM – PLATAFORMA ESTABILIZADORA %%%%%%%%%%
2 %-----
3 % Andrei Steschenko
4 % João Pedro Dias Nunes
5 % Gabriel Jenner de Faria Orsi
6 % Rogério Yukio Tamaoki Rodriguez
7 %-----
8
9
10 %Comandos iniciais
11 clc (); clear (); close ();
12
13
14 %Definição dos vetores de tempo
15 t0 = 0; %s tempo inicial
16 t_f = 30; %s tempo final
17 dt = 0.001; %s incremento de tempo
18 t = 0:dt:t_f; %vetor de tempos
19 ut = 0:dt:t_f; %vetor de tempos de entrada
20
21
22 %-----
23 %-----SIMULA O DO MEIO CARRO-----
24 %-----
25 %
26 % %MEIO CARRO LONGITUDINAL
27 % Ms=600;
28 % J=730;
29 % mwf=45;
30 % mwr=45;
31 % ksf=18000;
32 % ksr=18000;
33 % csf=500;
34 % csr=500;
35 % kwf=102017;
36 % kwr=102017;
37 % cwf=138;
38 % cwr=138;
39 % a=1.5;
40 % b=1.15;
41

```

```

42 %% MEIO CARRO TRANSVERSAL
43 Ms=577.8;
44 J=108.3;
45 mwf=45;
46 mwr=45;
47 ksf=18000;
48 ksr=18000;
49 csf=500;
50 csr=500;
51 kwf=102017;
52 kwr=102017;
53 cwf=138;
54 cwr=138;
55 a=1.5;
56 b=1.15;
57
58 %Condições iniciais da suspensão
59 X0c=[0,0,0,0,0,0,0,0];
60
61 %Espaço de estados da suspensão
62 Ac=[0          1          0          0
63      0          0          0          0
64      (-ksf-ksr)/Ms  (-csf-csr)/Ms  (ksf*a-ksr*b)/Ms  (csf*a-csr*b)/Ms
65      ksf/Ms      csf/Ms      ksr/Ms      csr/Ms
66      0          0          0          1
67      0          0          0          0
68      (ksf*a-ksr*b)/J  (csf*a-csr*b)/J  (-ksf*a^2-ksr*b^2)/J  (-csf*a^2-csr*b^2)/
69      J -ksf*a/J      -csf*a/J      ksr*b/J      csr*b/J
70      0          0          0          0
71      0          1          0          0
72      (ksf/mwf)      (csf/mwf)      (-ksf*a/mwf)      (-csf*a/mwf)
73      (-kwf-ksf)/mwf  (-cwf-csf)/mwf  0          0
74      0          0          0          0
75      0          0          0          1
76      (ksr/mwr)      (csr/mwr)      (ksr*b/mwr)      (csr*b/mwr)
77      0          0          (-kwr-ksr)/mwr  (-cwr-csr)/mwr];
78
79 Bc=[0          0 0 0
80     0          0 0 0
81     0          0 0 0
82     0          0 0 0
83     0          0 0 0
84     kwf/mwf  csf/mwf  0 0
85     0          0 0 0
86     0          0 kwr/mwr  csr/mwr];
87
88 Cc=[0 0 0 1 0 0 0 0];

```

```
81 Dc=zeros(1,4);
82
83 %Criação do vetor de entradas da suspensão
84 usus=zeros(4,length(t));
85 ws=2*pi*10/1.5;
86 td=(a+b)/10;
87
88 %% lombada na origem
89 % for i=1:150
90 %     usus(1,i)=(0.08/2)*(1-cos(ws*i*dt));
91 %     usus(3,i+265)=(0.08/2)*(1-cos(ws*(i*dt)));
92 % end
93
94 %%buraco longitudinal
95 % for i=1:(0.08*1000)
96 %     usus(1,i)=-0.08;
97 %     usus(3,i+265)=-0.08;
98 % end
99
100 %%buraco transversal
101 % for i=1:(0.08*1000)
102 %     usus(1,i)=-0.08;
103 % end
104
105 %%tachao
106 % for i=1:(0.015*1000)
107 %     usus(1,i)=0.047;
108 % end
109
110 %Derivadas do vetor de entradas da suspensão
111 aux1=diff(usus(1,:)/dt);
112 usus(2,:)=[aux1(1) aux1];
113
114 aux2=diff(usus(3,:)/dt);
115 usus(4,:)=[aux2(1) aux2];
116
117 %Simulação da suspensão
118 sysc=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
119 thetapsus = lsim(sysc,usus,t,X0c);
120 thetapp = diff(thetapsus)/dt;
121 thetappsus = [thetapp;thetapp(length(thetapp))];
122
123
124
125 %-----
126 %-----SIMULAÇÃO DA PLATAFORMA-----
127 %-----
```

```

128
129 % Definição de par metros iniciais
130 Jo = 0.0978/2; %kgm^2 Momento de inércia do Cardan Externo
131 Ji = 0.0636/2; %kgm^2 Momento de inércia do Cardan Interno
132 Jp = 9.3615/2; %kgm^2 Momento de inércia da Plataforma
133 Co = 1.6; %Nms/rad Coeficiente de amortecimento do cardan externo
134 Cp = 1.6; %Nms/rad Coeficiente de amortecimento do cardan interno
135 Ci = 1.6; %Nms/rad Coeficiente de amortecimento da plataforma
136
137 %Definição das entradas
138 %Velocidades angulares do carro u=[p,pp,q,qp,r,rp]
139 u=zeros(6,length(t));
140
141 %% Entrada senoidal
142 omega = 100;
143 u(1,:)=-1*cos(omega*ut)/omega;
144 u(2,:)=1*sin(omega*ut);
145
146 %Entrada acoplada à suspensão
147 % u(3,:)=thetapsus';
148 % u(4,:)=thetappsus';
149
150 %% Entrada impulso
151 % u(1,:)=1;
152 % u(2,1)=1000;
153
154 u=transpose(u);
155
156 %Vetor de estados: [theta, thetap, phi, phip, psi, psip]
157 %Vetor de condições iniciais
158 y0 = [pi/2 0 pi/2 0 pi/2 0];
159
160 %Matrizes do espaço de estados
161 A = [0 1 0 0 0 0;
162      0 -Cp/Jp 0 Co/Jo 0 0;
163      0 0 0 1 0 0;
164      0 0 0 -Co/Jo 0 0;
165      0 0 0 0 0 1;
166      0 0 0 0 0 -Ci/(2*Ji)];
167
168 B = [0 0 0 0 0 0;
169      0 0 0 0 0 0;
170      0 0 0 0 0 0;
171      0 -1 0 0 0 0;
172      0 0 0 0 0 0;
173      0 0 0 -1 0 0];
174

```

```
175 C = [1 0 0 0 0 0;
176       0 0 1 0 0 0;
177       0 0 0 0 1 0];
178
179 D = zeros(size(C));
180
181 %Criação do sistema da plataforma
182 sys = ss(A,B,C,D);
183
184 %Simulação do sistema linear
185 Ylin = lsim(sys,u,t,[0 0 0 0 0 0]);
186
187 %Solução do sistema não linear
188 [t,Ynl] = ode45(@(t,y) plataforma(t,y,ut,u),t,[pi/2 0 pi/2 0 pi/2 0]);
189 XNL = [Ynl(:,1) Ynl(:,3) Ynl(:,5)];
190
191
192 %Criação dos vetores de saídas
193 dtheta = Ylin(:,1);
194 dphi = Ylin(:,2);
195 dpsl = Ylin(:,3);
196
197 theta = dtheta + y0(1);
198 phi = dphi + y0(3);
199 psi = dpsl + y0(5);
200
201
202 %Matriz de transferência
203 FT = tf(sys);
204
205 %Simulação do sistema linear no domínio da frequência
206 entrada_freq=2;
207 thetas = lsim(FT(1,entrada_freq),u(:,entrada_freq),t,y0)+y0(1);
208 phis = lsim(FT(2,entrada_freq),u(:,entrada_freq),t,y0)+y0(3);
209 psis = lsim(FT(3,entrada_freq),u(:,entrada_freq),t,y0)+y0(5);
210
211
212 %Polos e zeros
213 ps = pole(sys);
214 zs = zero(sys);
215
216
217 %Integração por matriz de transição e termos forçantes
218 toll=100; %precisão da expansão
219
220 %Matriz de transição
221 TM = zeros(size(A));
```

```

222
223 for i=1:toll
224     aux = (A^(i-1))*(dt^(i-1))/factorial(i-1);
225     TM = TM+aux;
226 end
227
228 %Matriz de termos forçantes
229 FTM = zeros(size(A));
230 for i=1:toll
231     aux = (A^(i-1))*(dt^(i-1))/factorial(i);
232     FTM = FTM+aux;
233 end
234 FTM=dt*FTM;
235
236 %Solução propriamente dita
237 xMA(:,1)=y0;% condição inicial
238 for j=1:length(t)-1
239     xMA(:,j+1) = TM*xMA(:,j)+FTM*B*transpose(u(j,:));
240 end
241
242 XMT = transpose(C*xMA); %saídas por matriz de transição
243
244 %XMT(:,1) = XMT(:,1) + y0(1);
245 %XMT(:,2) = XMT(:,2) + y0(3);
246 %XMT(:,3) = XMT(:,3) + y0(5);
247
248 %Gráficos
249
250
251 set(0,'defaulttextInterpreter','latex')
252 %% %Gráfico dos ngulos por matriz de transição
253 % figure(1);
254 % hold on
255 % plot(t,XMT(:,1),'LineWidth',2);
256 % plot(t,XMT(:,2),'LineWidth',2);
257 % plot(t,XMT(:,3),'LineWidth',2);
258 % hold off
259 % hl = legend('\theta','\phi','\psi');
260 % set(hl,'interpreter','tex');
261 % grid on;
262 % grid minor;
263 % title('Resposta do sistema linear utilizando solu\c{c}\~ao por Matriz de
      Transi\c{c}\~ao','Interpreter','latex');
264 % xlabel('Tempo (s)','Interpreter','Latex');
265 % ylabel('\^Angulo (rad)','Interpreter','Latex');
266 % ax = gca;
267 % ax.XRuler.Exponent = 0;

```

```
268 % ax.YRuler.Exponent = 0;
269 % trocar();
270 %
271 %%Gráfico dos ângulos pelo comando lsim
272 % figure(2);
273 % hold on;
274 % plot(t,theta,'LineWidth',2);
275 % plot(t,phi,'LineWidth',2);
276 % plot(t,psi,'LineWidth',2);
277 % hold off;
278 % hl = legend('\theta','\phi','\psi');
279 % set(hl,'interpreter','tex');
280 % title('Resposta do sistema linear');
281 % xlabel('Tempo (s)','Interpreter','Latex');
282 % ylabel('\^Angulo (rad)','Interpreter','Latex');
283 % grid on;
284 % grid minor;
285 % ax = gca;
286 % ax.XRuler.Exponent = 0;
287 % ax.YRuler.Exponent = 0;
288 % trocar();
289
290 %% Gráfico de polos e zeros
291 %% figure(3);
292 %% p = pzplot(sysc);
293 %% p.AxesGrid.XUnits = '$s^{-1}$';
294 %% p.AxesGrid.YUnits = '$s^{-1}$';
295 %% title('Polos do modelo da suspens~ao de meio carro longitudinal',
    Interpreter','latex');
296 %% xlabel('Eixo real','Interpreter','latex');
297 %% ylabel('Eixo imagin~ario','Interpreter','latex');
298 %% a = findobj(gca,'type','line');
299 %% for i = 1:length(a);
300 %%     set(a(i),'markersize',10); %change marker size
301 %%     set(a(i),'linewidth',2);%change linewidth
302 %% end
303 %% ax = gca;
304 %% ax.XRuler.Exponent = 0;
305 %% ax.YRuler.Exponent = 0;
306 %% trocar();
307
308 %%Gráfico da entrada
309 % figure(4);
310 % hold on;
311 % plot(t,u(:,1),'LineWidth',2);
312 % plot(t,u(:,2),'LineWidth',2);
313 %% plot(t,u(:,3),'LineWidth',2);
```

```

314 %% plot(t,u(:,4),'LineWidth',2);
315 %% plot(t,u(:,5),'LineWidth',2);
316 %% plot(t,u(:,6),'LineWidth',2);
317 % hold off;
318 %%hl = legend('$p$ (rad/s)', '$\dot{p}$ (rad/s^2)', '$q$ (rad/s)', '$\dot{q}$ (rad/s^2)');%,'$r$ (rad/s)', '$\dot{r}$ (rad/s^2)');
319 % hl = legend('$p$ (rad/s)', '$\dot{p}$ (rad/s^2)');
320 % set(hl, 'interpreter', 'latex');
321 % title('Entradas do sistema');
322 % xlabel('Tempo (s)', 'interpreter', 'latex');
323 % ylabel('Entrada', 'interpreter', 'latex');
324 % grid on;
325 % grid minor;
326 % ax = gca;
327 % ax.XRuler.Exponent = 0;
328 % ax.YRuler.Exponent = 0;
329 % trocar();
330
331
332 %%Gráfico dos ngulos pelo comando ode45
333 % figure(5);
334 % hold on;
335 % plot(t,XNL(:,1),'LineWidth',2);
336 % plot(t,XNL(:,2),'LineWidth',2);
337 % plot(t,XNL(:,3),'LineWidth',2);
338 % hold off;
339 % hl = legend('\theta', '\phi', '\psi');
340 % set(hl, 'interpreter', 'tex');
341 % title('Resposta do sistema n~ao linear');
342 % xlabel('Tempo (s)', 'Interpreter', 'Latex');
343 % ylabel('\^Angulo (rad)', 'Interpreter', 'Latex');
344 % trocar();
345 % grid on;
346 % grid minor;
347 % ax = gca;
348 % ax.XRuler.Exponent = 0;
349 % ax.YRuler.Exponent = 0;
350 % trocar();
351 %
352 %%Gráficos de Bode
353 % figure(6);
354 % opts = bodeoptions('cstprefs');
355 % opts.XLabel.String = 'Frequencia';
356 % opts.XLabel.Interpreter = 'latex';
357 % opts.XLim={1 10000};
358 % opts.Ylim={[-200 0],[-90 90]};
359 % bodeplot(sys(1,2),opts);

```

```

360 % title(['Diagrama de Bode para ' '$\theta$' ' e ' '$\dot{p}$'], '
        Interpreter','latex');
361 % axes=findobj('type','axes');
362 % h_magnitude=get(axes(2),'YLabel');
363 % h_phase=get(axes(1),'YLabel');
364 % set(h_magnitude,'String','Magnitude (dB)','Interpreter','latex');
365 % set(h_phase,'String','Fase ($$\{\circ}\$$)','Interpreter','latex');
366 % grid on;
367 % trocar();
368 %%
369 % figure(7);
370 % opts = bodeoptions('cstprefs');
371 % opts.XLabel.String = 'Frequência';
372 % opts.XLabel.Interpreter = 'latex';
373 % opts.XLim=[1 10000];
374 % opts.Ylim=[-200 0],[-90 90];
375 % bodeplot(sys(2,2),opts);
376 % title(['Diagrama de Bode para ' '$\phi$' ' e ' '$\dot{p}$'], 'Interpreter
        ','latex');
377 % axes=findobj('type','axes');
378 % h_magnitude=get(axes(2),'YLabel');
379 % h_phase=get(axes(1),'YLabel');
380 % set(h_magnitude,'String','Magnitude (dB)','Interpreter','latex');
381 % set(h_phase,'String','Fase ($$\{\circ}\$$)','Interpreter','latex');
382 % grid on;
383 % trocar();
384 %%
385 % figure(8);
386 % opts = bodeoptions('cstprefs');
387 % opts.XLabel.String = 'Frequência';
388 % opts.XLabel.Interpreter = 'latex';
389 % opts.XLim=[1 10000];
390 % opts.Ylim=[-200 0],[-90 90];
391 % bodeplot(sys(3,4),opts);
392 % title(['Diagrama de Bode para ' '$\psi$' ' e ' '$\dot{q}$'], 'Interpreter
        ','latex');
393 % axes=findobj('type','axes');
394 % h_magnitude=get(axes(2),'YLabel');
395 % h_phase=get(axes(1),'YLabel');
396 % set(h_magnitude,'String','Magnitude (dB)','Interpreter','latex');
397 % set(h_phase,'String','Fase ($$\{\circ}\$$)','Interpreter','latex');
398 % grid on;
399 % trocar();
400
401
402 %% Gráfico da entrada
403 %% figure(9);

```

```

404 %% hold on;
405 %% plot(t,u(:,1),'LineWidth',2);
406 %% plot(t,u(:,2),'LineWidth',2);
407 %% aa = plot(t(1:500),usus(1,1:500),'LineWidth',2);
408 %% bb = plot(t(1:500),usus(3,1:500),'LineWidth',2);
409 %% plot(t,u(:,5),'LineWidth',2);
410 %% plot(t,u(:,6),'LineWidth',2);
411 %% hold off;
412 %% hl = legend('$p$ (rad/s)$', '$\dot{p}$ (rad/s^2)$', '$q$ (rad/s)$', '$\dot{q}$
      (rad/s^2)$');%,$r$ (rad/s)$', '$\dot{r}$ (rad/s^2)$');
413 %% hl = legend('Via da roda 1','Via da roda 2');
414 %% set(hl, 'interpreter', 'latex');
415 %% title('Entradas do sistema');
416 %% xlabel('Tempo (s)','interpreter','latex');
417 %% ylabel('Entrada (m)','interpreter','latex');
418 %% grid on;
419 %% grid minor;
420 %% ax = gca;
421 %% ax.XRuler.Exponent = 0;
422 %% ax.YRuler.Exponent = 0;
423 %% trocar();
424
425
426 %%Gráfico dos ngulos pelo comando lsim no domínio da frequencia
427 %% figure(10);
428 %% hold on;
429 %% plot(t,thetas(:,1),'LineWidth',2);
430 %% plot(t,phis(:,1),'LineWidth',2);
431 %% plot(t,psis(:,1),'LineWidth',2);
432 %% hold off;
433 %% hl = legend('\theta','\phi','\psi');
434 %% set(hl, 'interpreter', 'tex');
435 %% title('Resposta do sistema linear no dominio da frequencia','interpreter
      ','latex');
436 %% xlabel('Tempo (s)','Interpreter','Latex');
437 %% ylabel('\^Angulo (rad)','Interpreter','Latex');
438 %% trocar();
439 %% grid on;
440 %% grid minor;
441 %% ax = gca;
442 %% ax.XRuler.Exponent = 0;
443 %% ax.YRuler.Exponent = 0;
444 %% trocar();

```

além disso, um código do modelo não linear e para auxílio também foram utilizados:

```

1 function dy=plataforma(t,y,ut,u)
2 % Definição de par metros iniciais

```

```

3 Jo = 0.0978/2; %kgm^2 Momento de inércia do Cardan Externo
4 Ji = 0.0636/2; %kgm^2 Momento de inércia do Cardan Interno
5 Jp = 9.3615/2; %kgm^2 Momento de inércia da Plataforma
6 Co = 1.6; %Nms/rad Coeficiente de amortecimento do cardan externo
7 Cp = 1.6; %Nms/rad Coeficiente de amortecimento do cardan interno
8 Ci = 1.6; %Nms/rad Coeficiente de amortecimento da plataforma
9
10 u1 = interp1(ut,u,t);
11 u1=u1';
12 dy1 = y(2);
13 dy2 = -Cp*y(2)/Jp+(Co*y(4)/Jo)*sin(y(5))-cos(y(5))*((u1(4)-u1(5)*y(4))*cos(
    y(3))-(u1(6)+u1(3)*y(4))*sin(y(3)))-y(6)*((u1(1)+y(4))*cos(y(5))-(u1(3)*
    cos(y(3))-u1(5)*sin(y(3)))*sin(y(5)));
14 dy3 = y(4);
15 dy4 = -Co*y(4)/Jo-u1(2);
16 dy5 = y(6);
17 dy6 = -Ci*y(6)/(2*Ji)-(u1(4)-u1(5)*y(4))*sin(y(3))-(u1(6)+u1(3)*y(4))*cos(y
    (3));
18
19 dy=[dy1;dy2;dy3;dy4;dy5;dy6];
20 end

1 function trocar()
2 x1=get(gca,'XTickLabel');
3 new_x1=strrep(x1(:),' ',' ');
4 set(gca,'XTickLabel',new_x1);
5
6 y1=get(gca,'YTickLabel');
7 new_y1=strrep(y1(:),' ',' ');
8 set(gca,'YTickLabel',new_y1);
9 end

```