

GUILHERME PAINA CAMARGO
LEONARDO FARIA DE OLIVEIRA
LUCAS SOUZA VIEIRA
LUÍS FELIPE BIANCARDI PALHARINI

Modelagem e simulação da dinâmica de voo de um
Parafoil

São Paulo

2020

GUILHERME PAINA CAMARGO
LEONARDO FARIA DE OLIVEIRA
LUCAS SOUZA VIEIRA
LUÍS FELIPE BIANCARDI PALHARÍNI

**Modelagem e simulação da dinâmica de voo de um
*Parafoil***

Trabalho acadêmico apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo como requisito parcial para
aprovação na disciplina PME3380 -
Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Orientadores:

Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

Prof. Dr. Décio Crisol Donha

São Paulo

2020

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de sistema de parafoil carregando uma carga	7
Figura 2 – Representação gráfica do modelo físico do sistema	11
Figura 3 – Perfil aerodinâmico do <i>parafoil</i>	11
Figura 4 – Orientação dos eixos no referencial solidário ao sistema	12
Figura 5 – Representação simplificada da geometria do sistema	13
Figura 6 – Extensão da análise geométrica do sistema	14
Figura 7 – Esboço do modelo de configuração geométrica do paraquedas	16
Figura 8 – Representação da intersecção do <i>parafoil</i> com seu plano médio paralelo a yz	16
Figura 9 – Diagrama de blocos no domínio da frequência	25
Figura 10 – Trajetória do centro de massa do sistema para a entrada degrau	27
Figura 11 – Respostas do sistema para entrada degrau unitária	28
Figura 12 – Trajetória do centro de massa do sistema para a entrada senoidal de amplitude unitária e frequência 0,1 Hz	29
Figura 13 – Respostas do sistema para entrada senoidal de amplitude e frequência unitárias	30
Figura 14 – Respostas do sistema para entrada senoidal de amplitude unitária e frequência 1000 Hz	31
Figura 15 – Respostas do sistema para entrada impulso	32
Figura 16 – Diagrama de bode para a saída ϕ	33
Figura 17 – Diagrama de bode para a saída ψ	34
Figura 18 – Diagrama de bode para a saída p	35
Figura 19 – Diagrama de bode para a saída r	36

Lista de tabelas

Tabela 1 – Constantes do ambiente	22
Tabela 2 – Parâmetros geométricos	23
Tabela 3 – Matriz de inércia	23
Tabela 4 – Coeficientes aerodinâmicos	23
Tabela 5 – Valores de equilíbrio	24
Tabela 6 – Polos do sistema	26

Sumário

1	Introdução	7
2	Objetivos	8
3	Revisão bibliográfica	8
4	Metodologia	9
5	Modelagem	10
5.1	Modelo físico	10
5.2	Geometria do sistema	13
5.3	Propriedades de inércia do <i>parafoil</i>	15
5.4	Modelo matemático não linear	18
5.5	Modelo matemático linearizado	21
6	Análises	22
6.1	Escolha dos parâmetros	22
6.2	Análise de estabilidade	24
6.3	Matriz de transição	26
6.4	Respostas do sistema	27
6.4.1	Entrada de tipo degrau	27
6.4.2	Entrada de tipo senoidal	29
6.4.3	Entrada de tipo impulso	32
6.5	Diagramas de Bode	33
7	Conclusão	37
	Referências bibliográficas	38
	 APÊNDICES	 40
	APÊNDICE A – CODIGOS	41

Resumo

No presente trabalho, elabora-se um modelo para representar a dinâmica de voo de um paraquedas do tipo *parafoil*. Partindo da demanda por sistemas controláveis de recuperação de foguetes por parte do Projeto Jupiter, grupo de foguetemodélismo da Escola Politécnica da USP, obteve-se a motivação para desenvolver o trabalho. Após extensa revisão bibliográfica, um modelo físico e matemático não linear é construído, alinhado com publicações de muitos pesquisadores acerca deste tema. Dotado de seis graus de liberdade e modelado como corpo rígido, o sistema é composto por paraquedas e carga sem movimento relativo entre si, sendo esta um dos foguetes lançados previamente pela equipe Projeto Jupiter. O modelo é então linearizado em torno de um ponto de equilíbrio para um estado reduzido nos ângulos de rolagem e guinada, bem como suas taxas de variação expressas no referencial solidário ao corpo. Os resultados entre as soluções linear e não linear são comparados para diferentes condições de entrada. As soluções em espaço de estados e no domínio da frequência são utilizados para simular o sistema para dadas condições iniciais. A estabilidade do sistema linear é, investigada analisando seus autovalores. Estuda-se a resposta em frequência do modelo, e os diagramas de Bode do sistema são analisados. Consolidada a modelagem e os resultados obtidos para o modelo desenvolvido, lançam-se os alicerces para uma continuidade do trabalho sob uma perspectiva de controle.

Palavras-chave: Parafoil. Paraquedas. Recuperação. Modelagem.

1 Introdução

Dentro do contexto da indústria aeroespacial e a sua crescente evidência e importância para a sociedade, surgem demandas para que novas soluções sejam apresentadas e desenvolvidas. Essas inovações servem de alicerce para aplicações na engenharia e na computação, para desenvolvimento de novos produtos e de novas tecnologias.

Seguindo a tendência de aumento na quantidade de missões aeroespaciais, torna-se cada vez mais necessário que métodos eficazes de recuperação de estágios de propulsores e de sondas, contendo cargas ou astronautas no retorno das missões, sejam desenvolvidos e aprimorados. Deve-se ter em mente a minimização dos custos de toda a missão, a maximização da segurança e também que a operação se torne o sustentável do ponto de vista ambiental, evitando que detritos sejam deixados na órbita terrestre ou que partes de foguetes sejam perdidas nos oceanos.

Com foco numa abordagem mais inovadora e segura, em 1999 a Agência Espacial dos Estados Unidos (NASA - National Aeronautics and Space Administration) iniciou uma série de experimentos e de frentes de pesquisa para oferecer uma alternativa de emergência para que astronautas que estavam na Estação Espacial Internacional (ISS - International Space Station) pudessem retornar para a superfície quando houvesse necessidade. Com o codinome X-38, este projeto tinha como missão usar um sistema de recuperação capaz de levar uma grande quantidade de carga, além de ser seguro para atender a requisitos de segurança para transporte de pessoas, dotado de um sistema de controle que pudesse direcioná-lo para uma localização especificada (STEIN; MADSEN, 2005). Esta tecnologia ganhou o nome de *parafoil*.

Figura 1 – Representação de sistema de parafoil carregando uma carga



Fonte: Flight Opportunities - NASA.

Este sistema é dotado de um sistema de paraquedas similar a um parapente, com sistema de controle projetado para guiá-lo por uma trajetória pré-definida e entre suas principais vantagens destaca-se sua grande eficiência mássica, seu baixo impacto na inflagem do tecido, grande tolerância a falhas e estabilidade, que se assemelha a de um planador, devido a sua baixa razão de descida.

Devido a todas estas características, o *parafoil* surge como um tema de bastante interesse para a equipe de foguetemodélismo da Escola Politécnica, o Projeto Jupiter, da qual todos os integrantes do grupo fazem parte. Esta convergência de interesses possibilita que o tema seja abordado com um foco numa aplicação prática em um curto prazo, promovendo um maior engajamento do grupo, primeiramente com a modelagem e futuramente com o controle desta tecnologia.

2 Objetivos

O principal objetivo do presente trabalho é modelar e simular a dinâmica de voo de um paraquedas tipo *parafoil*. Pretende-se, com isso, a construção de uma base sólida para que o desenvolvimento do tema possa ser continuado na disciplina de Controle e Aplicações (PME3481). Almeja-se a implementação deste modelo para projeto, desenvolvimento e manufatura da tecnologia a ser utilizada no sistema de recuperação de foguetes do Projeto Jupiter. Objetiva-se também a documentação de todo o trabalho, para que ele possa ser estudado e aprimorado por futuros integrantes da equipe.

Tendo como fundamento os conceitos aprendidos em sala de aula, pretende-se desenvolver uma modelagem matemática coerente com objeto físico, de forma que o modelo não linear obtido seja fiel ao comportamento observado na realidade. Esta se torna uma prioridade ainda maior para parâmetros e condições iniciais semelhantes às verificadas na recuperação de foguetes do Projeto Jupiter. Da mesma forma, é de interesse que o modelo linearizado não provoque mudanças drásticas no comportamento do sistema ao redor dos pontos de linearização e apresente comportamento similar ao modelo não linear.

Finalmente, também é desejado que sejam feitas análises das simulações e dos resultados obtidos em geral. Estas devem ser pertinentes e coerentes com todo o trabalho desenvolvido, de modo que facilitem a revisão de todo o conteúdo futuramente, quando este estiver sendo revisitado pelos autores ou por demais membros da equipe.

3 Revisão bibliográfica

Com o intuito de desenvolver uma boa modelagem do sistema, revisou-se uma extensa bibliografia acerca do tema. Em linhas gerais, os autores estudados modelam *parafoil* e carga como corpos rígidos, de modo a utilizarem-se das equações cinemáticas

e dinâmicas de corpo rígido para descrever a dinâmica do sistema. Os carregamentos externos sofridos pelos corpos têm origem aerodinâmica e em efeitos de massa adicional (*apparent mass* nos textos em inglês).

Os carregamentos de força e momentos aerodinâmicos explorados na literatura advêm diretamente das teorias de asa e controle de aeronaves, como apresentadas por Stevens e Lewis (2016). Quanto a forças e momentos aerodinâmicos, todos os autores estudados se baseiam nos resultados desenvolvidos por Lissaman e Brown (1993).

Uma diferença marcante entre os autores é a escolha dos graus de liberdade do modelo. Autores como Mortaloni et al. (2006) e González et al. (2011) modelam paraquedas e carga como um corpo rígido, dotado de seis graus de liberdade no espaço, com posição definida por três posições inerciais e orientação dada por ângulos de Euler. Outros buscam refinar o modelo, considerando os orientação relativa entre os dois corpos do sistema a partir do ponto de confluência das linhas do paraquedas (*suspension lines*).

Modelos desenvolvidos por autores como Prakash e Ananthkrishnan (2003), apresentando nove graus de liberdade: três componentes de velocidade linear do ponto de confluência mais três orientações relativas para cada um dos dois corpos em relação a este ponto. Slegers e Costello (2003) modelam o ponto de confluência como uma junta esférica viscoelástica, introduzindo equações vinculares e limitando a dinâmica do sistema a nove graus de liberdade. Tweddle (2006) e Feikai, Wheiliang e Zhao (2019) discutem brevemente as vantagens da escolha de cada tipo de modelo.

Há ainda autores como Wise (2006) e Redelinghuys (2007), que em uma abordagem menos comum, escolhem restringir o movimento de rolagem relativa entre os corpos, resultando em oito graus de liberdade. O grande destaque destes últimos é desenvolver o modelo matemático através das equações de Lagrange e de Hamilton, respectivamente. Isso é destoante em relação à maioria dos autores estudados, que utilizam as equações de Newton-Euler.

4 Metodologia

A metodologia adotada para o trabalho segue, em linhas gerais, a sequência apontada em sala de aula para desenvolvimento e estudo dos modelos matemáticos e físicos do sistema dinâmico. Como primeira etapa, busca-se o estado da arte do problema tratado, organizando um rigoroso trabalho de pesquisa e revisão bibliográfica. Desta maneira, é possível desenvolver um modelo físico e um matemático não linear em consonância com os concebidos por outros pesquisadores deste tema.

Bem descrito o modelo, com todas as suas hipóteses simplificadoras e equações diferenciais governantes, parte-se para a etapa de linearização. Adotou-se o método de

expansão de Taylor até os termos de primeira ordem. Isso permite escrever as equações governantes na forma de sistema linear. Tanto este quanto o modelo não linear são escritos na forma de espaço de estados e são simulados para condições variadas de simulação, sendo feitas comparações entre ambos.

Em posse do modelo linearizado, aplicam-se os conceitos e técnicas para verificar a estabilidade do sistema. Com o auxílio do *software Scilab*, são obtidos numericamente os autovalores e as funções de transferência do sistema. Também é calculada numericamente a matriz de transição e de termos forçantes do sistema para um dado passo de simulação.

Finalmente, ao fim de toda a análise, são traçados os diagramas de Bode. A partir deles, estuda-se a resposta em frequência do *parafoil*. Busca-se compreender seus comportamentos assintóticos e a relação com os polos de suas respectivas funções de transferência.

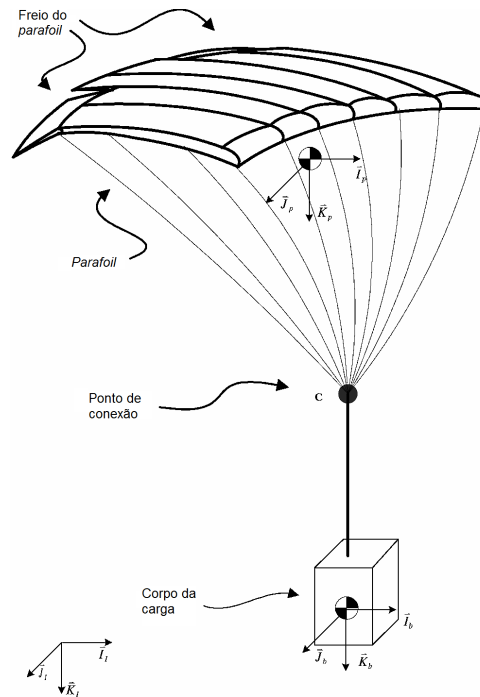
5 Modelagem

Seguindo a metodologia aprendida na disciplina, elabora-se um modelo físico a partir do sistema dinâmico real. Nesta etapa, são aplicadas hipóteses simplificadoras que buscam aproximar o modelo em relação ao sistema real, mas simplificando-o de modo que sejam tratados os fenômenos mais importantes para o presente estudo. Em seguida, desenvolve-se um modelo matemático não linear que descreve a dinâmica do sistema. Este é linearizado para que se apliquem outros conceitos fundamentais da metodologia deste trabalho.

5.1 Modelo físico

O sistema modelado é constituído pelo *parafoil* e pela carga (*payload*, na literatura) a ele associada. O paraquedas é tratado como indeformável e suas cordas como inextensíveis, de modo que valham as equações de corpo rígido. Optou-se por desenvolver um modelo em seis graus de liberdade, no qual a posição relativa entre os dois corpos não varia com o tempo devido aos esforços vinculares no ponto de conexão. Desta forma, pode-se considerar que ambos constituem um corpo rígido apenas. A Figura 2 ilustra o modelo físico do sistema.

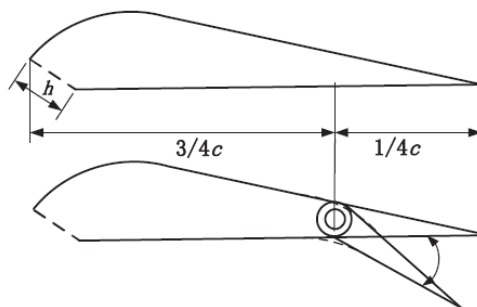
Figura 2 – Representação gráfica do modelo físico do sistema



Fonte: adaptado de Slegers e Costello (2003).

O controle da trajetória é executado pelos freios do paraquedas e servem como entrada do sistema. Eles permitem que o corpo descreva curvas no espaço e atinja uma determinada posição quando controlado, devido à ação combinada de momentos e forças aerodinâmicas. Pode-se observar uma representação dos freios do paraquedas na Figura 3, onde é destacado também o ângulo de controle deste componente.

Figura 3 – Perfil aerodinâmico do *parafoil*



Fonte: Adaptado de Tao et al. (2017)

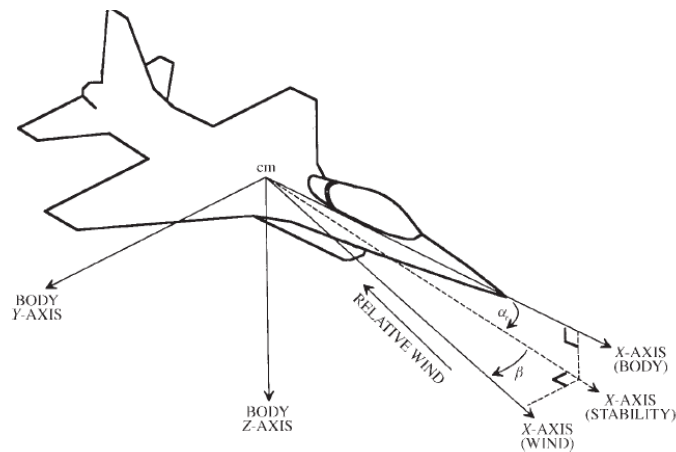
Para a segurança da equipe e das demais pessoas próximas da área de lançamento, o voo dos foguetes do Projeto Jupiter só é autorizado sob condições de baixa velocidade dos ventos. Nesse sentido, visando o problema real modelado, é bastante razoável admitir a hipótese de que a velocidade do vento nula. Desta maneira, a velocidade aerodinâmica

(relativa entre sistema e vento) é a própria velocidade do corpo. Outra simplificação adotada é a de que, frente às pequenas dimensões e razão massa por volume dos paraquedas da equipe, escolheu-se desprezar os termos devidos à massa adicional na dinâmica do sistema. Essas hipóteses simplificadoras também são utilizadas em modelos da literatura, como fazem Slegers e Costello (2005).

No processo de dedução das equações de movimento, é importante seguir uma convenção de referenciais e orientação dos eixos tri-ortonormais. A Terra é tratada como um referencial inercial, tendo a gravidade sentido e direção inerciais fixos. Na literatura e ao longo dos equacionamentos do modelo matemático, utiliza-se uma convenção de orientação do sistema de coordenadas solidário ao corpo, utilizada em teoria de voo de aeronaves.

A Figura 4 apresenta essa convenção, na qual o eixo z aponta para o solo e o eixo x aponta na direção de deslocamento frontal positivo do corpo rígido. Para que se tenha uma base positiva, pela regra da mão direita, vêm a orientação do eixo y . Por conveniência, o sistema de coordenadas inercial apresenta configuração análoga. Posto que admite-se velocidade inercial do vento nula, o ângulo de ataque α e o ângulo de incidência lateral β são definidos inteiramente pelo estado de velocidade do sistema.

Figura 4 – Orientação dos eixos no referencial solidário ao sistema



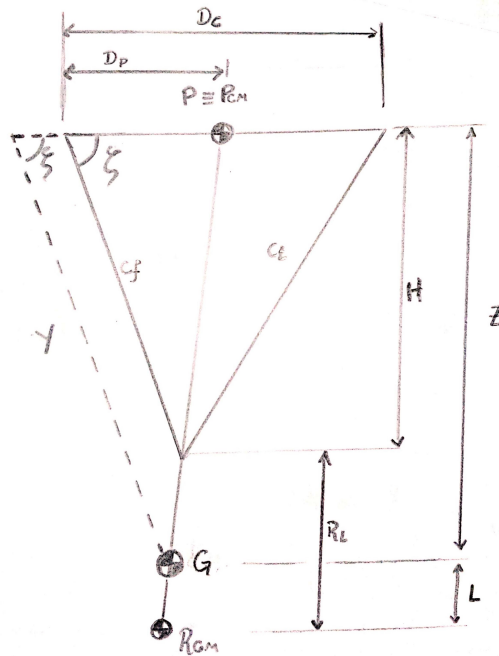
Fonte: Stevens, Lewis e Johnson (2016)

A geometria do perfil do *parafoil* é simplificada e modelada na Seção 5.2. Esta apresenta parâmetros geométricos importantes para dimensionamento e projeto do sistema, como corda e envergadura. Estes são fundamentais para determinação de forças e momentos aerodinâmicos aos quais o sistema está submetido e que, para o presente modelo, são os carregamentos mais importantes. Baseado no trabalho de Slegers e Costello (2005), os pontos notáveis de centro de massa e centro aerodinâmico do sistema são modelados como coincidentes, de modo que os únicos momentos externos em relação ao centro de massa sejam os próprios momentos aerodinâmicos.

5.2 Geometria do sistema

Para simplificar a análise geométrica, opta-se por representar a vista lateral do *parafoil* por um triângulo. Para definir o triângulo representante do paraquedas, necessita-se das três seguintes medidas: comprimento da corda frontal (c_f), comprimento da corda traseira (c_t) e a distância entre os pontos de contato das cordas (D_C). Adota-se ainda que o centro de pressão P coincide com o centro de massa P_{CM} do *parafoil*. Supõe-se ainda que tal ponto é conhecido por meio da distância D_P entre o mesmo e o ponto de contato da corda frontal. A representação desta geometria simplificada se encontra na Figura 5. Os valores ainda não mencionados serão calculados conforme indicado:

Figura 5 – Representação simplificada da geometria do sistema



Fonte: Autores (2020)

De início, calcula-se o valor do ângulo ζ com auxílio da Lei dos cossenos, aproveitando-se dos valores c_f , c_t e D_C .

$$\zeta = \arccos\left(\frac{c_f^2 + D_C^2 - c_t^2}{2c_f D_C}\right) \quad (1)$$

Com o valor de ζ obtido pela equação 1, pode-se aplicar uma nova Lei dos cossenos para, desta vez, definir o valor de H . A partir disto, tem-se a equação 2.

$$H = \sqrt{c_f^2 + D_P^2 - 2c_f D_P \cos(\zeta)} \quad (2)$$

Para calcular a posição relativa Z do centro de massa CM , pode-se aplicar a soma das massas a partir do polo de centro de pressão $P \equiv P_{CM}$, conforme mostra a equação 3. Para formular a equação, deve-se inferir que as massas do *parafoil* e do foguete são denotadas, respectivamente, por m_p e m_f . Adicionalmente, aponta-se que a distância entre o centro de massa R_{CM} do foguete e o ponto de contato com o paraquedas é representado pelo valor R_L . Com o valor de Z , pode-se facilmente calcular o valor L pela equação 4

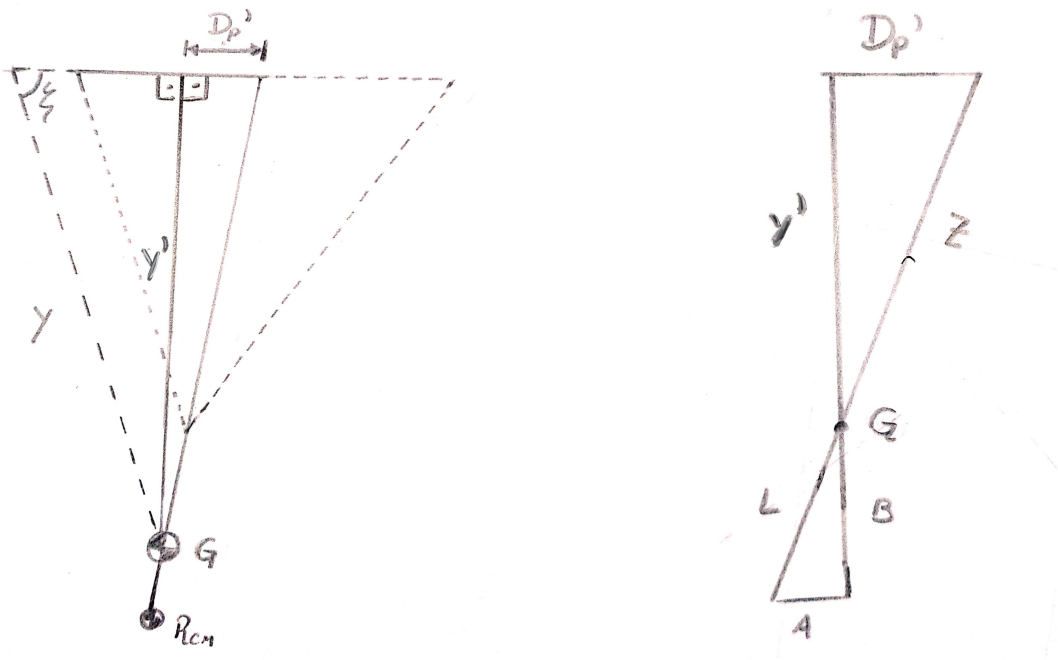
$$Z = \frac{0 \cdot m_p + (H + R_L) \cdot m_f}{m_p + m_f} \quad (3)$$

$$L = H + R_L - Z \quad (4)$$

Em seguida, cria-se uma reta de comprimento Y que se estende desde o centro de massa CM até a projeção da linha do *parafoil*. O valor de Y pode ser calculado utilizando a semelhança de triângulos, conforme demonstrado pela equação 5.

$$\frac{c_f}{Y} = \frac{H}{Z} \implies Y = \frac{c_f Z}{H} \quad (5)$$

Figura 6 – Extensão da análise geométrica do sistema



Fonte: Autores (2020)

Volta-se a atenção para a Figura 6A. Adota-se de maneira arbitrária uma reta que conecta o ponto do centro de massa CM à linha do *parafoil* de maneira perpendicular. Já conhecido o ângulo ζ , pode-se calcular o valor Y' de maneira simples, conforme mostra a equação 6.

$$Y' = Y \sin(\zeta) \quad (6)$$

Ao analisar o triângulo cheio da direita, pode-se calcular o valor de D'_P ao utilizar a relação de Pitágoras, conforme explicitado pela equação 7.

$$D'_P = \sqrt{Z^2 - Y'^2} \quad (7)$$

Por fim, volta-se a atenção para a Figura 6B. Novamente, pode-se inferir os valores restantes por semelhança de triângulos, conforme demonstrado pela equação 8.

$$\frac{L}{Z} = \frac{A}{D'_P} = \frac{B}{Y'} \implies \begin{cases} A = \frac{L}{Z} D'_P \\ B = \frac{L}{Z} Y' \end{cases} \quad (8)$$

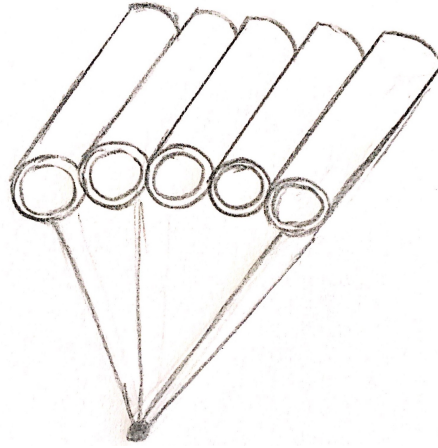
Desta forma, pode-se, em fim, definir o vetor $(CM - R_{CM})$ na base do *parafoil* \mathcal{B} .

$$(CM - R_{CM}) = (A, 0, B) \quad (9)$$

5.3 Propriedades de inércia do *parafoil*

Para reduzir a subjetividade no processo de estimativa das propriedades de inércia do paraquedas, propõe-se uma aproximação por semelhança de forma. Cada célula é modelada como um tubo de parede fina, de comprimento igual à corda c , raio externo r_e , raio interno r_i e diâmetro externo igual à envergadura b dividida pelo número de células N . A Figura 7 ilustra o modelo adotado. Dada a geometria simplificada dos tubos, é possível determinar analiticamente a posição do centro de massa e a matriz de inércia do paraquedas. Posto que essa escolha de geometria faz com que os produtos de inércia sejam nulos (fato que não se comprova na realidade, dada a assimetria do perfil de asa do *parafoil* no plano xz), resta apenas estimar o produto J_{xz} com base em valores de referência da literatura.

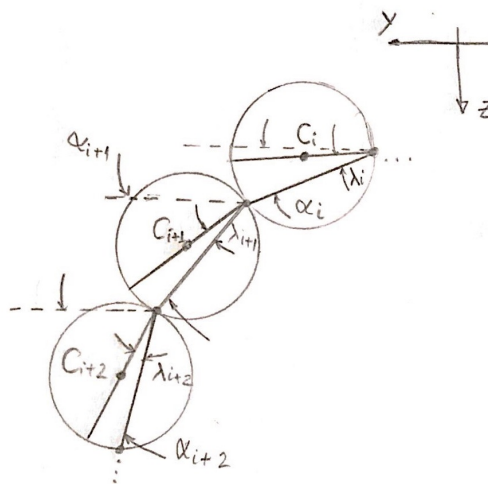
Figura 7 – Esboço do modelo de configuração geométrica do paraquedas



Fonte: Autores (2020)

Admite-se que tais tubos são indeformáveis, em concordância com o modelo de corpo rígido. Assim, cada tubo mantém contato com seu vizinho por apenas uma reta tangente. Em vista frontal, essa reta é representada por um ponto de tangência. A Figura 8 apresenta um exemplo de três tubos vizinhos em contato, com seus respectivos parâmetros geométricos. Simplificando a análise, arbitra-se que os ângulos α_i aumentem em progressão aritmética de razão constante $\lambda_i = \lambda$, sendo $i = 1, \dots, n$ e havendo liberdade para escolher α_1 . Para N células, $n = N/2$ se N for par e $n = (N + 1)/2$, caso contrário.

Figura 8 – Representação da intersecção do *parafoil* com seu plano médio paralelo a yz



Fonte: Autores (2020)

Define-se uma origem conveniente para o sistema de coordenadas para calcular a posição do centro de massa do paraquedas. A partir dessa origem, calculam-se os vetores de posição dos centros de massa. Dada a simetria do modelo, o centro de massa deve estar sobre o eixo z (i.e., $y_{Gp} = 0$). Como é preciso transportar os momentos de inércia para

esse polo, é conveniente escrever as coordenadas $y_{C,i}$ dos centros de massa individuais. Poupando o leitor da dedução, as expressões para essas coordenadas são apresentadas nas equações (10) e (11). O sinal de \pm nesta última se refere ao espelhamento dos tubos em relação ao eixo z . A posição do centro de massa do paraquedas vem imediatamente por (12).

$$z_{C,i} = r \sin [\alpha_1 + (i - 2)\lambda] + 2r_e \cos \lambda \sum_{j=0}^{i-1} \sin (\alpha_1 + j\lambda) \quad (10)$$

$$y_{C,i} = \pm \left\{ r \cos [\alpha_1 + (i - 2)\lambda] + 2r_e \cos \lambda \sum_{j=0}^{i-1} \cos (\alpha_1 + j\lambda) \right\} \quad (11)$$

$$z_{Gp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_{C,i} \quad (12)$$

Usando a convenção de orientação dos eixos solidários ao corpo exposta na Figura 4, calculam-se os momentos de inércia com relação ao centro de massa (coincidente com o centro geométrico) de cada cilindro. Assumindo a hipótese de densidade constante ρ_p do tecido do paraquedas, as equações (13) e (14) apresentam os momentos de inércia de cada célula com relação a seus eixos principais de inércia.

$$\begin{aligned} J_{x_i} &= \rho_p \iiint_{V_i} (y^2 + z^2) dx dy dz \\ J_{y_i} &= \rho_p \iiint_{V_i} (x^2 + z^2) dx dy dz \\ J_{z_i} &= \rho_p \iiint_{V_i} (x^2 + y^2) dx dy dz \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} J_{x_i} &= \pi \rho_p (r_e^4 - r_i^4) \\ J_{y_i} &= \pi \rho_p c \left[\frac{r_e^4 - r_i^4}{4} + \frac{c^2 (r_e^2 - r_i^2)}{12} \right] \\ J_{z_i} &= J_{y_i} \end{aligned} \quad (14)$$

Resta determinar a matriz de inércia do paraquedas como um todo. Para tanto, utiliza-se o teorema dos eixos paralelos, transladando os momentos de inércia para os eixos posicionados no centro de massa conjunto.

$$J_{xp} = \sum_{i=1}^N \left\{ J_{x_i} + m [(z_{Gp} - z_i)^2 + y_i^2] \right\} \quad (15)$$

$$J_{yp} = \sum_{i=1}^N \left[J_{y_i} + m (z_{Gp} - z_i)^2 \right] \quad (16)$$

$$J_{zp} = \sum_{i=1}^N (J_{z_i} + my_i^2) \quad (17)$$

Desta forma, determinam-se as entradas da matriz de inércia do paraquedas. O modelo adotado não contempla a assimetria do paraquedas no plano xz . Assim, os momentos são calculados e o produto J_{xz} é estimado a partir de dados da literatura, diminuindo o grau de subjetividade na escolha destes parâmetros.

$$[J]_{Gxyz} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

Modela-se o centro de massa do foguete como posicionado em seu centro geométrico, à metade de seu comprimento total. Supondo que este também está sobre o eixo z , a determinação da matriz de inércia do sistema completo é facilmente efetuada, usando novamente o transporte de momentos pelo teorema dos eixos paralelos e compondo os momentos do paraquedas com os do foguete. O resultado final é a matriz de inércia indicada em (18).

5.4 Modelo matemático não linear

De início, instanciam-se as bases ortogonais utilizadas em todo o desenvolvimento algébrico. Utiliza-se uma base ortogonal inercial \mathcal{I} solidária ao plano terrestre. A base ortogonal \mathcal{B} é solidária ao corpo (fixa no centro de massa G). O estado do corpo será estudado com referência às velocidades linear e angular. Assim, definem-se os dois vetores $\dot{\mathbf{X}}$ e $\boldsymbol{\Omega}$, velocidades linear e angular descritas na base \mathcal{I} , conforme expõe a equação 19.

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Dos teoremas da Mecânica Geral, surge a necessidade de escrever as equações dinâmicas no referencial solidário ao corpo rígido. Nesse sentido, as velocidades lineares e angulares são escritas na base \mathcal{B} . Assim, tem-se os novos vetores \mathbf{U} e $\boldsymbol{\omega}$ explicitados pela equação (20).

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Pode-se criar uma relação entre os vetores de estado descritos pelas equações (19) e (20) utilizando matrizes de transformação de base a partir dos ângulos de Euler.

Assim, tem-se as equações (21) e (22). As matrizes de transformação $[T_{IB}]$ e $[H_{BI}]$ estão descritas pelas equações (23) e (24). Da Álgebra Linear, vale lembrar que, dada uma de transformação linear de mudança de base $[T_{xy}]$ entre bases ortonormais, a sua matriz inversa $[T_{xy}]^{-1}$ é equivalente à sua transposta $[T_{xy}]^T$, que pode também ser denotada como $[T_{yx}]$. Para deixar a notação mais compacta, utiliza-se $\sin x = s_x$, $\cos x = c_x$ e $\tan x = t_x$ assim como verificado na literatura.

$$\dot{\mathbf{X}} = [T_{BI}] \cdot \mathbf{U} \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = [H_{BI}] \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (22)$$

$$T_{IB} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$[H_{BI}] = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta \end{bmatrix} \quad (24)$$

Para obtenção das equações diferenciais do modelo matemático, utilizam-se o Teorema da Resultante (2ª lei de Newton) e do Momento da Quantidade de Movimento (Momento Angular) aplicado ao centro de massa G , descritas pelas equações (25) e (26). Assumindo que centro de massa e centro aerodinâmico coincidem, os únicos momentos externos contabilizados em (26) são os aerodinâmicos. É importante notar que as equações apresentadas divergem de muitos modelos presentes na literatura, variando de acordo com os carregamentos considerados e hipóteses simplificadoras.

O modelo estudado neste trabalho assume simplificações relacionadas à especificidade do uso de *parafoil* para recuperação de um foguete de nível amador. Assim, desprezam-se efeitos de massa adicional diante da grande diferença entre a ordem de grandeza das massas do paraquedas m_p e do foguete m_f . Adicionalmente, despreza-se a força de arrasto atuante no corpo do foguete. Posto que, por questões de segurança, as janelas de lançamento dos foguetes do Projeto Jupiter são limitadas a instantes de pouco ou nenhum vento, a velocidade do vento no referencial inercial é adotada como nula.

$$\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{m}(\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_P) - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U} \quad (25)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = [J]^{-1}(\mathbf{M}_P - \boldsymbol{\omega} \times [J] \cdot \boldsymbol{\omega}) \quad (26)$$

A força gravitacional \mathbf{F}_G , escrita no referencial do corpo, está explícita na equação (27). Ela depende da orientação em ângulos de Euler do sistema, bem como do valor de massa total m (caracterizado pela soma das massas do *parafoil* m_p e do foguete m_f) e da aceleração da gravidade g (constante para baixas altitudes).

$$\mathbf{F}_G = mg \begin{Bmatrix} -\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\cos(\theta) \end{Bmatrix} \quad (27)$$

As forças aerodinâmicas \mathbf{F}_P atuantes no *parafoil* estão representadas pela equação (28) e tem sua formulação apresentada por Slegers e Costello (2005). O primeiro termo descreve a força de sustentação e o segundo de arrasto. Esta força se relaciona com a densidade do ar ρ , a área de referência S do paraquedas (calculada como $b \cdot c$) e das velocidades linear do corpo \mathbf{U} e aerodinâmica V_A . Supondo ausência de vento, esta última é dada pela equação (29). Além destes parâmetros, nota-se a presença dos coeficientes aerodinâmicos C_L e C_D , modelados na literatura como funções de α e δ_a .

$$\mathbf{F}_P = \frac{1}{2}\rho S V_A \cdot C_L(\alpha, \delta_a) \begin{Bmatrix} w \\ 0 \\ -u \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}\rho S V_A \cdot C_D(\alpha, \delta_a) \mathbf{U} \quad (28)$$

$$V_A = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (29)$$

O ângulo α é o ângulo de ataque, definido como $\arctan(w/u)$. Já δ_a é o ângulo de deflexão dos flapes de freio do *parafoil*, sendo esta a entradas de controle do sistema. Estes dois valores definem os coeficientes aerodinâmicos segundo a equação (30).

$$\begin{cases} C_L(\alpha, \delta_a) = (C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta_a}\delta_a) \\ C_D(\alpha, \delta_a) = (C_{D0} + C_{D\alpha^2}\alpha^2 + C_{D\delta_a}\delta_a) \end{cases} \quad (30)$$

Da literatura, modela-se a influencia de α sobre um coeficiente C_i segundo um formato polinomial aproximado, descrito pela equação (31). Para o coeficiente de sustentação, o termo de segunda ordem é considerado nulo enquanto, para o coeficiente de arrasto, o termo de primeira ordem é nulo. Por outro lado, a influência de δ_a , por conta do perfil linear, é aproximado por um coeficiente único $C_{i\delta_a}$.

$$C_i(\alpha) = C_{i0} + C_{i\alpha}\alpha + C_{i\alpha^2}\alpha^2 \quad (31)$$

Voltando a atenção para a equação (26), observa-se a aparição da matriz de inércia $[J]$, tomada em relação ao centro de massa do sistema, cuja obtenção está descrita na seção

5.3. Além do termo inercial, existe um momento aerodinâmico M_P (descrito pela equação (32)) atuando no paraquedas. O termo restante é proveniente da parcela de arrastamento do referencial móvel $\boldsymbol{\omega} \times [J] \cdot \boldsymbol{\omega}$.

De maneira similar à força aerodinâmica, o momento aerodinâmico \mathbf{M}_P depende da densidade do ar ρ , da área de referência S do paraquedas e da velocidade aerodinâmica V_A . Os termos restantes são referentes à geometria do *parafoil*, coeficientes aerodinâmicos e velocidades linear e angular do corpo. Vale ressaltar que d é parâmetro geométrico referente à extensão do componente de freio do paraquedas. A equação (32) é apresentada, nesta forma, por Slegers e Costello (2005).

$$\mathbf{M}_P = \frac{1}{2} \rho S (V_A)^2 \begin{Bmatrix} C_{l\phi} b \phi + \frac{C_{lp} b^2 p}{2V_A} + \frac{C_{l\delta a} \delta_a b}{d} \\ C_{m0} c + C_{m\alpha} c \alpha + \frac{C_{mq} c^2 q}{2V_A} \\ \frac{C_{nr} b^2 r}{2V_A} + \frac{C_{n\delta a} b \delta_a}{d} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

5.5 Modelo matemático linearizado

Para linearizar o modelo apresentado na seção 5.4, observa-se que é difícil definir um ponto de equilíbrio para as variáveis de posição x , y e z , enquanto as velocidades lineares u , v e w são praticamente constantes durante todo o voo em regime permanente. Adicionalmente, Slegers e Costello (2005) adiantam que o ângulo de guinada θ torna-se desacoplado dos ângulos restantes após linearização. Assim, opta-se por um vetor de estados reduzido, linearizando o sistema em torno de apenas quatro variáveis: ϕ , ψ , p e r . Tem-se, portanto, o vetor de estados reduzido \mathbf{x} apresentado pela equação (33).

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \phi \\ \psi \\ p \\ r \end{Bmatrix} \quad (33)$$

No estado de equilíbrio, pode-se inferir que o ângulo de rolagem $\bar{\phi}$ será nulo, enquanto os ângulos de arfagem $\bar{\theta}$ guinada $\bar{\psi}$ assumirão valores constantes θ_0 e ψ_0 . As velocidades angulares \bar{p} , \bar{q} e \bar{r} são todas nulas no ponto de equilíbrio de voo em regime permanente (TWEDDLE, 2006). Com o estado de equilíbrio bem definido, pode-se descrever a função linear com o termo de controle δ_a , conforme apresentado pela equação (34).

As matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são descritas, respectivamente, pelas equações (35) e (36). Poupano o leitor da demonstração, estas matrizes são obtidas linearizando, em torno do ponto de equilíbrio, as equações de derivada temporal das variáveis do estado reduzido, apresentadas em (22) e (26). Slegers e Costello (2005) chegam a resultado muito similar,

com uma pequena ressalva de que não incluem o termo t_{θ_0} oriundo da linearização da equação diferencial em $\dot{\phi}$.

Como descrito na metodologia, utilizou-se a expansão de Taylor até os termos de primeira ordem para fazê-lo. Os momentos de inércia J_{iI} representam os componentes da matriz de inércia inversa, que multiplica à esquerda os termos da equação (26).

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + B \cdot \{\delta_a\} \quad (34)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & t_{\theta_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1/c_{\theta_0} \\ \frac{\rho S b V_A^2 I_x C_{l\phi}}{2} & 0 & \frac{\rho S b^2 V_A I_x C_{lp}}{4} & \frac{\rho S b^2 V_A I_{xz} C_{nr}}{4} \\ \frac{\rho S b V_A^2 I_{xz} C_{l\phi}}{2} & 0 & \frac{\rho S b^2 V_A I_{xz} C_{lp}}{4} & \frac{\rho S b^2 V_A I_z C_{nr}}{4} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\rho S b V_A^2 (C_{l\delta_a} I_x + C_{n\delta_a} I_{xz})}{2d} \\ \frac{\rho S b V_A^2 (C_{l\delta_a} I_{xz} + C_{n\delta_a} I_z)}{2d} \end{bmatrix} \quad (36)$$

É importante ressaltar que a matriz \mathbf{I} , cujos termos figuram nas equações (35) e (36), é a inversa da matriz de inércia, ou seja, $[\mathbf{I}] = [\mathbf{J}]^{-1}$. A convenção de indexação de suas entradas é a mesma da matriz de inércia.

6 Análises

6.1 Escolha dos parâmetros

Os valores utilizados para a simulação são apresentados nas tabelas abaixo.

Tabela 1 – Constantes do ambiente

Variável	Valor	Unidade
g	9.81	m/s^2
ρ	1.2	kg/m^3

Na Tabela 1, não há muita escolha a fazer, apenas utilizamos valores coerentes com a altitude, escolhendo considerar que estes não variam durante o voo de descida.

Tabela 2 – Parâmetros geométricos

Variável	Valor	Unidade
b	1.85	m
c	0.95	m
d	$0.25 \cdot c$	m
D_C	$0.75 \cdot c$	m
D_P	$0.25 \cdot c$	m
R_L	2.72	m
m_p	1	kg
m_f	24	kg
c_f	2	m
c_t	2	m

Já na Tabela 2, com excessão de d , D_C e D_P , todos os valores foram estimados com base em foguetes e sistema já utilizados previamente pelo Projeto Jupiter. Essas três excessões foram estimadas conforme sugere Tao et al. (2017).

Tabela 3 – Matriz de inércia

Variável	Valor	Unidade
J_x	16.53	$km \cdot m^2$
J_y	16.43	$km \cdot m^2$
J_z	0.229	$km \cdot m^2$
J_{xz}	0.030	$km \cdot m^2$

Para a matriz de inércia no centro de gravidade, foram transpostas e somadas as matrizes do parafoil e do foguete, sendo essas duas obtidas pelo método previamente indicado e pelo modelo em *software* de *CAD* de um dos foguetes da equipe, respectivamente.

Tabela 4 – Coeficientes aerodinâmicos

Variável	Valor	Unidade
$C_{D\alpha^2}$	0.95	-
C_{lp}	-0.52	-
C_{m0}	0.0	-
$C_{l\delta a}$	0.0021	-
C_{mq}	-0.4	-
C_{nr}	-0.85	-
$C_{n\delta a}$	0.001	-
$C_{l\phi}$	-0.01	-
$C_{m\alpha}$	0.0	-
$C_{l\delta a}$	0.0	-
$C_{D\delta a}$	0.0	-

Os coeficientes aerodinâmicos escolhidos, dispostos na Tabela 4, foram adotados conforme sugerido por Slegers e Costello (2005), e os que não eram citados foram considerados como nulos. Idealmente, seria necessário a realização de um teste em túnel de vento, ou, na falta deste, a elaboração de uma simulação CFD do *parafoil*.

Tabela 5 – Valores de equilíbrio

Variável	Valor	Unidade
θ_0	-5	graus
ψ_0	30	graus

Finalmente, na Tabela 5, mostram-se os valores das variáveis de estado no equilíbrio. θ_0 foi arbitrado como este valor (pequeno ângulo) de forma com que fossem evitadas situações de estol, enquanto ψ_0 foi totalmente arbitrário, pois qualquer valor para o mesmo era válido no nosso escopo.

6.2 Análise de estabilidade

A partir do comando *ss2tf()* no *Scilab*, foram obtidas as funções de transferência para o sistema. Posto que o sistema tem apenas uma entrada, haverá uma função de transferência para cada variável do estado reduzido. As funções, obtidas numericamente na forma racional, são reproduzidas integralmente nas equações (37) a (40).

$$G_\phi(s) = \frac{37.986251 - 0.8146453s}{44.569902 + 107.65738s + 95.552723s^2 + s^3} \quad (37)$$

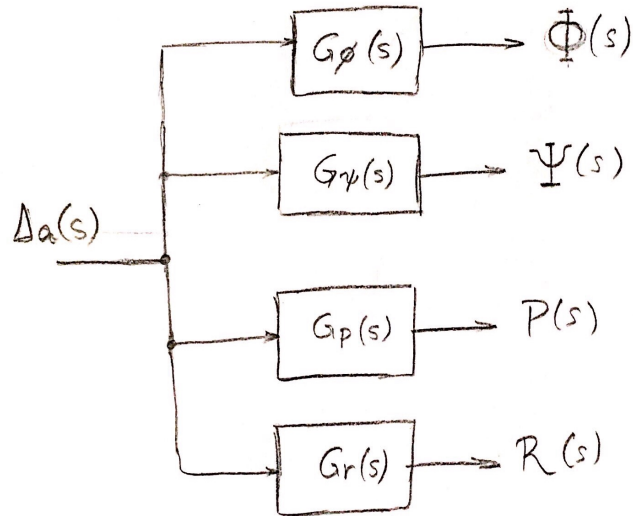
$$G_\psi(s) = \frac{6.7884535 + 16.326231s + 14.43551s^2}{44.569902s + 107.65738s^2 + 95.552723s^3 + s^4} \quad (38)$$

$$G_p(s) = \frac{0.5916527 + 39.409176s + 0.4434924s^2}{44.569902 + 107.65738s + 95.552723s^2 + s^3} \quad (39)$$

$$G_r(s) = \frac{6.7626214 + 16.264104s + 14.380579s^2}{44.569902 + 107.65738s + 95.552723s^2 + s^3} \quad (40)$$

Conhecendo as funções de transferência, é possível representar o modelo matemático no domínio da frequência usando álgebra de diagrama de blocos. A Figura 9 apresenta o respectivo diagrama, sendo $\Delta_a(s) = \mathcal{L}(\delta_a(t))$ a entrada do sistema. As saídas, à direita na figura, resultam da convolução das suas respectivas funções de transferência com a entrada do sistema.

Figura 9 – Diagrama de blocos no domínio da frequência



Uma análise dos polos do sistema é fundamental para verificar a sua estabilidade. Para tanto, é preciso determinar os autovalores da matriz \mathbf{A} , calculando as raízes da equação característica $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, apresentada em (41). Utilizam-se os termos a_{ij} para representar as entradas não nulas de \mathbf{A} , explicitadas em (35), e para simplificar a notação. A equação algébrica de quarto grau cuja solução são estes autovalores é apresentada em (42).

$$\det \begin{bmatrix} s & 0 & 1 & a_{14} \\ 0 & s & 0 & a_{24} \\ -a_{31} & 0 & s - a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & 0 & -a_{43} & s - a_{44} \end{bmatrix} = 0 \quad (41)$$

$$s[s^3 - (a_{33} + a_{44})s^2 - (a_{31} + a_{34}a_{43} + a_{41}a_{14} - a_{33}a_{44})s - a_{31}a_{43}a_{14} - a_{34}a_{41} + a_{31}a_{44} + a_{33}a_{41}a_{14}] = 0 \quad (42)$$

Com o auxílio do comando `spec()` do *Scilab*, chega-se aos valores numéricos para os autovalores do sistema. Estes são mostrados na Tabela 6, indexados arbitrariamente. Polos localizados no semiplano esquerdo do plano complexo são estáveis. Posto que o sistema linearizado não apresenta polos com parte real positiva, então pode-se afirmar que o sistema é estável.

Tabela 6 – Polos do sistema

Polo	$Re(s_i)$	$Im(s_i)$	Estabilidade
s_1	0	0	Marginal
s_2	-0.5676137	+0.3871253	Estável
s_3	-0.5676137	-0.3871253	Estável
s_4	-94.417496	0	Estável

6.3 Matriz de transição

Um conceito muito importante para a teoria de modelagem e controle é a matriz de transição $\Phi(\Delta t)$ do sistema, bem como a matriz de termos forçantes $\Gamma(\Delta t)$. Usando a expansão em série de Taylor da função exponencial, escolhe-se aproximá-la até o décimo termo da expansão. Assim, as matrizes são aproximadas segundo (43) e (44).

$$\Phi(\Delta t) \approx \sum_{k=0}^9 \frac{\mathbf{A}^k \Delta t^k}{k!} \quad (43)$$

$$\Gamma(\Delta t) \approx \sum_0^9 \frac{\mathbf{A}^k \Delta t^{k+1}}{(k+1)!} \quad (44)$$

Arbitrando um passo de $\Delta = 0,01$ s, determina-se numericamente cada uma dessas matrizes. Estas são apresentadas, para os parâmetros e para o passo escolhidos, nas equações (45) e (46).

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.9999767 & 0. & 0.0099438 & -0.0005725 \\ -0.0000023 & 1. & -0.0000056 & 0.006496 \\ -0.0046945 & 0. & 0.9886862 & -0.0011001 \\ -0.000397 & 0. & -0.000957 & 0.3890024 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.0099999 & 0. & 0.0000498 & -0.0000033 \\ -8.264E-09 & 0.01 & -1.990E-08 & 0.0000375 \\ -0.0000235 & 0. & 0.0099434 & -0.0000064 \\ -0.0000023 & 0. & -0.0000055 & 0.0064713 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{x}_j = \Phi \mathbf{x}_{j-1} + \Gamma \mathbf{B} \mathbf{u}_{j-1} \quad (47)$$

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{C} \mathbf{x}_j + \mathbf{D} \mathbf{u}_j \quad (48)$$

Para simular o sistema pela matriz de transição, procede-se segundo as expressões indicadas em (47) e (48). Conhecido o estado inicial do sistema, a evolução temporal dos

estados pode ser determinada, a cada iteração temporal, por essas equações. Os resultados obtidos são indistinguíveis em relação aos apresentados na seção 6.4.

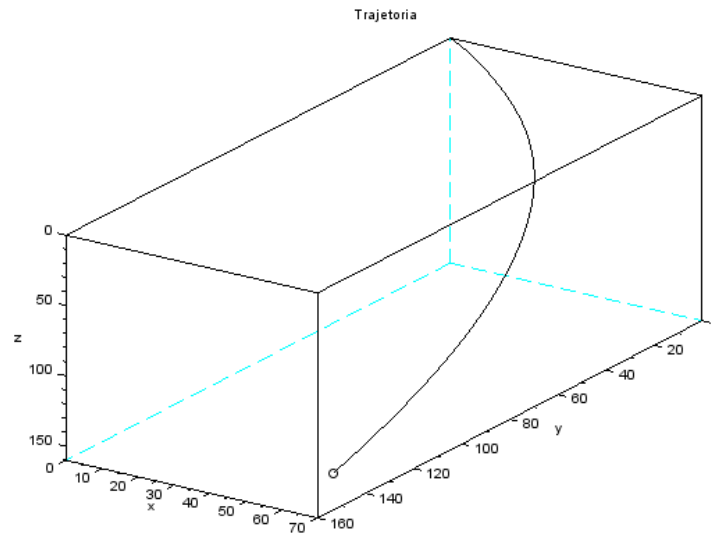
6.4 Respostas do sistema

Deseja-se comparar os resultados obtidos pelos dois modelos estudados. Para tanto, estuda-se três tipos de atuação diferente do valor de controle δ_a : entrada de tipo degrau, senoidal e impulso. Para cada análise, cria-se um gráfico para cada variável do vetor de estados \mathbf{x} , onde pode-se comparar os resultados obtidos por cada modelo.

De maneira geral, observa-se que os resultados apresentados são similares, principalmente para os casos de entrada senoidal e impulso. É relevante ressaltar que, para a entrada degrau, é observável um afastamento entre os dois resultados que se intensifica ao longo do tempo, mostrando que as aproximações feitas na linearização passam a deixar de representar bem o sistema.

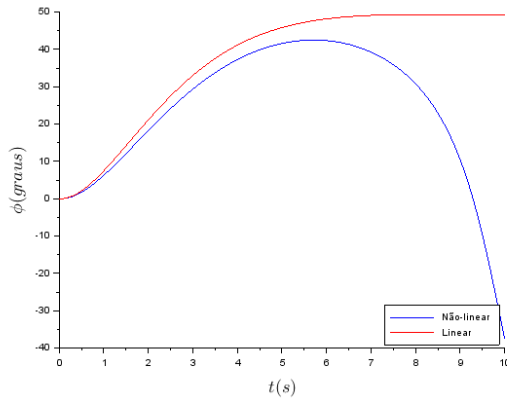
6.4.1 Entrada de tipo degrau

Figura 10 – Trajetória do centro de massa do sistema para a entrada degrau

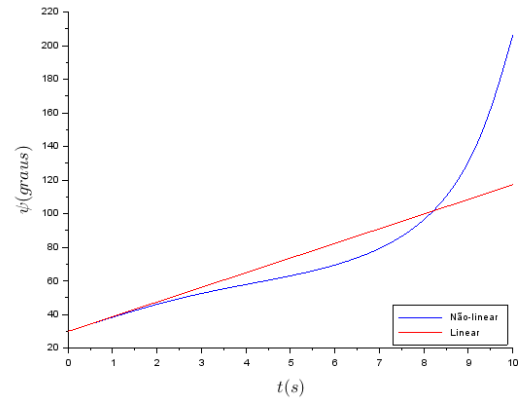


Na Figura 10 é apresentada a trajetória do centro de massa do sistema para uma entrada degrau. É interessante reparar a curva descrita pelo sistema, resultado da deflexão δ_a imposta. Esse comportamento sugere a possibilidade de guiar o paraquedas sobre uma trajetória prescrita usando a teoria de controle.

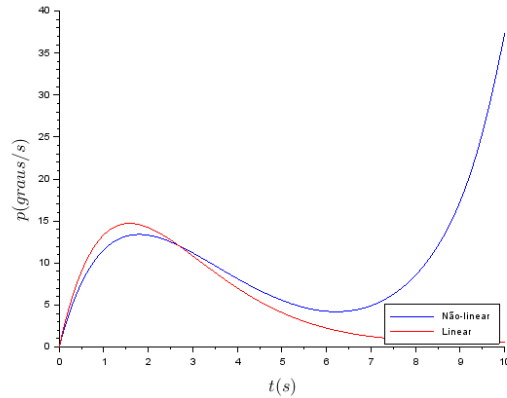
Figura 11 – Respostas do sistema para entrada degrau unitária



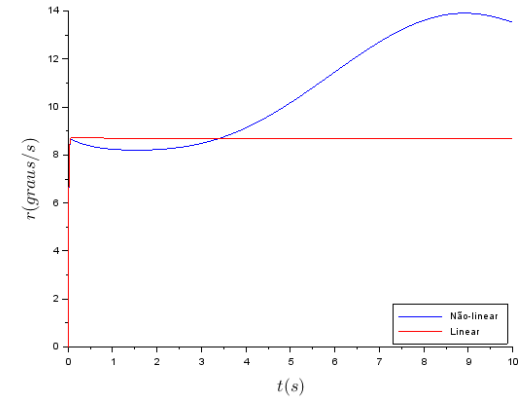
(a) Ângulo de rolagem



(b) Ângulo de guinada



(c) Velocidade de rolagem no referencial do corpo



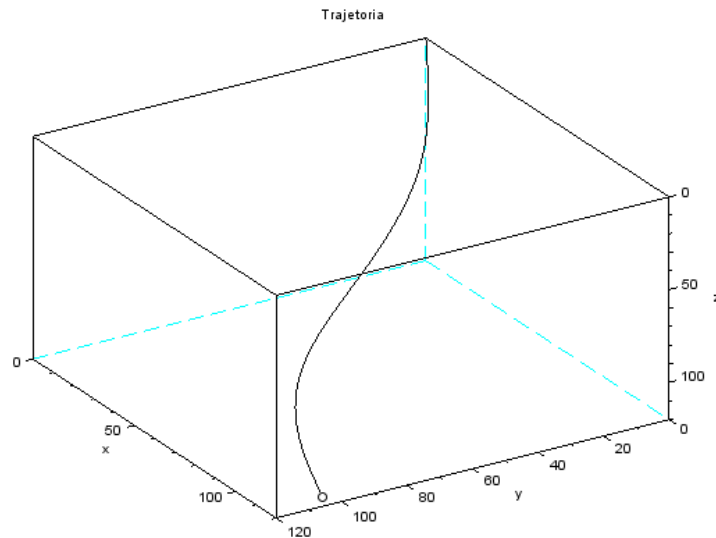
(d) Velocidade de guinada no referencial do corpo

Fonte: Autores (2020)

Com a entrada de tipo degrau, observa-se que os modelos apresentam resultados iniciais parecidos. Entretanto, conforme a simulação avança no tempo, as diferenças tornam-se mais visíveis. Este comportamento divergente é esperado, já que a atuação de δ_a ocorre de maneira contínua. Desta forma, as diferenças entre os modelos são acumuladas a cada passo da iteração, o que traduz para o afastamento observado.

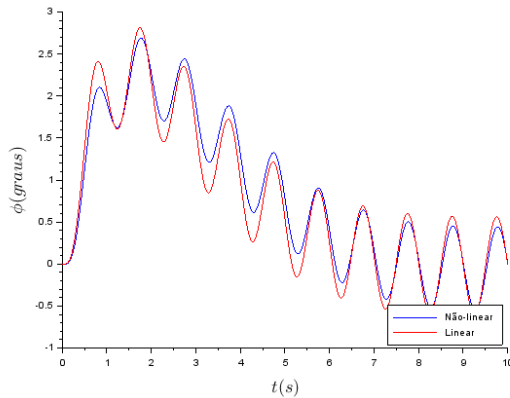
6.4.2 Entrada de tipo senoidal

Figura 12 – Trajetória do centro de massa do sistema para a entrada senoidal de amplitude unitária e frequência 0,1 Hz

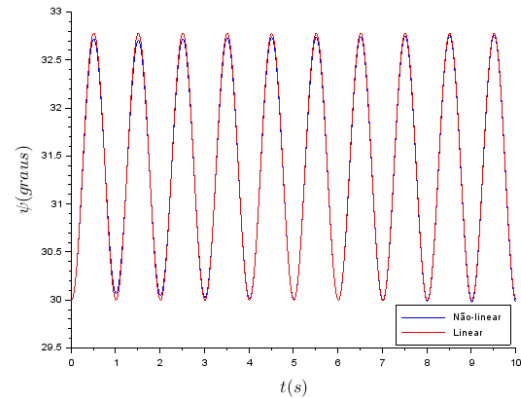


A trajetória do centro de massa é apresentada na Figura 12 para uma entrada senoidal de baixa frequência. Como pode-se perceber, mais uma vez, nota-se o efeito da deflexão δ_a no controle da trajetória do *parafoil*. Em comparação com a trajetória sob entrada degrau da Figura 10, a diferença de resposta é evidente, com o resultado de um curso mais sinuoso desta vez.

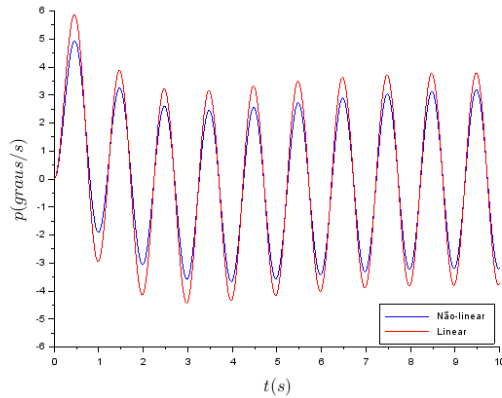
Figura 13 – Respostas do sistema para entrada senoidal de amplitude e frequência unitárias



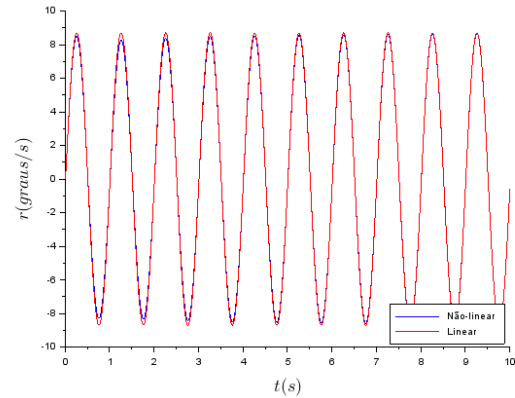
(a) Ângulo de rolagem



(b) Ângulo de guinada



(c) Velocidade de rolagem no referencial do corpo

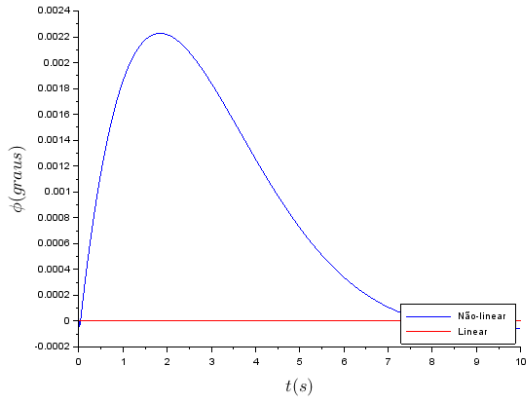


(d) Velocidade de guinada no referencial do corpo

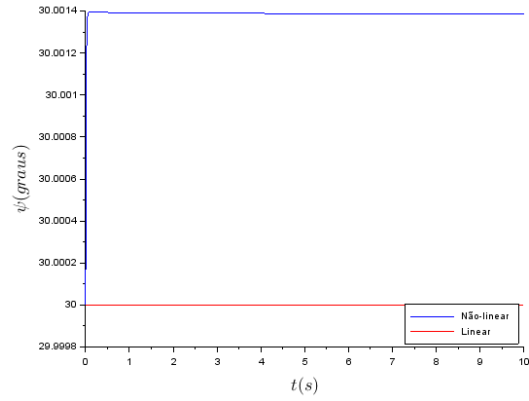
Fonte: Autores (2020)

A entrada do tipo senoidal implica uma grande semelhança entre os resultados dos dois modelos. A periodicidade do comportamento de δ_a impede que o fenômeno observado na entrada degrau ocorra. É importante ressaltar que a variação de cada uma das variáveis do vetor de estados é de baixa ordem de grandeza. Esta observação é ainda mais relevante para casos de frequências maiores.

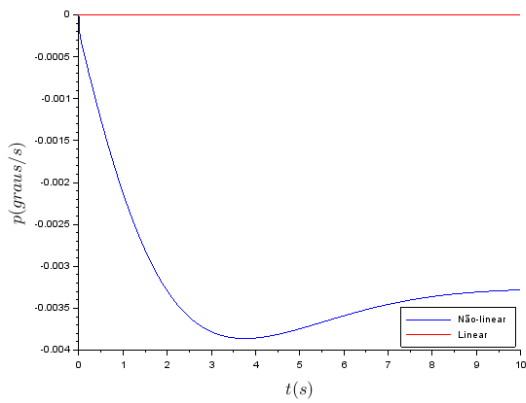
Figura 14 – Respostas do sistema para entrada senoidal de amplitude unitária e frequência 1000 Hz



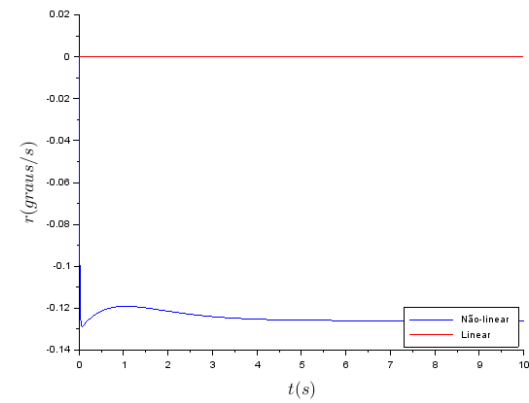
(a) Ângulo de rolagem



(b) Ângulo de guinada



(c) Velocidade de rolagem no referencial do corpo



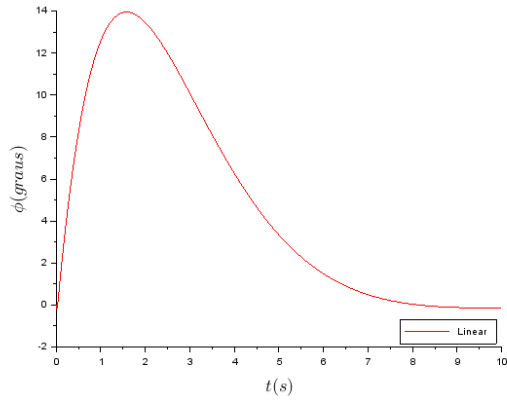
(d) Velocidade de guinada no referencial do corpo

Fonte: Autores (2020)

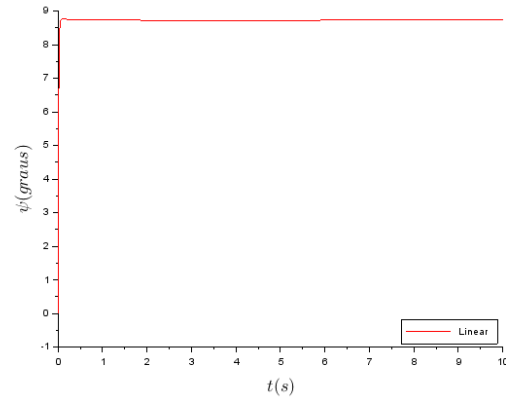
Conforme esperado, o comportamento do modelo dinâmico é quase constante para altas frequências oscilatórias. Observa-se que a variação de cada parâmetro ocorre em ordens de grandeza desprezíveis, o que caracteriza resultados virtualmente idênticos para os dois modelos distintos.

6.4.3 Entrada de tipo impulso

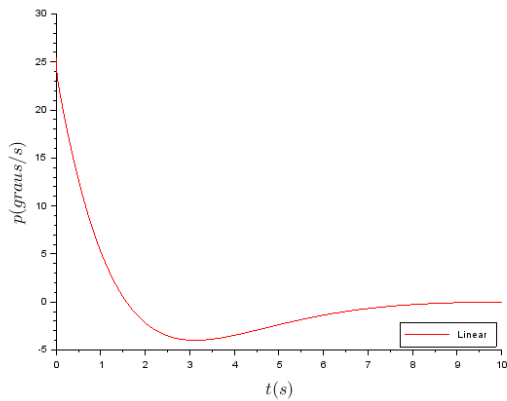
Figura 15 – Respostas do sistema para entrada impulso



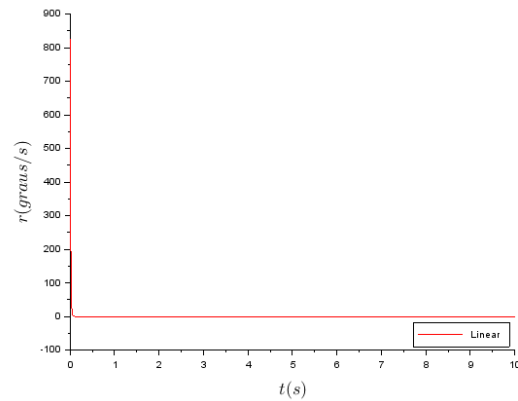
(a) Ângulo de rolagem



(b) Ângulo de guinada



(c) Velocidade de rolagem no referencial do corpo



(d) Velocidade de guinada no referencial do corpo

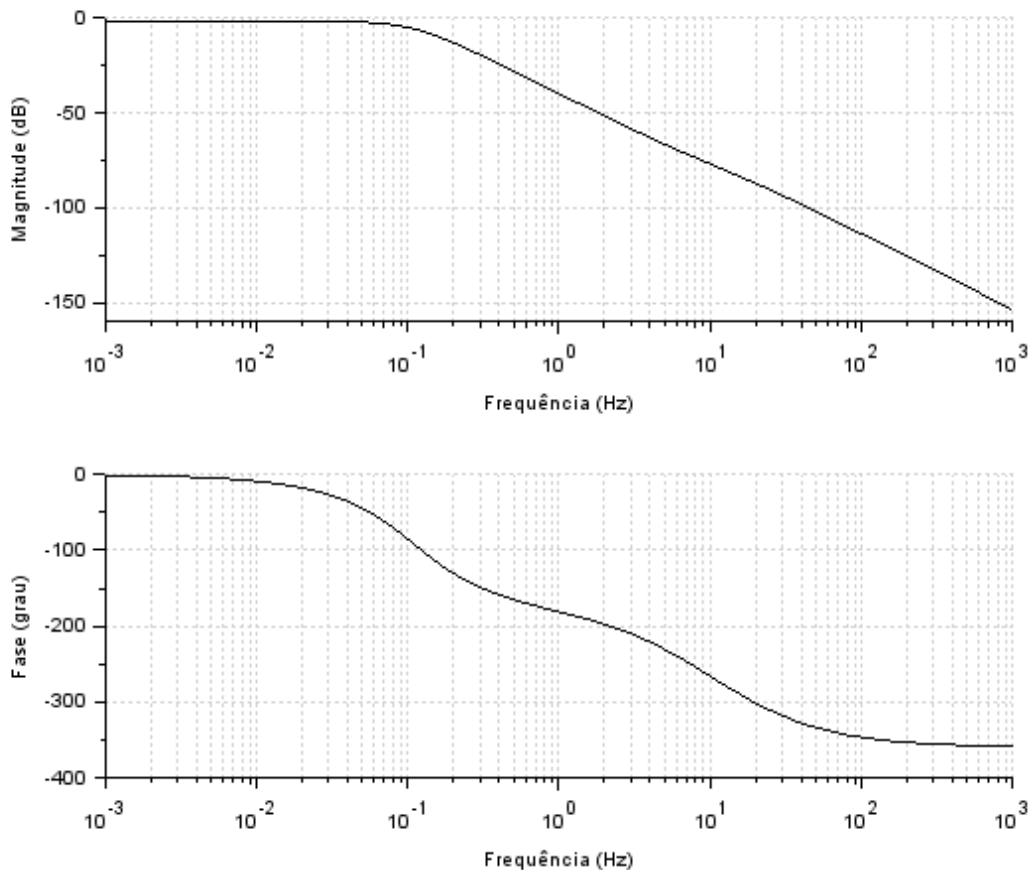
Fonte: Autores (2020)

A entrada do tipo impulso só é simulada para o modelo linear. Ainda assim, o resultado apresentado explicita o comportamento estável do modelo. Após um impulso momentâneo, o corpo sofre um pequeno distúrbio em seu comportamento, mas retorna a um novo estado de equilíbrio em poucos instantes. Nota-se que os valores de ϕ , p e r retornam gradualmente (ou quase que instantaneamente para o último termo) para a posição de equilíbrio, enquanto o valor de ψ é deslocado para um ψ'_0 , distinto daquele imposto pelas condições iniciais.

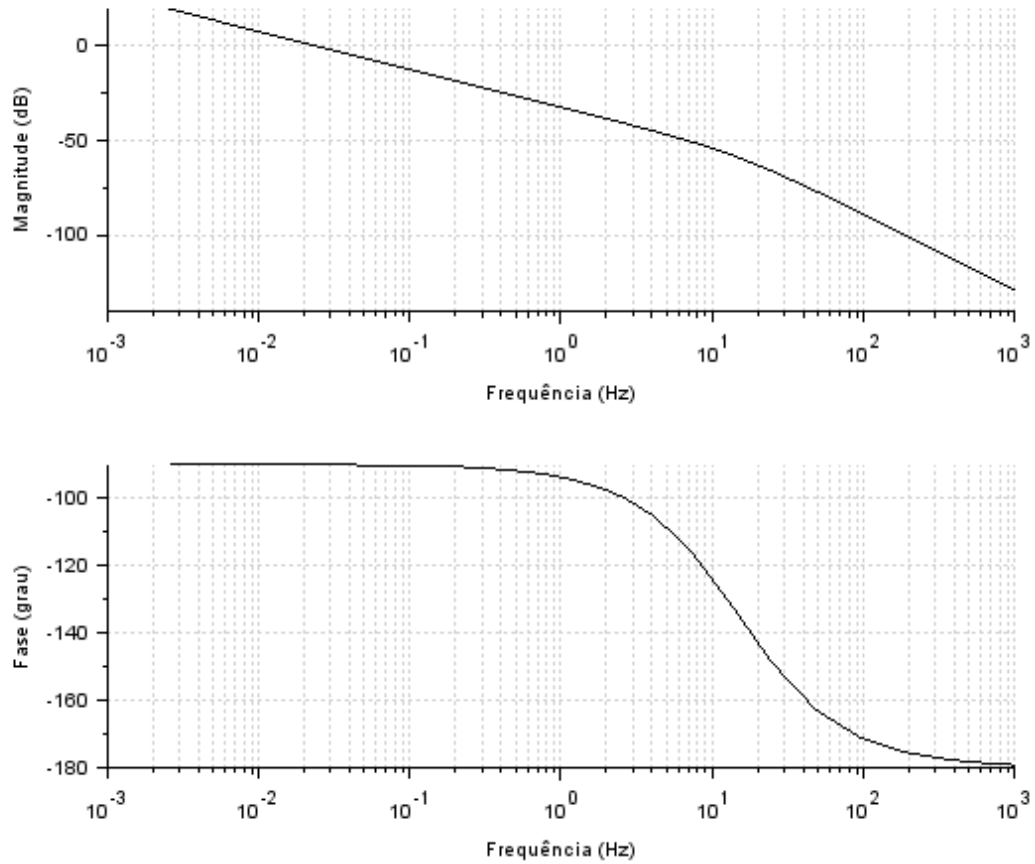
6.5 Diagramas de Bode

Com o intuito de avaliar o sistema dinâmico sob influência de um distúrbio periódico, traçam-se os diagramas de bode para cada termo do vetor de estados reduzido. Ainda que prevaleça uma característica geral deste sistema, faz-se uma análise individual de cada termo.

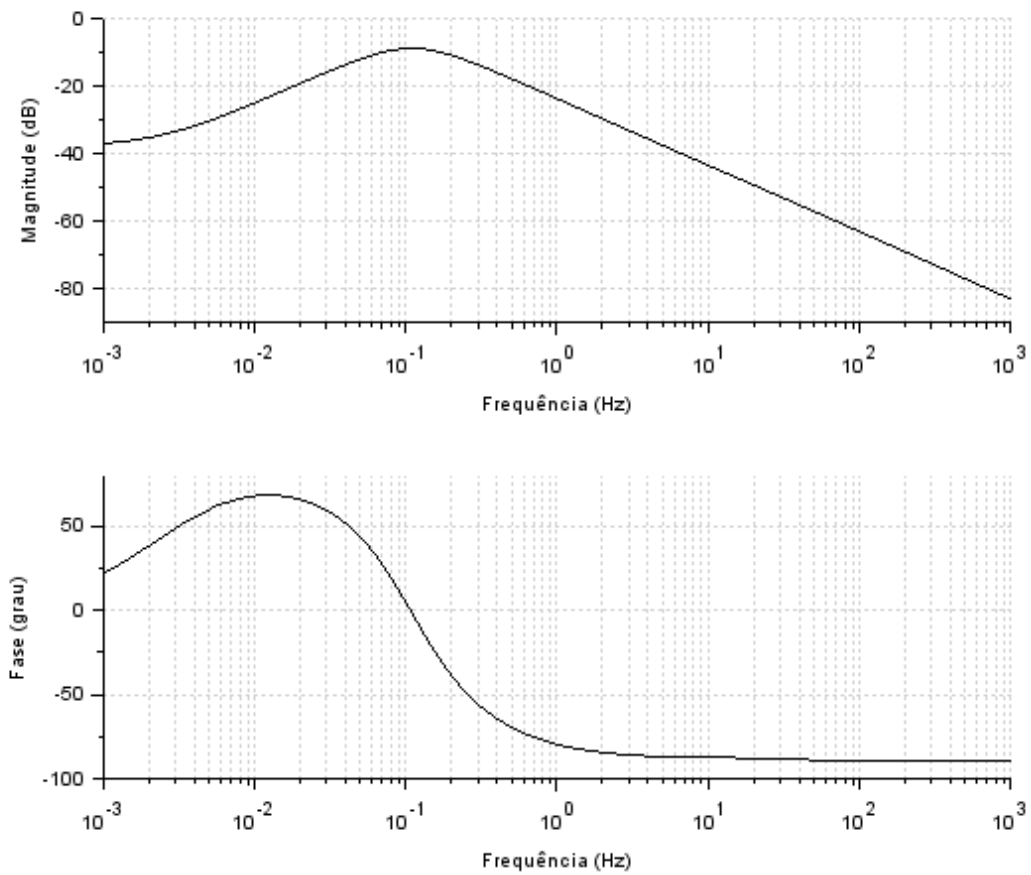
Figura 16 – Diagrama de bode para a saída ϕ



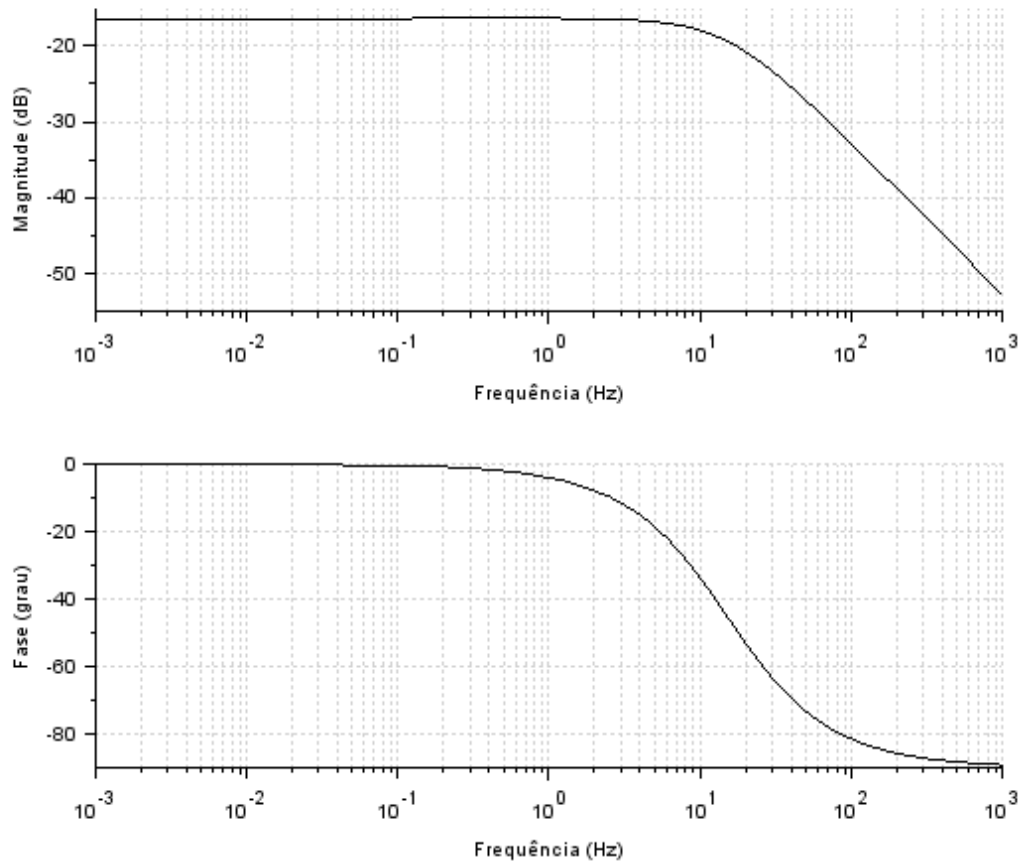
Pode-se observar pelo diagrama da Figura 16 que o termo ϕ tem o comportamento de "filtro passa-baixas", ou seja, para distúrbios de alta frequência, o sistema oscila cada vez menos com relação à variável em questão. Por outro lado, para altas frequências, o termo ϕ tem seu comportamento pouco alterado. Pode-se justificar este padrão pela condição de equilíbrio $\bar{\phi} = 0$, ou seja, o sistema sempre tende a retornar para a posição inicial $\phi = 0$.

Figura 17 – Diagrama de bode para a saída ψ 

O termo ψ possui um comportamento ligeiramente distinto da variável ϕ . Pelo diagrama da Figura 17, percebe-se que, para frequências menores que 10^{-2} Hz , o termo ψ sofre uma influência ligeiramente amplificada. Ainda assim, o termo em questão tende a sofrer uma influência reduzida de termos forçantes de alta frequência. O padrão observado para ψ pode ser justificado pela condição de equilíbrio $\bar{\psi} = \psi_0$, ou seja, não possui uma condição de equilíbrio específica. Assim, o sistema tem a liberdade de encontrar um valor ψ'_0 de equilíbrio distinto ao imposto pelo programa.

Figura 18 – Diagrama de bode para a saída p 

O diagrama de Bode do termo p da Figura 18 enfatiza o comportamento estável da variável ϕ . Este termo sofre influência reduzida para qualquer frequência imposta, com redução significativa para termos de alta frequência. Assim, qualquer efeito senoidal atuante sob o sistema tem pouco ou nenhum efeito sob o termo de rolagem.

Figura 19 – Diagrama de bode para a saída r 

O diagrama da figura 19 demonstra o perfil de "filtro passa-baixa" do termo r . Nota-se a manutenção do padrão de alta inércia sob influência de termos de alta frequência, mas também uma relativa passividade com relação aos termos de baixa frequência. Este último ponto complementa o resultado observado do termo ψ , o qual tem comportamento de ampliação para baixas frequências.

7 Conclusão

O modelo desenvolvido apresentou resultados satisfatórios com relação ao que o grupo pretendia inicialmente. A utilização do modelo de 6 graus de liberdade, adotando as hipóteses de que o paraquedas não se move com relação ao foguete, de que as cordas do paraquedas são inextensíveis, além de tratar efeitos de velocidade do vento e de massa adicional como desprezíveis se mostrou acertada para a busca de resultados acerca do comportamento do *parafoil* durante o voo.

Seguindo outras simplificações da base bibliográfica disponível, como fixar o centro de massa do sistema como coincidente com o centro de pressão, foi possível obter uma geometria simplificada das dimensões dos paraquedas. Utilizando cilindros como aproximações para cada célula do paraquedas, foi possível determinar uma matriz de inércia, bem como o momento de inércia em relação ao centro de massa do sistema.

Com geometria e termos inerciais bem definidos, pôde-se criar um modelo não linear para o sistema em questão. Adotou-se simplificações pertinentes à aplicação específica que facilitaram não apenas o desenvolvimento equacional do modelo, mas também a sua futura aplicação em simulações computacionais.

O modelo não linear foi então linearizado em torno de um equilíbrio. Optou-se por utilizar um vetor de estados reduzido, já que parte dos termos não têm ponto de equilíbrio ou, quando linearizados, demonstram um comportamento destacado do restante do sistema.,

Então, foram implementados ambos os modelos no *software Scilab* e obtidas suas respectivas soluções. Junto com elas, também foram obtidos numericamente outros objetos de estudo da disciplina, entre eles: função de transferência, polos do sistema, matrizes de transição, respostas dos dois modelos já citados e diagramas de Bode do sistema.

Todos os resultados foram analisados a fim de compreender a resposta do modelo para diferentes cenários. Pode-se notar características bem definidas (como a alta inércia diante domínios de alta frequência) e confirmar a correta aplicação do modelo proposto.

Sendo assim, há a perspectiva de que o projeto possa ter continuidade na disciplina de Controle e Aplicações (PME3481), além de estudos complementares dentro do contexto do Projeto Jupiter, viabilizando uma aplicação imediata deste estudo para a equipe.

Referências bibliográficas

BARROWS, T. M. Apparent Mass of Parafoils with Spanwise Camber. **Journal of Aircraft**, v. 39, p. 445-451, 2002.

FEIKAI, L. V.; WEILIANG, H.; ZHAO, L. An improved nonlinear multibody dynamic model for a parafoil-UAV system. **IEEE Access**, Beijing, v. 7, p. 139994-140009, 2019.

GONZÁLEZ, E.; SACCO, C.; ORTEGA, E.; FLORES, R. **Development of a 6-DoF simulator for analysis and evaluation of autonomous parafoil systems**. 2011. 12 p. Relatório de pesquisa para o International Centre for Numerical Methods in Engineering. Disponível em: <https://www.scipedia.com/public/Gonzalez_et_al_2011a>. Acesso em: 10 out. 2020.

LISSAMAN, P. B. S.; BROWN, G. J. **Apparent mass effects on parafoil dynamics**. Technical Report 93-1236, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993. 7 p.

MORTALONI, P. A.; YAKIMENKO, O. A.; DOBROKHODOV, V. N.; HOWARD, R. M. On the development of a six-degree-of-freedom model of a low-aspect-ratio parafoil delivery system. In: AIAA AERODYNAMIC DECELERATOR SYSTEMS TECHNOLOGY CONFERENCE AND SEMINAR, 2003, Monterey. **Anais...** Monterey: AIAA, 2003.

PRAKASH, O.; ANANTHKRISHNAN, N. Modeling and Simulation of 9-DOF Parafoil-Payload System Flight Dynamics. In: AIAA ATMOSPHERIC FLIGHT MECHANICS CONFERENCE AND EXHIBIT, 2006, Keystone. **Anais...** Keystone: AIAA, 2006.

REDELINGHUYS, C. A Flight Simulation Algorithm for a Parafoil Suspending an Air Vehicle. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.30, n.3, p. 791-803, mai./jun. 2007.

SLEGGERS, N.; COSTELLO, M. Aspects of Control for a Parafoil and Payload System. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 46, n. 6, p. 898-905, nov./dec. 2003.

SLEGGERS, N.; COSTELLO, M. Model Predictive Control of a Parafoil and Payload System. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.28, n. 4, p. 816-821, jul./ago. 2005.

SLEGGERS, N.; BEYER, E.; COSTELLO, M. Use of Variable Incidence Angle for Glide Slope Control of Autonomous Parafoils. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.31, n. 3, p. 585-596, mai./jun. 2008.

STEIN, M. J.; MADSEN, M. C. **An Overview of the Guided Parafoil System Derived from the X-38 Experience**. Technical Report, NASA Johnson Space Center, Houston, State, 2005. 11p.

STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L.; JOHNSON, E. N. **Aircraft control and simulation**. 3rd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2016. 764 p.

TAO, J.; SUN, Q.; LIANG, W.; CHEN, Z.; HE, Y; DEHMER, M. **Computational fluid dynamics based dynamic modeling of parafoil system**. Applied Mathematical Modeling, n. 54, p. 136-150, 2017.

TWEDDLE, B. E. **Simulation and Control of Guided Ram Air Parafoils**. 2006. 86 p. Trabalho de Conclusão de Curso - University of Waterloo, Waterloo, 2006.

WISE, K. A. Dynamics of a UAV With Parafoil Under Powered Flight. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION, AND CONTROL CONFERENCE AND EXHIBIT, 2006, Keystone. **Anais...** Keystone: AIAA, 2006.

Apêndices

APÊNDICE A – Codigos

Modelo não-linear

Código programado em Scilab para simulação do modelo não-linear.

```

1 clear ;
2
3 function [T]=TIB(phi , theta , psi)
4     T(1,1) = cos(theta)*cos(psi);
5     T(1,2) = cos(theta)*sin(psi);
6     T(1,3) = -sin(theta);
7     T(2,1) = sin(phi)*sin(theta)*cos(psi)-cos(phi)*sin(psi);
8     T(2,2) = sin(phi)*sin(theta)*sin(psi)+cos(phi)*cos(psi);
9     T(2,3) = sin(phi)*cos(theta);
10    T(3,1) = cos(phi)*sin(theta)*cos(psi)+sin(phi)*sin(psi);
11    T(3,2) = cos(phi)*sin(theta)*sin(psi)-sin(phi)*cos(psi);
12    T(3,3) = cos(phi)*cos(theta);
13 endfunction
14
15 function [T]=HBI(phi , theta , psi)
16     T(1,1) = 1.;
17     T(1,2) = tan(theta)*sin(phi);
18     T(1,3) = cos(phi)*tan(theta);
19     T(2,1) = 0.;
20     T(2,2) = cos(phi);
21     T(2,3) = -sin(phi);
22     T(3,1) = 0.;
23     T(3,2) = sin(phi)/cos(theta);
24     T(3,3) = cos(phi)/cos(theta);
25 endfunction
26
27 function [W]=F_W(theta , phi)
28     W = m*g*[-sin(theta); sin(phi)*cos(theta); cos(phi)*cos(theta)];
29 endfunction
30
31 function [F_A,F_S]=aeroforces(x,deltaa , alfa)
32     Va = norm(x(7:9));
33     F_A = 0.5*rho*Va*Sparafoil*(C_L0+C_Lalpha*alfa+C_Ldeltaa*deltaa)*[x(9)
;0;-x(7)] - 0.5*rho*Va*Sparafoil*(C_D0+C_Dalpha2*alfa^2+C_Ddeltaa*deltaa
)*[x(7);x(8);x(9)];
34     F_S = - 0.5*rho*Va*Srocket*C_DS*[x(7);x(8);x(9)];
35 endfunction
36

```

```

37 function [MA]=aeromoments(x,deltaa , alfa)
38     Va = norm(x(7:9));
39     MA = 0.5*rho*(Va^2)*Sparafoil*[C_lphi*b*x(4)+C_lp*b^2*x(10)/(2*Va)+
    C_ldeltaa*deltaa*b/d;C_m0*c+C_malfa*c*alfa+C_mq*c^2*x(11)/(2*Va);C_nr*b
    ^2*x(12)/(2*Va) + C_ndeltaa*b*deltaa/d];
40 endfunction
41
42 function [S]=Sx(r)
43     S = zeros(3,3);
44     S(1,2) = -r(3);
45     S(1,3) = r(2);
46     S(2,1) = r(3);
47     S(2,3) = -r(1);
48     S(3,1) = -r(2);
49     S(3,2) = r(1);
50 endfunction
51
52 //Constantes
53 g = 9.81;
54 rho = 1.2;
55
56 //Par metros do parafoil
57 b = 1.85;
58 c = .95;
59 d = c/4.;
60 C_position = 0.75*c;
61 P_position = 0.25*c;
62 CCM_position = 0.25*c;
63 Sparafoil = b*c;
64 m_parafoil = 1.;
65 Jcx = 0.1429;
66 Jcy = 0.0434;
67 Jcz = 0.1764;
68
69 //Par metros do foguete
70 rocket_length = 2.72;
71 rocket_CM = 0.5*rocket_length;
72 rocket_diameter = 0.127;
73 Srocket = rocket_length*rocket_diameter;
74 m_rocket = 24.;
75 Jrx = 8.743;
76 Jrz = 0.053;
77 Jry = 8.743;
78
79 //Massa do sistema
80 m = m_parafoil+m_rocket;
81

```

```

82 //Construção geométrica
83 cf = 2.;
84 ct = 2.;
85 qui = acos((C_position^2 + cf^2 - ct^2)/(2*C_position*cf));
86 CM_length = sqrt(cf^2+CCM_position^2-2*cf*CCM_position*cos(qui));
87 zcg = m_rocket*(CM_length + rocket_CM)/m;
88 L = CM_length + rocket_CM - zcg;
89 Y = cf*zcg/CM_length;
90 Yl = Y*sin(qui);
91 Dpl = sqrt(zcg^2-Yl^2);
92 A = L*Dpl/zcg;
93 B = L*Yl/zcg;
94 RCM_position = [A;0;B];
95 G_P = [Dpl;0.;Yl];
96 P_G = -G_P;
97 S_G = RCM_position;
98 S_P = S_G + G_P;
99 zcm = 0.016;
100
101 //Construção da matriz de inercia do sistema
102 Jx = Jrx + m_rocket*norm(RCM_position)^2 + Jcx + m_parafoil*zcg^2;
103 Jy = Jry + m_rocket*norm(RCM_position)^2 + Jcy + m_parafoil*zcg^2;
104 Jz = Jrz + Jcz;
105 Jxz = 0.030;
106 J = [Jx 0. -Jxz; 0. Jy 0.; -Jxz 0. Jz];
107
108 //Coeficientes característicos
109 C_L0 = 0.28;
110 C_Lalpha = 0.68;
111 C_D0 = 0.135;
112 C_Dalpha2 = 0.95;
113 C_lp = -0.52;
114 C_m0 = 0.;
115 C_ldeltaa = 0.0021;
116 C_mq = -0.4;
117 C_nr = -0.6;
118 C_ndeltaa = 0.0010;
119 C_DS = 2.;
120 C_lphi = -0.01;
121 C_malfa = 0.;
122 C_Ldeltaa = 0.;
123 C_Ddeltaa = 0.;
124
125 //Construção da função de entrada
126 function u = sys_input(t)
127     f = 1.;
128     omega = 2*%pi*f;

```

```

129     u = sin(omega*t);
130 endfunction
131
132 //Construção do espaço de estados
133 function [xdot]=sistema(t,x,u);
134     phi = x(4);
135     theta = x(5);
136     psi = x(6);
137     T_IB = TIB(phi,theta,psi);
138     H_BI = HBI(phi,theta,psi);
139     pos = T_IB'*x(7:9);
140     xdot(1) = pos(1);
141     xdot(2) = pos(2);
142     xdot(3) = pos(3);
143     ang = H_BI*x(10:12);
144     xdot(4) = ang(1);
145     xdot(5) = ang(2);
146     xdot(6) = ang(3);
147     Fw = F_W(theta,phi);
148     alfa = atan(x(9)/x(7));
149     u = sys_input(t);
150     [F_A,F_S] = aeroforces(x,u(1),alfa);
151     [MA] = aeromoments(x,u(1),alfa);
152     xdot_lin = 1/m * (F_A+Fw)-T_IB*Sx(x(10:12))*T_IB'*x(7:9);
153 //     xdot_ang = inv(J)*(MA + Sx(P_G)*F_A + Sx(S_G)*F_S - Sx(x(10:12))*J*x
154 (10:12));
155     xdot_ang = inv(J)*(MA - Sx(x(10:12))*J*x(10:12));
156     xdot(7) = xdot_lin(1);
157     xdot(8) = xdot_lin(2);
158     xdot(9) = xdot_lin(3);
159     xdot(10) = xdot_ang(1);
160     xdot(11) = xdot_ang(2);
161     xdot(12) = xdot_ang(3);
162 endfunction
163
164 //Condições iniciais
165 theta0 = -5*pi/180;
166 psi0 = pi/6;
167 Va0 = 20;
168 x0 = [0.; 0.; 0.;0.;theta0;psi0;Va0*cos(theta0);0.;Va0*sin(theta0)
169 ;0.;0.;0.];
170
171 //Vetor de tempo
172 step = 0.01;
173 t_final = 10.;
174 t = 0.:step:t_final;
175

```

```
174 //Solver
175 [x]=ode(x0,t(1),t,list(sistema,sys_input));
176
177 //Plotagem das saídas
178 scf(1)
179 plot2d(t,x(4,:)*180/%pi,2);
180 xlabel("$t (s)$",'fontsize',4,'fontname','times bold')
181 ylabel("$\phi (graus)$",'fontsize',4,'fontname','times bold')
182 scf(2)
183 plot2d(t,x(6,:)*180/%pi,2);
184 xlabel("$t (s)$",'fontsize',4,'fontname','times bold')
185 ylabel("$\psi (graus)$",'fontsize',4,'fontname','times bold')
186 scf(3)
187 plot2d(t,x(10,:)*180/%pi,2);
188 xlabel("$t (s)$",'fontsize',4,'fontname','times bold')
189 ylabel("$p (graus/s)$",'fontsize',4,'fontname','times bold')
190 scf(4);
191 plot2d(t,x(12,:)*180/%pi,2);
192 xlabel("$t (s)$",'fontsize',4,'fontname','times bold')
193 ylabel("$r (graus/s)$",'fontsize',4,'fontname','times bold')
```

Modelo linearizado

Código programado em Scilab para simulação do modelo linearizado.

```

1 clear;
2
3 //Constantes
4 rho = 1.2;
5
6 //Parametros do parafoil e sistema
7 b = 1.85;
8 c = .95;
9 d = c/4.;
10 S = b*c;
11 Jx = 16.530561;
12 Jy = 16.431061;
13 Jz = 0.2294;
14 Jxz = 0.030;
15 J = [Jx 0. -Jxz; 0. Jy 0.; -Jxz 0. Jz];
16 I = inv(J);
17 Ix = I(1,1);
18 Iy = I(2,2);
19 Iz = I(3,3);
20 Ixz = I(1,3);
21
22 //Coeficientes característicos
23 Clphi = - 0.01;
24 Clp = -0.52;
25 Cldeltaa = 0.0021;
26 Cnr = -0.6;
27 Cndeltaa = 0.0010;
28
29
30 theta0 = -5*%pi/180;
31 Va = 20;
32
33 //Matrizes A B C D
34 A = [ 0 0 1 tan(theta0); 0 0 0 1/cos(theta0); rho*S*b*Va^2*Ix*Clphi/2 0 rho
      *S*b^2*Va*Ix*Clp/4 rho*S*b^2*Va*Ixz*Cnr/4; rho*S*b*Va^2*Ixz*Clphi/2 0
      rho*S*b^2*Va*Ixz*Clp/4 rho*S*b^2*Va*Iz*Cnr/4];
35 B = [0 ; 0 ; rho*S*b*Va^2*(Cldeltaa*Ix+Cndeltaa*Ixz)/2/d ; rho*S*b*Va^2*(
      Cldeltaa*Ixz+Cndeltaa*Iz)/2/d];
36 C = eye(4,4);
37 D = [0]
38
39 //Vetor de tempo
40 step = 0.01;
41 tf = 10.;

```

```

42 t = 0:step:tf;
43
44 //Entrada do sistema
45 u = zeros(1,length(t));
46 f = 1.;
47 omega = 2*%pi*f;
48 u(1,:) = sin(omega*t);
49
50 //Condições iniciais
51 x0 = [0; %pi/6; 0; 0.];
52
53 //Solver
54 sys = syslin('c',A,B,C);
55 G = ss2tf(sys);
56 polos = spec(A);
57 disp('Polos do sistema');
58 disp(polos);
59 [y,x] = csim(u,t,sys,x0);
60
61
62 //Calculo da trajetória
63 origin = [0;0;0];
64 trajetoria = zeros(3,length(t));
65 trajetoria(:,1) = origin;
66 for i = 2:length(t)
67     trajetoria(1,i) = trajetoria(1,i-1) + step*Va*cos(theta0)*cos(x(2,i-1))
68     ;
69     trajetoria(2,i) = trajetoria(2,i-1) + step*Va*cos(theta0)*sin(x(2,i-1))
70     ;
71     trajetoria(3,i) = trajetoria(3,i-1) + Va*sin(theta0)*step
72 end
73
74 //Plotagem das saídas (rodar somente após ja ter rodado o não linear – sem
75 fechar as janelas gráficas)
76
77 scf(1);
78 plot2d(t,x(1,:)*180/%pi,5);
79 legend("Não-linear", "Linear", 4)
80 scf(2);
81 plot2d(t,x(2,:)*180/%pi,5);
82 legend("Não-linear", "Linear", 4)
83 scf(3);
84 plot2d(t,x(3,:)*180/%pi,5);
85 legend("Não-linear", "Linear", 4)

```

```

86 scf(5);
87 bode(G(1,:));
88 scf(6);
89 bode(G(2,:));
90 scf(7);
91 bode(G(3,:));
92 scf(8);
93 bode(G(4,:));
94
95
96 //Metodo alternativo
97 function [x]=integrador3(A,B,C,D,u,t,x0)
98     // Parametros da funcao
99     n = length(x0); // Numero de variaveis do vetor de estados
100    Dt = t(2)-t(1); // Passo de integracao (argumento da matriz de
transicao)
101    expansion_order = 10; //Numero de termos da expansao em serie de Taylor
de exp(A*Dt)
102
103    // Funcao para determinacao numerica da matriz de transicao
104    function [f]=phi(Dt)
105        f = eye(n,n); //Termo inicial da expansao de Taylor
106        for k=1:expansion_order-1;
107            f=f+(A^k)*(Dt^k)/factorial(k); // Somatorio da expansao
108        end
109    endfunction
110    // Funcao para determinacao numerica da matriz dos termos forcantes
111    function [g]=gama(Dt);
112        g = Dt*eye(n,n); //Termo inicial da expansao de Taylor
113        for k=1:expansion_order-1;
114            g = g + (A^k)*(Dt^(k+1))/factorial(k+1); // Somatorio da
expansao
115        end
116    endfunction
117
118    // Laco de integracao
119    y = zeros(n,length(t)); // Inicializacao da matriz cujas colunas sao
vetores de saida
120    x(:,1)=x0; // Condicao inicial do vetor de estados do sistema de EDOs
121    y(:,1) = C*x(:,1)+D*u(:,1); // Condicao inicial do vetor de saidas
122    for i=2:length(t);
123        x(:,i) = phi(Dt)*x(:,i-1)+gama(Dt)*B*u(:,i-1);
124        y(:,i) = C*x(:,i)+D*u(:,i)
125    end
126    disp('Matriz de transicao:');
127    disp(phi(Dt));
128    disp('Matriz de termos forcantes:');

```



```
129     disp(gama(Dt));  
130 endfunction  
131  
132 z = integrador3(A,B,C,D,u,t,x0);  
133 //plot2d(t,z(1,:)*180/%pi,2);
```

Calculo da matriz de inercia

Código programado em Scilab para auxílio no cálculo da matriz de inércia aproximada do *parafoil*.

```

1 clear ;
2
3 N = 11;
4
5 alfa1 = 3*%pi/180;
6 lambda = 3*%pi/180;
7
8 b = 1.85;
9 c = 0.95;
10 d = c/4.;
11
12 kgm2 = 37.3/1000.;
13
14 r2 = b/N/2.;
15 t = 1./1000.;
16 r1 = r2-t;
17
18 if modulo(N,2)==1 then
19     n = (N-1)/2 + 1;
20 else
21     n = N/2;
22 end
23
24 zi = zeros(1,n);
25 ti = zeros(1,n);
26 si = zeros(1,n);
27 yi = zeros(1,n);
28
29 for i = 2:length(zi);
30     ti(i) = ti(i-1) + 2*r2*cos(lambda)*sin(alfa1+(i-2)*lambda);
31     si(i) = si(i-1) + 2*r2*cos(lambda)*cos(alfa1+(i-2)*lambda);
32     zi(i) = ti(i) + r2*sin(alfa1+(i-3));
33     yi(i) = si(i) + r2*cos(alfa1+(i-3));
34 end
35
36 zcm = 2*sum(zi)/N;
37 rho = 93.24;
38
39 m = rho*%pi*(r2^2-r1^2)*c;
40 Jxi = 0.5*m*(r2^2+r1^2);
41 Jyi = ((r2^2 + r1^2)/4. + c^2/12)*m;
42 Jzi = Jyi;
43

```

```
44 Jx = Jxi + m*((zcm-zi(1))^2+yi(1)^2);
45 Jz = Jyi + m*(zcm-zi(1))^2;
46 Jy = Jzi + m*yi(1)^2;
47
48 for j = 2:length(zi);
49     Jx = Jx + 2*(Jxi + m*((zcm-zi(j))^2+yi(j)^2));
50     Jy = Jy + 2*(Jyi + m*(zcm-zi(j))^2);
51     Jz = Jz + 2*(Jzi + m*yi(j)^2);
52 end
53
54 J = [Jx 0 0; 0 Jy 0; 0 0 Jz];
55 disp(J);
56
57 M = N*m;
```