

Cássio Murakami
Gabriel Barbosa Paganini
Henrique Kuhlmann
João Otávio Tanaka de Oliveira

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos
Trabalho final T1

São Paulo, Brasil

2020

Cássio Murakami
Gabriel Barbosa Paganini
Henrique Kuhlmann
João Otávio Tanaka de Oliveira

PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos
Trabalho final T1

Universidade de São Paulo
Escola Politécnica

São Paulo, Brasil
2020

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema do circuito de acionamento do motor elétrico C.C. [Autores, 2020]	11
Figura 2 – Imagem do satélite CBERS 4 com painel solar aberto [INPE, 2020]	21
Figura 3 – Esquema de funcionamento de uma roda de reação dentro de um satélite [NASA, 2020]	22
Figura 4 – Esquema de funcionamento do motor elétrico a corrente contínua [PME3380, 2020]	23
Figura 5 – Modelo 3D do satélite CBERS 4 - Autodesk Fusion 360 [Autores, 2020]	24
Figura 6 – Modelo 3D do satélite CBERS 4 com duas rodas de reação posicionadas internamente - Autodesk Fusion 360 [Autores, 2020]	24
Figura 7 – Diagrama de Bode - magnitude [AUTORES, 2020]	28
Figura 8 – Diagrama de Bode - fase [AUTORES, 2020]	28
Figura 9 – Rotações instantâneas em X e Y para $\omega_{x0} = \omega_{y0}$ [AUTORES, 2020]	29
Figura 10 – Rotação instantânea em Z para $\omega_{x0} = \omega_{y0}$ [AUTORES, 2020]	30
Figura 11 – Correntes elétricas em X e Y para $\omega_{x0} = \omega_{y0}$ [AUTORES, 2020]	30
Figura 12 – Momentos da quantidade de movimento em X e Y para $\omega_{x0} = \omega_{y0}$ [AUTORES, 2020]	31
Figura 13 – Comparação de efeito do motor para $\omega_{x0} = \omega_{y0}$ [AUTORES, 2020]	32
Figura 14 – Rotações instantâneas em X e Y para $\omega_{y0} = 4\omega_{x0}$ [AUTORES, 2020]	33
Figura 15 – Rotação instantânea em Z para $\omega_{y0} = 4\omega_{x0}$ [AUTORES, 2020]	33
Figura 16 – Correntes elétricas em X e Y para $\omega_{y0} = 4\omega_{x0}$ [AUTORES, 2020]	34
Figura 17 – Momentos da quantidade de movimento em X e Y para $\omega_{y0} = 4\omega_{x0}$ [AUTORES, 2020]	34
Figura 18 – Comparação de efeito do motor para $\omega_{y0} = 4\omega_{x0}$ [AUTORES, 2020]	35
Figura 19 – Rotações instantâneas em X e Y para $\omega_{x0} = 4\omega_{y0}$	36
Figura 20 – Rotação instantânea em Z para $\omega_{x0} = 4\omega_{y0}$	36
Figura 21 – Correntes elétricas em X e Y para $\omega_{x0} = 4\omega_{y0}$	37
Figura 22 – Momentos da quantidade de movimento em X e Y para $\omega_{x0} = 4\omega_{y0}$	37
Figura 23 – Comparação de efeito do motor para $\omega_{x0} = 4\omega_{y0}$	38
Figura 24 – Rotações instantâneas em X e Y para rotações negativas.	39
Figura 25 – Rotação instantânea em Z para rotações negativas.	39
Figura 26 – Correntes elétricas em X e Y para rotações negativas.	40
Figura 27 – Momentos da quantidade de movimento em X e Y para rotações negativas.	40
Figura 28 – Comparação de efeito do motor para rotações negativas	41

Figura 29 – Mosaico dos gráficos da rotação instantânea em X e Y. As voltagens estão dispostas de forma crescente da esquerda para direita, começando com 0, 12, 24, 36 e 48 Volts.	42
Figura 30 – Mosaico dos gráficos da rotação instantânea em Z. As voltagens estão dispostas de forma crescente da esquerda para direita, começando com 0, 12, 24, 36 e 48 Volts.	43

Lista de tabelas

Tabela 1 – Características do satélite CBERS 4.	21
Tabela 2 – Momentos principais de inércia do satélite e dos conjuntos eixo disco das rodas de reação	25
Tabela 3 – Parâmetros numéricos de simulação.	26
Tabela 4 – Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz	44

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
3	OBJETIVOS	3
4	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	4
4.1	Equações da mecânica clássica	4
4.2	Estudo da estabilidade de um satélite	5
4.3	Domínio da frequência	8
5	MODELAGEM	10
5.1	Modelo do satélite	10
5.2	Modelo do motor elétrico	11
5.3	Modelo rodas de reação	12
5.4	Modelo matemático	15
5.5	Linearização	16
5.6	Materiais	20
5.6.1	Satélite modelado: CBERS 4	20
5.6.2	Roda de reação	21
5.6.3	Motor elétrico C.C.	22
5.6.4	CAD e momentos de inércia	23
6	RESULTADOS	26
6.1	Resultado das simulações	26
6.1.1	Primeiro conjunto de condições iniciais: $\omega_{x0} = \omega_{y0}$	29
6.1.2	Segundo conjunto de condições iniciais: $\omega_{y0} = 4\omega_{x0}$	32
6.1.3	Terceiro conjunto de condições iniciais: $\omega_{x0} = 4\omega_{y0}$	35
6.1.4	Quarto conjunto de condições iniciais: todas as rotações negativas	38
6.2	Análise de sensibilidade dos parâmetros	41
6.3	Análise de estabilidade	43
7	CONCLUSÃO	45
	REFERÊNCIAS	46

APÊNDICES	47
APÊNDICE A – CÓDIGO DE SIMULAÇÃO DO MODELO EM SCILAB	48

1 Introdução

Nos dias atuais, a vida dos seres humanos é muito dependente dos meios de telecomunicação e, principalmente, da internet. Para que toda a infraestrutura de comunicação mundial opere nominalmente, é fundamental o papel dos satélites artificiais. Inúmeros serviços, considerados casuais para boa parte da população brasileira, apenas são possível graças a estes, como o *GPS*, a internet, as chamadas telefônicas, a televisão, entre outras tecnologias.

Uma aplicação de suma importância dos satélites artificiais é no imageamento de regiões inteiras, a fim de gerenciar recursos naturais, monitorar e zonar regiões rurais, estudar os efeitos das mudanças climáticas ou simplesmente prever o clima. É dentro deste planisfério de ações que surgiu o programa CBERS, sigla de *China-Brazil Earth Resources Satellite* (em português, Satélite Sino-Brasileiro de Recursos Terrestres), em 1988 (OLIVEIRA, 2009). A cooperação consiste de um programa técnico-científico binacional que envolve o Brasil e a China, visando o desenvolvimento técnico e científico dos dois países emergentes. Após trinta anos de existência, quatro satélites construídos e três missões de inserção em órbita bem sucedidas, o programa gera ao Brasil formação e informação para a conquista do espaço e conhecimento de suas terras.

O CBERS 4 é o quarto e mais recente modelo de uma parceria entre o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) e a Academia Chinesa de Tecnologia Espacial (CAST), sendo construído e lançado em 2019. O satélite é o maior fabricado da família de veículos, pois os equipamentos embarcados possuem maior resolução para as informações geradas durante sua órbita heliossíncrona, a qual facilita o imageamento de regiões de interesse, como a Amazônia. Devido a maior ordem de grandeza do corpo e importância da missão, o controle preciso de sua estabilidade evidencia-se como ponto chave para o sucesso da missão. Com tal objetivo, propõe-se a análise da estabilidade própria deste objeto, além de uma revisão sobre os meios de atuação e controle da atitude de um satélite, voltando-se a dispositivos de massas inerciais, como rodas de reação.

Dessa maneira, propõe-se a análise da estabilidade própria deste objeto, além de uma revisão sobre os meios de atuação e controle da atitude de um satélite, voltando-se a dispositivos de massas inerciais, como rodas de reação. Modelos para o funcionamento destes dispositivos em um espaço tridimensional, além de proposições de controle de satélites por meio da utilização de duas rodas de reação, posicionadas em eixos principais de inércia diferentes, também são abordados. Um modelo do sistema completo, incluindo as duas rodas de reação e o satélite também é revista e analisada.

2 Revisão bibliográfica

A fim de possibilitar que satélites artificiais funcionem adequadamente, é essencial que eles estejam orientados na atitude correta, ou seja, que eles apontem para o local exigido e possuam rotações controladas em torno destes eixos (SHRIVASTAVA; MODI, 1983). Por exemplo, para que um satélite telescópio obtenha uma imagem com precisão, é necessário que ele observe o mesmo local do céu noturno ao passar em determinado ponto de sua órbita, como no caso do satélite norte americano *Hubble* (DAVIS et al., 1986). Outra aplicação é descrita em "Manobras orbitais de satélites artificiais lunares com aplicação de propulsão contínua"(GONÇALVES, 2013), onde a importância deste controle é levada à aplicação de satélites em órbitas lunares. Um último caso é avaliado sobre a orientação de objetos espaciais, com a implementação dos ângulos de Euler e quatérnions nos computadores do ônibus espacial *Space Shuttle* para a realização de manobras precisas (HENDERSON, 1977).

Em adição, como descrito em "Estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais"(CABETTE, 2006), vários são os fatores que influenciam na atitude dos ângulos de um satélite, como o torque do gradiente da gravidade sobre o corpo ou a pressão solar. Entretanto, é possível e de interesse separar os movimentos de translação e rotação do satélite, de modo a tratá-los como movimentos totalmente independentes. Assim, para que o satélite faça a transmissão perfeita da sua informação, é necessária a sua estabilização e domínio total sobre sua movimentação.

Com base no problema exposto, escolheu-se por buscar modelos de controle de rotação do satélite por rodas de reação, as quais são acionadas por motores elétricos. O principal modelo utilizado para controle baseava-se em duas rodas de reação dispostas em dois eixos de inércia principais distintos (KIM; KIM, 2001), ressaltando a influência combinada em diferentes eixos. Posteriormente, uma revisão e aplicação do trabalho anterior foi realizada para o controle de atitude do satélite universitário *ITASAT*, de modo a apresentar também uma análise dos ângulos de Euler por quatérnions (VIEGAS, 2009). Por fim, um modelo matemático para motores elétricos de corrente contínua e suas equações diferenciais são apresentadas (CANAL; VALDIERO; REIMBOLD, 2017), complementando a modelagem completa do sistema em estudo

3 Objetivos

Esse projeto tem como principal objetivo elaborar um modelo de satélite fixo em um ponto no espaço com mecanismos de controle, no caso rodas de reação acionadas por um motor elétrico, a fim da estabilização e domínio sobre sua movimentação.

Visando tal objetivo, será realizado um estudo aprofundado sobre as equações que regem cada sistema individualmente, no caso a dinâmica do satélite e das rodas de reação e o circuito elétrico do motor. Dessa maneira, será possível relacionar as componentes do modelo elaborado a fim de obter um sistema de equações diferenciais que regem o comportamento do satélite.

A partir do conhecimento teórico e de artigos científicos pré-existentes, serão desenvolvidas as equações diferenciais com o objetivo de obter suas soluções numericamente utilizando o software *Scilab 6.1.0*. Após isso será realizada a interpretação física e matemática dos resultados, aplicando técnicas de linearização e estudo de estabilidade.

A etapa seguinte consiste na pesquisa dos parâmetros do sistema utilizados em aplicações concretas a fim de simular uma situação de forma realística. Em seguida serão realizados diversos testes a fim de verificar a validade do código elaborado, além de analisar cenários com condições iniciais distintas.

Por fim, será feita uma análise criteriosa de sensibilidade e estabilidade do sistema, visando identificar os parâmetros e condições iniciais apropriadas para o objetivo de estabilização. Dessa maneira, será obtido um código computacional que reproduza a evolução temporal do movimento de rotação do satélite, além da elaboração de um estudo sobre o efeito de diferentes parâmetros, condições iniciais e entradas.

4 Fundamentos teóricos

Para a compreensão do problema da estabilização e domínio da movimentação de um satélite artificial, é necessária uma base teórica extensa para realizar a análise. Nesse capítulo, será mostrado parte do conhecimento utilizado na modelagem do sistema.

4.1 Equações da mecânica clássica

O teorema que rege a dinâmica dos corpos rígidos é o teorema do momento da quantidade de movimento. Tal formulação será utilizada para a dedução das equações diferenciais da dinâmica do satélite e do disco reativo.

O momento da quantidade de movimento do corpo extenso é dado pela seguinte expressão:

$$\vec{H}_o = M(G - O) \times \dot{\vec{r}}_o + [J_{Oxyz}][\omega] \quad (4.1)$$

Sendo M a massa do corpo, G a posição do baricentro, O a posição de um polo arbitrário, $\dot{\vec{r}}_o$ a velocidade do polo, $[J_{Oxyz}]$ o tensor de inércia e $[\omega]$ o vetor coluna das componentes da rotação instantânea.

O teorema do momento da quantidade de movimento estabelece a seguinte relação entre a quantidade de movimento e torques externos:

$$\frac{d\vec{H}_o}{dt} = \vec{M}_o^{ext} - \dot{\vec{r}}_o \times M\vec{V}_G \quad (4.2)$$

Sendo M_o^{ext} o momento das forças externas e \vec{V}_G a velocidade do centro de massa do corpo.

Uma possível relação direta entre momentos externos e a rotação instantânea de um corpo pode ser obtido com os passos a seguir. Derivando a expressão 4.1 e aplicando o resultado em 4.2, adotando como hipótese que os momentos principais de inércia são constantes, obtém-se a seguinte relação:

$$\vec{M}_o^{ext} = M(G - O) \times \ddot{\vec{r}}_o + [J_{Oxyz}][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \times ([J_{Oxyz}][\omega]) \quad (4.3)$$

4.2 Estudo da estabilidade de um satélite

O estudo da estabilidade do satélite consiste na análise da equação diferencial de rotação em torno de um ponto fixo sem a aplicação de torques externos, o qual seria o caso geral em que o motor está desligado e as rodas de reação possuem velocidade angular nula. Tal sistema de equações foi proposto e modelado na Equação 5.4.

Modificando o sistema deduzido e impondo a condição de esforços externos nulos, o seguinte resultado é obtido:

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x = (I_y + J - I_z) \omega_y \omega_z \\ I_y \dot{\omega}_y = (I_z - I_x - J) \omega_x \omega_z \\ I_z \dot{\omega}_z = (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{cases} \quad (4.4)$$

Os pontos de equilíbrio ocorrerão quando as três condições forem satisfeitas simultaneamente:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = 0 \\ \dot{\omega}_y = 0 \\ \dot{\omega}_z = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Tal resultado, quando analisado no caso mais geral de três momentos principais de inércia distintos, implica em três possíveis soluções para o problema de estabilidade:

$$(I) \quad \vec{\omega} = (\omega_x^*, 0, 0)$$

$$(II) \quad \vec{\omega} = (0, \omega_y^*, 0)$$

$$(III) \quad \vec{\omega} = (0, 0, \omega_z^*)$$

Sendo ω_x^* , ω_y^* e ω_z^* valores reais quaisquer para as componentes do vetor rotação instantânea.

Assim, para verificar a estabilidade dos pontos de equilíbrios encontrados, será feita uma linearização pelo polinômio de Taylor de primeira ordem em variáveis locais.

Linearização do sistema da Equação 4.4 ao redor de um ponto $P = (x_p, y_p, z_p)$ utilizando as seguintes coordenadas locais:

$$\omega'_x = \omega_x - x_p, \quad \omega'_y = \omega_y - y_p, \quad \omega'_z = \omega_z - z_p \quad (4.6)$$

Então, o sistema diferencial linear aproximado obtido é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\omega}'_x = x_1\omega'_x + x_2\omega'_y + x_3\omega'_z \\ \dot{\omega}'_y = y_1\omega'_x + y_2\omega'_y + y_3\omega'_z \\ \dot{\omega}'_z = z_1\omega'_x + z_2\omega'_y + z_3\omega'_z \end{cases} \quad (4.7)$$

Com os coeficientes do sistema dados pelas seguintes relações:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial X}{\partial \omega_x} \right|_{(x_p, y_p, z_p)} & \left. \frac{\partial X}{\partial \omega_y} \right|_{(x_p, y_p, z_p)} & \left. \frac{\partial X}{\partial \omega_z} \right|_{(x_p, y_p, z_p)} \\ \left. \frac{\partial Y}{\partial \omega_x} \right|_{(x_p, y_p, z_p)} & \left. \frac{\partial Y}{\partial \omega_y} \right|_{(x_p, y_p, z_p)} & \left. \frac{\partial Y}{\partial \omega_z} \right|_{(x_p, y_p, z_p)} \\ \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega_x} \right|_{(x_p, y_p, z_p)} & \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega_y} \right|_{(x_p, y_p, z_p)} & \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega_z} \right|_{(x_p, y_p, z_p)} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Onde, os valores de X, Y e Z são as expressões que definem respectivamente ω_x, ω_y e ω_z

$$\begin{cases} X = \frac{(I_y + J - I_z)}{I_x} \omega_y \omega_z \\ Y = \frac{(I_z - I_x - J)}{I_y} \omega_x \omega_z \\ Z = \frac{(I_x - I_y)}{I_z} \omega_x \omega_y \end{cases} \quad (4.9)$$

Os coeficientes de linearização são determinados a partir da substituição dos valores de X, Y e Z na Equação 4.8, de modo que:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(I_y + J - I_z)}{I_x} z_p & \frac{(I_y + J - I_z)}{I_x} y_p \\ \frac{(I_z - I_x - J)}{I_y} z_p & 0 & \frac{(I_z - I_x - J)}{I_y} x_p \\ \frac{(I_x - I_y)}{I_z} y_p & \frac{(I_x - I_y)}{I_z} x_p & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Substituindo os valores dos coeficientes obtidos no sistema 4.7 para obter o sistema linearizado em torno de um ponto $P = (x_p, y_p, z_p)$:

$$\begin{cases} \dot{\omega}'_x = \left[\frac{(I_y + J - I_z)}{I_x} z_p \right] \omega'_y + \left[\frac{(I_y + J - I_z)}{I_x} y_p \right] \omega'_z \\ \dot{\omega}'_y = \left[\frac{(I_z - I_x - J)}{I_y} z_p \right] \omega'_x + \left[\frac{(I_z - I_x - J)}{I_y} x_p \right] \omega'_z \\ \dot{\omega}'_z = \left[\frac{(I_x - I_y)}{I_z} y_p \right] \omega'_x + \left[\frac{(I_x - I_y)}{I_z} x_p \right] \omega'_y \end{cases} \quad (4.11)$$

A solução geral do sistema diferencial de primeira ordem 4.11 é da forma

$$\begin{bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} e^{\lambda t} \quad (4.12)$$

Derivando e substituindo a solução genérica 4.12 no sistema 4.11:

$$\begin{bmatrix} \lambda & -\frac{(I_y+J-I_z)}{I_x}z_p & -\frac{(I_y+J-I_z)}{I_x}y_p \\ -\frac{(I_z-I_x-J)}{I_y}z_p & \lambda & -\frac{(I_z-I_x-J)}{I_y}x_p \\ -\frac{(I_x-I_y)}{I_z}y_p & -\frac{(I_x-I_y)}{I_z}x_p & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Como esperado, a solução não é permanentemente nula ($e^{\lambda t} \neq 0$). Além disso, por ser um sistema linear homogêneo, para obtermos soluções diferentes da trivial, a seguinte relação deve ser válida:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -\frac{(I_y+J-I_z)}{I_x}z_p & -\frac{(I_y+J-I_z)}{I_x}y_p \\ -\frac{(I_z-I_x-J)}{I_y}z_p & \lambda & -\frac{(I_z-I_x-J)}{I_y}x_p \\ -\frac{(I_x-I_y)}{I_z}y_p & -\frac{(I_x-I_y)}{I_z}x_p & \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

(I) Para o caso de estabilidade $\vec{\omega} = (\omega_x^*, 0, 0)$:

A equação característica dos sistema é dada por:

$$\lambda^3 - \lambda \frac{(I_x - I_y)(I_z - I_x - J)}{I_y I_z} \omega_x^{*2} = 0$$

Na qual as raízes da equação característica são:

$$\lambda_1 = -i \sqrt{\frac{(I_x - I_y)(I_x + J - I_z)}{I_y I_z}} \omega_x^*; \quad \lambda_2 = 0; \quad \lambda_3 = +i \sqrt{\frac{(I_x - I_y)(I_x + J - I_z)}{I_y I_z}} \omega_x^*.$$

Como os autovalores resultaram em números complexos, a condição é caracterizada como um equilíbrio estável.

(II) Para o caso de estabilidade $\vec{\omega} = (0, \omega_y^*, 0)$:

A equação característica dos sistema é dada por:

$$\lambda^3 - \lambda \frac{(I_x - I_y)(I_y + J - I_z)}{I_x I_z} \omega_y^{*2} = 0$$

Com as raízes da equação característica são:

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{(I_x - I_y)(I_y + J - I_z)}{I_x I_z}} \omega_y^*, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = +\sqrt{\frac{(I_x - I_y)(I_y + J - I_z)}{I_x I_z}} \omega_y^*.$$

Dado que os autovalores resultaram em números reais, a condição é caracterizada como equilíbrio instável.

(III) Para o caso de estabilidade $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z^*)$:

Por fim, a equação característica é dada por:

$$\lambda^3 - \lambda \frac{(I_z - I_x - J)(I_y + J - I_z)}{I_x I_y} \omega_z^{*2} = 0$$

Cujas raízes da equação característica são:

$$\lambda_1 = -i \sqrt{\frac{(I_x + J - I_z)(I_y + J - I_z)}{I_x I_y}} \omega_z^*, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = +i \sqrt{\frac{(I_x + J - I_z)(I_y + J - I_z)}{I_x I_y}} \omega_z^*.$$

Em vista de autovalores com números complexos, tal condição caracteriza um equilíbrio estável.

4.3 Domínio da frequência

Para analisar um modelo linear no domínio de frequência, a transformada de Laplace pode ser aplicada nas seguintes equações:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.15)$$

$$y = Cx + Du \quad (4.16)$$

Onde A é a matriz dinâmica, B é a matriz de entrada, C é a matriz de observações e D é a matriz de incidência direta. Para o desenvolvimento seguinte, é considerado que a matriz D é nula. Aplicando a transformada de Laplace em cada uma das equações e explicitando o termo $X(s)$, tem-se que:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (4.17)$$

No desenvolvimento acima, considera-se que as condições iniciais x_0 são nulas. Aplicando a transformada na Equação 5.34 e utilizando a Equação 4.17, a função de transferência $G(s)$ pode ser determinada:

$$G(s) = Y(s)U(s)^{-1} = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.18)$$

Dado um sistema de equações diferenciais lineares, a função de transferência para ele pode ser utilizada para calcular a resposta do sistema a uma entrada qualquer de forma analítica através da aplicação de uma transformada inversa. Caso não seja possível, devido à complexidade de $G(s)U(s)$, também pode-se optar por métodos numéricos.

Além disso, é possível estudar a estabilidade do sistema através da análise dos polos do mesmo. Um sistema é definido como estável se, para uma entrada limitada, ele responde com uma saída limitada. Sistemas instáveis são de pouco interesse, uma vez que o objetivo é manter o sistema em torno de uma configuração estável. Dessa forma, deseja-se um sistema estável.

Os polos do sistema correspondem às raízes do polinômio característico da matriz A . Caso exista algum polo com componente real maior que zero, o sistema é instável. Caso contrário, o sistema é estável. O polinômio característico pode ser calculado da seguinte forma:

$$P(s) = \text{Det}(sI - A) \quad (4.19)$$

Para analisar a função de transferência $G(s)$, é possível lançar mão do diagrama de Bode, para avaliar o ganho e diferença de fase em relação a uma entrada senoidal do sistema.

5 Modelagem

Para facilitar a estruturação da elaboração do sistema, foram divididas a modelagem do problema em várias etapas.

5.1 Modelo do satélite

Considerando o satélite artificial com o comportamento de um corpo rígido, ou seja, adotando a hipótese que o sólido não sofre deformações, é possível aplicar o teorema do momento da quantidade de movimento modificado, conforme estabelecido na Equação 4.3:

$$\vec{M}_o^{ext} = M(G - O) \times \ddot{\vec{r}}_o + [J_{Oxyz}][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \times ([J_{Oxyz}][\omega]) \quad (5.1)$$

Sendo: M a massa do satélite; G a posição do baricentro; O a posição de um polo arbitrário; $\dot{\vec{r}}_o$ a velocidade do polo; $[J_{Oxyz}]$ o tensor de inércia; $[\omega]$ o vetor coluna das componentes da rotação instantânea; M_o^{ext} o momento das forças externas; e \vec{V}_G a velocidade do centro de massa do corpo.

As condições de contorno da situação a ser estudada são dadas por:

(i) Polo O como ponto fixo:

$$\ddot{\vec{r}}_o = \vec{0} \quad (5.2)$$

(ii) Eixos do sistema de coordenadas coincidentes com os eixos principais de inércia:

$$[J_{Oxyz}] = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Aplicando as condições apresentadas na expressão obtida a partir do teorema do momento da quantidade de movimento, o seguinte sistema diferencial é obtido:

$$\begin{cases} M_x = I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \\ M_y = I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_x \omega_z \\ M_z = I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{cases} \quad (5.4)$$

Sendo o momento externo aplicado $M_o^{ext} = (M_x, M_y, M_z)$. Será adotada a hipótese de que todo o momento aplicado ao corpo será advindo exclusivamente dos motores

elétricos acoplados. Tal sugestão é válida, dado que as ações do ambiente externo como o gradiente de gravidade, pressão de radiação solar e forças aerodinâmicas (SHRIVASTAVA; MODI, 1983) não serão consideradas para a simplificação do modelo, visando a análise de efeito e controle das rodas de reação.

Uma vez obtida o sistema de três equações diferenciais que modelam o movimento de rotação do satélite (Equação 5.4), será elaborado um modelo para os torques externos a partir dos motores elétricos das rodas de reação.

5.2 Modelo do motor elétrico

Inicialmente, analisa-se o circuito elétrico que rege o motor elétrico C.C. (Figura 1) e a aplicação de um torque T , com base em uma tensão na bobina, sobre uma carga de momento de inércia J . Esta última grandeza configura o disco de inércia da roda de reação, o qual possui uma rotação relativa a base Ω .

Para fins de simplificação, será considerada a hipótese da inexistência de atrito viscoso na rotação do disco. Considera-se também a presença de uma resistência R e uma indutância L , internas à armadura do motor, além de sua tensão controlável $V(t)$ e corrente i na armadura.

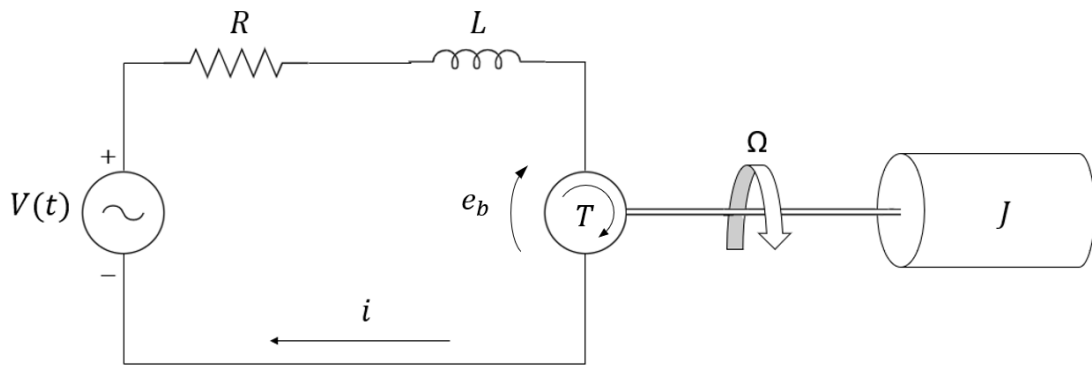


Figura 1 – Esquema do circuito de acionamento do motor elétrico C.C. [Autores, 2020]

No circuito da armadura, aplica-se a lei das malhas de Kirchhoff:

$$V(t) - e_b(t) = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (5.5)$$

A diferença de potencial $e_b(t)$ pode ser descrita pela lei dos geradores, sendo $K_b(t)$ a densidade de fluxo da bobina e Ω a velocidade angular relativa do disco:

$$e_b(t) = K_b(t)\Omega(t) \quad (5.6)$$

Para o caso em que o ímã é permanente, ou seja, sua corrente de campo i_f é constante, o controle é feito pela corrente da armadura i . Dessa maneira, consideramos que K_b é constante no tempo. Vale ressaltar que o parâmetro de densidade de fluxo na bobina K_b é obtido pela geometria da bobina, como suas dimensões lineares l e b , e pelo campo magnético B , conforme a Equação 5.7:

$$K_b = lbB \quad (5.7)$$

Assim, adicionando o resultado obtido na Equação 5.6 para a diferença de potencial e_b na lei de Kirchhoff representada pela equação diferencial 5.5, temos:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + K_b \Omega = V(t) \quad (5.8)$$

O torque aplicado pelo motor $T(t)$ é proporcional ao produto da corrente de armadura i_a e da densidade de fluxo $B(t)$. Esta última, por sua vez, é proporcional à corrente de campo i_f , a qual é suposta constante para a hipótese de ímã permanente, de modo que o torque do motor seja descrito como:

$$T(t) = Ki(t) \quad (5.9)$$

Onde K é denominada a constante do motor, a qual depende dos seguintes parâmetros:

$$K = k_a k_f i_f \quad (5.10)$$

Sendo k_a e k_f as constantes de proporcionalidade da densidade de fluxo com a corrente na armadura e no campo, respectivamente, e i_f a corrente no circuito de campo, considerada constante para o estudo do controle pela armadura.

Em conclusão, a modelagem do motor elétrico consiste na Equação 5.8 diferencial, tendo como entrada a tensão da fonte de tensão disposta no sistema elétrico da armadura. O motor elétrico realizará um torque descrito pela Equação 5.9 na roda de inércia ao mesmo tempo que produzirá um torque com a mesma intensidade, mas com sentido contrário, no satélite.

5.3 Modelo rodas de reação

Ao modelo do satélite serão adicionadas duas rodas de reação dispostas nos eixos principais de inércia de maior e de inércia intermediária, correspondentes, respectivamente, às direções x e y adotadas na modelagem da dinâmica do satélite.

Dessa forma, serão realizadas as deduções matemáticas de cada roda de reação individualmente:

- **Roda de reação no eixo X:**

O vetor momento da quantidade de movimento do rotor disposto no eixo x é dado pela seguinte expressão:

$$\vec{H}_x = J(\omega_x + \Omega_x)\hat{i} \quad (5.11)$$

Sendo: J o momento de inércia no eixo x do disco de reação, o qual está disposto no eixo x em relação ao polo fixo; ω_x a componente x do vetor rotação instantânea do satélite; e Ω_x a rotação relativa em torno do eixo x do disco em relação ao satélite.

Derivando a expressão obtida para o momento da quantidade de movimento:

$$\frac{d\vec{H}_x}{dt} = J(\dot{\omega}_x + \dot{\Omega}_x)\hat{i} + J(\omega_x + \Omega_x)\frac{d\hat{i}}{dt} \quad (5.12)$$

Das relações de Poisson:

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i} = -\omega_y\hat{k} + \omega_z\hat{j} \quad (5.13)$$

Substituindo a derivada temporal do versor na Equação 5.12:

$$\frac{d\vec{H}_x}{dt} = J\dot{\omega}_x\hat{i} + J\dot{\Omega}_x\hat{i} - J\omega_x\omega_y\hat{k} + J\omega_x\omega_z\hat{j} - J\Omega_x\omega_y\hat{k} + J\Omega_x\omega_z\hat{j} \quad (5.14)$$

Do teorema do momento da quantidade de movimento, considerando o polo como o ponto fixo, obtém-se que a derivada temporal do momento da quantidade de movimento é igual ao torque externo aplicado no corpo rígido.

No caso, serão considerados três termos para o torque externo: T_x será o torque externo aplicado pelo motor elétrico; T_{xy} corresponde ao torque do satélite aplicado no eixo y ; e T_{xz} corresponde ao torque do satélite aplicado no eixo z .

$$\frac{d\vec{H}_x}{dt} = T^{\text{ext}} = T_x\hat{i} + T_{xy}\hat{j} + T_{xz}\hat{k} \quad (5.15)$$

O termo h_x é o momento da quantidade de movimento do rotor X relativa ao satélite:

$$h_x = J\Omega_x \quad (5.16)$$

Por fim, aplicando o torque dado pela Equação 5.15 na equação da derivada temporal do vetor momento da quantidade de movimento (Equação 5.14), obtém-se o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} J\dot{\omega}_x + \dot{h}_x = T_x \\ J\omega_x\omega_z + h_x\omega_z = T_{xy} \\ -J\omega_x\omega_y - h_x\omega_y = T_{xz} \end{cases} \quad (5.17)$$

• **Roda de reação no eixo Y:**

O vetor momento da quantidade de movimento do rotor disposto no eixo y é dado pela expressão:

$$\vec{H}_y = J(\omega_y + \Omega_y)\hat{j} \quad (5.18)$$

Sendo: J o momento de inércia no eixo y do disco de reação, que é disposto no eixo y em relação ao polo fixo; ω_y a componente y do vetor rotação instantânea do satélite; e Ω_y a rotação relativa em torno do eixo y do disco em relação ao satélite.

Derivando a expressão obtida para o momento da quantidade de movimento:

$$\frac{d\vec{H}_y}{dt} = J(\dot{\omega}_y + \dot{\Omega}_y)\hat{j} + J(\omega_y + \Omega_y)\frac{d\hat{j}}{dt} \quad (5.19)$$

Das relações de Poisson:

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j} = \omega_x\hat{k} - \omega_z\hat{i} \quad (5.20)$$

Substituindo a derivada temporal do versor na Equação 5.19:

$$\frac{d\vec{H}_y}{dt} = J\dot{\omega}_y\hat{j} + J\dot{\Omega}_y\hat{j} + J\omega_x\omega_y\hat{k} - J\omega_y\omega_z\hat{i} + J\Omega_y\omega_x\hat{k} - J\Omega_y\omega_z\hat{i} \quad (5.21)$$

Do teorema do momento da quantidade de movimento, considerando o polo como o ponto fixo, obtém-se que a derivada temporal do momento da quantidade de movimento é igual ao torque externo aplicado no corpo rígido.

Novamente, serão considerados três termos para o torque externo: T_y é o torque externo aplicado pelo motor elétrico; T_{yx} corresponde ao torque do satélite aplicado no eixo x ; e T_{yz} corresponde ao torque do satélite aplicado no eixo z .

$$\frac{d\vec{H}_y}{dt} = T^{\vec{ext}} = T_{yx}\hat{i} + T_y\hat{j} + T_{yz}\hat{k} \quad (5.22)$$

O termo h_y é o momento da quantidade de movimento do rotor Y relativa ao satélite:

$$h_y = J\Omega_y \quad (5.23)$$

Em suma, aplicando o torque da Equação 5.22 na equação da derivada temporal do vetor momento da quantidade de movimento (Equação 5.21), gera-se o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} -J\omega_y\omega_z - h_y\omega_z = T_{yx} \\ J\dot{\omega}_y + \dot{h}_y = T_y \\ J\omega_x\omega_y + h_y\omega_x = T_{yz} \end{cases} \quad (5.24)$$

5.4 Modelo matemático

Obtidos os modelos e equações diferenciais que regem os sistemas de controle do satélite (motor elétrico e rodas de reação), apresenta-se a conexão entre os resultados anteriores e a obtenção do sistema diferencial que rege o comportamento do sistema completo do satélite modelado.

Com base na Equação 5.4 do modelo de satélite, é possível estabelecer os termos contribuintes para o momento externo por meio dos esforços dos motores elétricos e das rodas de reação:

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z = -T_x - T_{yx} \\ I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_x\omega_z = -T_y - T_{xy} \\ I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y = -T_{xz} - T_{yz} \end{cases} \quad (5.25)$$

Substituindo os torques advindos do motor elétrico (Equação 5.9) e os torques provenientes das rodas de reação (Equação 5.17 e Equação 5.24), obtém-se:

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z = -K i_x + J\omega_y\omega_z + h_y\omega_z \\ I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_x\omega_z = -k i_y - J\omega_x\omega_z - h_x\omega_z \\ I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y = J\omega_x\omega_y + h_x\omega_y - J\omega_x\omega_y - h_y\omega_x \end{cases} \quad (5.26)$$

Dessa maneira, manipulando algebricamente o resultado da Equação 5.26 e adicionando as demais equações diferenciais dos circuitos elétricos (Equação 5.8) e das rodas de

reação (Equação 5.17 e Equação 5.24), o resultado obtido é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x \dot{\omega}_x = (I_y + J - I_z) \omega_y \omega_z + h_y \omega_z - K i_x \\ I_y \dot{\omega}_y = (I_z - I_x - J) \omega_x \omega_z - h_x \omega_z - K i_y \\ I_z \dot{\omega}_z = (I_x - I_y) \omega_x \omega_y + h_x \omega_y - h_y \omega_x \\ L \dot{i}_x + R i_x + \frac{K_b}{J} h_x = V_x(t) \\ L \dot{i}_y + R i_y + \frac{K_b}{J} h_y = V_y(t) \\ \dot{h}_x = K i_y - J \omega_x \\ \dot{h}_y = K i_x - J \omega_y \end{array} \right. \quad (5.27)$$

Finalmente, organizando o sistema e isolando os termos diferenciais, o sistema diferencial que rege o conjunto de modelos da situação a ser estudada é disposto na Equação 5.28:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\omega}_x = \frac{I_y + J - I_z}{I_x} \omega_y \omega_z + \frac{1}{I_x} h_y \omega_z - \frac{K}{I_x} i_x \\ \dot{\omega}_y = \frac{I_z - I_x - J}{I_y} \omega_x \omega_z - \frac{1}{I_y} h_x \omega_z - \frac{K}{I_y} i_y \\ \dot{\omega}_z = \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_x \omega_y + \frac{1}{I_z} h_x \omega_y - \frac{1}{I_z} h_y \omega_x \\ \dot{i}_x = -\frac{R}{L} i_x - \frac{K_b}{JL} h_x + \frac{1}{L} V_x(t) \\ \dot{i}_y = -\frac{R}{L} i_y - \frac{K_b}{JL} h_y + \frac{1}{L} V_y(t) \\ \dot{h}_x = -\frac{J(I_x + J - I_z)}{I_x} \omega_y \omega_z - \frac{J}{I_x} h_y \omega_z + \frac{K(I_x + J)}{I_x} i_x \\ \dot{h}_y = -\frac{J(I_z - I_x - J)}{I_y} \omega_x \omega_z + \frac{J}{I_y} h_x \omega_z + \frac{K(I_y + J)}{I_y} i_y \end{array} \right. \quad (5.28)$$

Ressalta-se que o modelo matemático obtido para o satélite e as rodas de reação são compatíveis com os modelos utilizados na literatura sobre controle de satélites por duas rodas de reação (KIM; KIM, 2001).

5.5 Linearização

O sistema de equações diferenciais apresentado no modelo matemático é um sistema não linear. Para linearizar o sistema de equações diferenciais, é preciso escolher um ponto de operação em que se espera que as variáveis do sistema assumam valores próximos aos do ponto de operação escolhido. Esse ponto de operação será representado pelo símbolo *.

Uma vez que os termos i_x , i_y , V_x e V_y são lineares em todas as equações, não é necessário escolher pontos de operação para eles. Para as outras variáveis, a linearização ocorrerá em torno das constantes ω_x^* , ω_y^* , ω_z^* , h_x^* e h_y^* . Como a modelagem do satélite é voltada para mantê-lo rotacionando em torno do seu eixo de menor inércia apenas, admite-se que ω_x^* e ω_y^* são nulos e generaliza-se ω_z^* como ω^* . Dessa forma, a seguinte

mudança de variáveis é feita:

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega_x & x_2 &= \omega_y & x_3 &= \omega_z & x_4 &= i_x & x_5 &= i_y \\ x_6 &= h_x - h_x^* & x_7 &= h_y - h_y^* & u_1 &= V_x & u_2 &= V_y \end{aligned}$$

Em seguida, o método indicado pela Equação 5.29 é aplicado. O símbolo f' indica a linearização de f :

$$\dot{x}_i' = \dot{x}_i^* + \sum_{j=1}^7 \left. \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \right|_* x_j + \sum_{j=1}^2 \left. \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial u_j} \right|_* u_j \quad (5.29)$$

Aplicando o procedimento acima para cada uma das equações do sistema 5.28, obtém-se o sistema 5.30. Note que as equações diferenciais envolvendo o circuito elétrico já são lineares e, dessa forma, não precisam ser linearizadas. Em outras palavras, qualquer sejam os valores de i_x^* , i_y^* , V_x^* e V_y^* adotados, a linearização será a mesma.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{(I_y - I_z + J)\omega^*}{I_x} x_2 + \frac{h_y^*}{I_x} x_3 - \frac{K}{I_x} x_4 + \frac{\omega^*}{I_x} x_7 \\ \dot{x}_2 = \frac{(I_z - I_x - J)\omega^*}{I_y} x_1 - \frac{h_x^*}{I_y} x_3 - \frac{K}{I_y} x_5 - \frac{\omega^*}{I_y} x_6 \\ \dot{x}_3 = -\frac{h_y^*}{I_z} x_1 + \frac{h_x^*}{I_z} x_2 \\ \dot{x}_4 = -\frac{R}{L} x_4 - \frac{K_b}{JL} x_6 + \frac{1}{L} u_1 \\ \dot{x}_5 = -\frac{R}{L} x_5 - \frac{K_b}{JL} x_7 + \frac{1}{L} u_2 \\ \dot{x}_6 = \frac{(I_z - I_x - J)J\omega^*}{I_x} x_2 - \frac{Jh_y^*}{I_x} x_3 + \frac{(I_x + J)K}{I_x} x_4 - \frac{J\omega^*}{I_x} x_7 \\ \dot{x}_7 = \frac{(I_x - I_z + J)J\omega^*}{I_y} x_1 + \frac{Jh_x^*}{I_y} x_3 + \frac{(I_y + J)K}{I_y} x_5 + \frac{J\omega^*}{I_y} x_6 \end{cases} \quad (5.30)$$

É relevante notar que, além dos parâmetros físicos, as equações do sistema 5.30 envolvem as constantes ω^* , h_x^* e h_y^* . Dessa forma, linearizações em torno de diferentes pontos resultam equações diferenciais diferentes, assim como esperado. Em adição, o sistema só é válido enquanto cada uma das variáveis está próxima de seu ponto de linearização. As variáveis x_1 , x_2 , x_6 e x_7 precisam ser aproximadamente nulas e x_3 precisa estar em torno de ω^* . Se, em algum instante, alguma dessas variáveis deixarem de assumir tais valores, o sistema linear perde significado físico e deixa de ser aplicável.

O sistema de equações diferenciais 5.30 também pode ser expresso na forma

matricial como $\dot{x} = Ax + Bu$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & 0 & 0 & \eta_1 \\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2 & 0 & \epsilon_2 & \zeta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 & \zeta_4 & 0 \\ 0 & \beta_5 & 0 & 0 & \epsilon_5 & 0 & \eta_5 \\ 0 & \beta_6 & \gamma_6 & \delta_6 & 0 & \zeta_6 & 0 \\ \alpha_7 & 0 & \gamma_7 & 0 & \epsilon_7 & 0 & \eta_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a & 0 \\ 0 & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Onde constantes auxiliares foram adicionadas para facilitar a leitura da matriz:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{I_y - I_z + J}{I_x} \omega^* & \gamma_1 &= \frac{h_y^*}{I_x} & \delta_1 &= -\frac{K}{I_x} & \eta_1 &= \frac{\omega^*}{I_x} \\ \alpha_2 &= \frac{I_z - I_x - J}{I_y} \omega^* & \gamma_2 &= -\frac{h_x^*}{I_y} & \epsilon_2 &= -\frac{K}{I_y} & \zeta_2 &= -\frac{\omega^*}{I_y} \\ \alpha_3 &= -\frac{h_y^*}{I_z} & \beta_3 &= \frac{h_x^*}{I_z} & \alpha_4 &= \frac{K_b}{L} & \delta_4 &= -\frac{R}{L} \\ \zeta_4 &= -\frac{K_b}{L} & \beta_5 &= \frac{K_b}{L} & \epsilon_5 &= -\frac{R}{L} & \eta_5 &= -\frac{K_b}{L} \\ \beta_6 &= \frac{(I_z - I_x - J)J}{I_x} \omega^* & \gamma_6 &= -\frac{Jh_y^*}{I_x} & \delta_6 &= \frac{(I_x + J)K}{I_x} & \zeta_6 &= -\frac{J\omega^*}{I_x} \\ \alpha_7 &= \frac{(I_x - I_z + J)J}{I_y} \omega^* & \gamma_7 &= \frac{Jh_x^*}{I_y} & \epsilon_7 &= \frac{(I_y + J)K}{I_y} & \eta_7 &= \frac{J\omega^*}{I_y} \\ a &= \frac{1}{L} \end{aligned}$$

Uma vez que as variáveis precisam assumir, em todos os momentos, valores próximos de seu ponto de linearização, é esperado que a linearização do sistema não seja capaz de retratar o sistema de forma fiel em certas circunstâncias. Por exemplo, no caso em que se deseja simular o acionamento do motor elétrico, é intuitivo que os rotores de cada motor irão partir de uma situação de repouso até uma rotação angular estável em relação ao satélite. Devido a essa mudança significativa de h_x e h_y , é impossível escolher constantes h_x^* e h_y^* de forma que x_6 e x_7 sejam aproximadamente nulos durante a simulação.

Uma maneira de entender quando a linearização é válida é interpretar o ponto de operação $*$ como um ponto de equilíbrio: a simulação se inicia com todas as variáveis tendo valores próximos aos pontos de equilíbrio e devem permanecer próximas a esses valores. Isso implica que as derivadas temporais de cada variável devem ser nulas. Note que, pela própria caracterização de um estado de equilíbrio, as entradas u_1 e u_2 são consideradas

como sendo constantes. Forçando essa relação no sistema de equações 5.27, obtém-se:

$$\begin{cases} (I_y + J - I_z)\omega_y^*\omega_z^* + h_y\omega^* - Ki_x = 0 \\ (I_z - I_x - J)\omega_x^*\omega_z^* - h_x\omega^* - Ki_y = 0 \\ (I_x - I_y)\omega_x^*\omega_y^* + h_x\omega_y^* - h_y\omega_x^* = 0 \\ \frac{K_b}{J}h_x^* = V_x \\ \frac{K_b}{J}h_y^* = V_y \\ i_y^* = 0 \\ i_x^* = 0 \end{cases} \quad (5.32)$$

A solução das quatro últimas equações é trivial. Entretanto, as três primeiras precisam de atenção especial. Uma vez que o objeto de estudo é a rotação do satélite em torno do eixo z , ω_x^* e ω_y^* são ambos nulos. Isso implica que a velocidade angular ω^* precisa ser nula para satisfazer o equilíbrio. Assim:

$$\begin{cases} \omega^* = 0 \\ \omega_x^* = 0 \\ \omega_y^* = 0 \\ h_x^* = \frac{JV_x}{K_b} \\ h_y^* = \frac{JV_y}{K_b} \\ i_x^* = 0 \\ i_y^* = 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

Destaca-se que a rotação em torno do eixo z não pode ser um valor genérico durante o equilíbrio do sistema, diferentemente do caso em que o satélite rotaciona livremente.

Isso posto, a linearização pode ser aplicada em situações próximas ao equilíbrio do sistema, explicitados nas expressões 5.33. Quanto mais distantes forem os pontos de linearização dos valores de equilíbrio, mais rápido as variáveis irão se afastar do ponto de linearização e mais rápido a Equação 5.31 deixará de ser válida. Assim, linearizações feitas em torno de pontos distantes do equilíbrio devem simular apenas um curto período, de forma que as variáveis permaneçam próximas aos valores de linearização e que o sistema da Equação 5.31 ainda seja aplicável.

O sistema de equações diferenciais 5.31 é um sistema na forma $\dot{x} = Ax + Bu$, onde x é o vetor que contém todas as variáveis do problema. Entretanto, apenas as velocidades angulares do satélite em torno de cada um dos seus eixos principais são relevantes para a

resposta cinemática do satélite. Assim, o vetor de saída do sistema pode ser escrito como:

$$y = Cx + Du \iff \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Onde y_1 , y_2 e y_3 correspondem respectivamente a ω_x , ω_y e ω_z e a matriz D é nula. Assim, o sistema linear está definido pelas Equações 5.31 e 5.34.

5.6 Materiais

A fim de gerar uma análise mais detalhada sobre o modelo do sistema satélite e rodas de reação, valores numéricos são estimados nesta seção com base em exemplos reais. A exemplo, os momentos de inércia do satélite e rodas de reação são calculados a partir de um satélite de imageamento sino-brasileiro em órbita atualmente. Além disso, os motores elétricos também são melhor definidos para a aplicação no sistema, de modo a tornar a análise do modelo proposto próxima da realidade.

5.6.1 Satélite modelado: CBERS 4

O satélite artificial CBERS 4 é o último fruto da parceria entre Brasil e China e foi lançado em 7 de dezembro de 2012, permanecendo ativo até o presente momento. Sua principal aplicação é a observação detalhada da vegetação, com a identificação de florestas, parques e áreas de queimadas, da agricultura, com a identificação dos campos agrícolas e das frentes de expansão, da hidrografia, o que permite ver a diferença em cursos de rios e do limite de represas, e o CBERS 4 também permite a criação de mapas detalhadas. Para o estudo do modelo em questão, serão utilizados os dados do satélite sino-brasileiro. A Figura 2 apresenta uma foto do satélite com seu painel solar aberto:

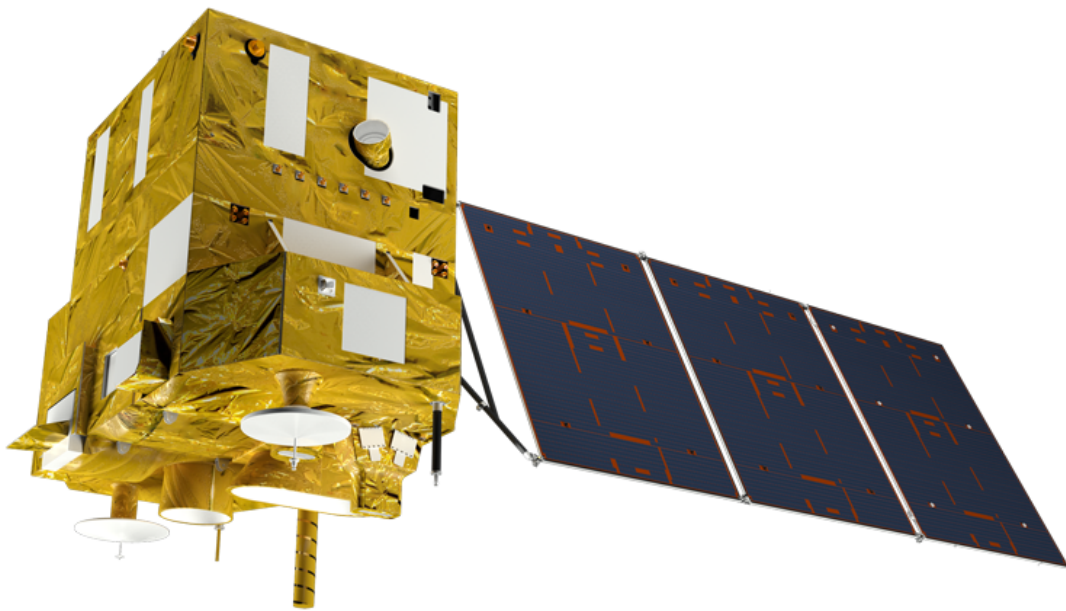


Figura 2 – Imagem do satélite CBERS 4 com painel solar aberto [INPE, 2020]

Na Tabela 1 estão algumas características importantes do satélite em questão.

Característica	Dados	Unidade
Massa total	2080	kg
Potência Gerada	2300	W
Dimensões do corpo	$1,8 \times 2,0 \times 2,5$	m
Dimensão do painel solar	$6,3 \times 2,6$	m
Altitude	778	km
Revoluções por dia	14,34	-
Período orbital	100,26	minutos

Tabela 1 – Características do satélite CBERS 4.

5.6.2 Roda de reação

A fim de estabilizar a rotação de um satélite no espaço, diferentes meios podem ser empregados para gerar torque nos eixos e balancear o veículo, como propulsores a gases frios, *magnetorquers*, rodas de torque, entre outros. Entretanto, como o ambiente espacial é de difícil acesso para manutenção, a utilização da energia elétrica, abundante graças à radiação solar, em detrimento da energia química, presente de maneira escassa em combustíveis embarcados, desperta o interesse por dispositivos de controle de atitude que a utilizem.

Desta maneira, empregam-se rodas de reação ou rodas de torque, dispositivos de controle para veículos espaciais baseados na energia elétrica e na inércia dos corpos. Composto por um motor elétrico de corrente contínua e uma massa de inércia, comumente

utilizada na forma de um disco, a roda de reação opera segundo a terceira lei de Newton, o princípio da ação e reação.

Conforme o esquema da Figura 3, um motor elétrico de corrente contínua (C.C.) transfere um torque \vec{T} na direção do eixo de rotação de Ω para a massa de inércia M em formato de disco. Como a base do motor está engastada dentro da estrutura do satélite, há um equilíbrio de momentos entre a roda de reação e o satélite, de modo que, por ação e reação, um torque $-\vec{T}$ seja aplicado ao veículo no sentido contrário, indicado pelo sinal negativo.

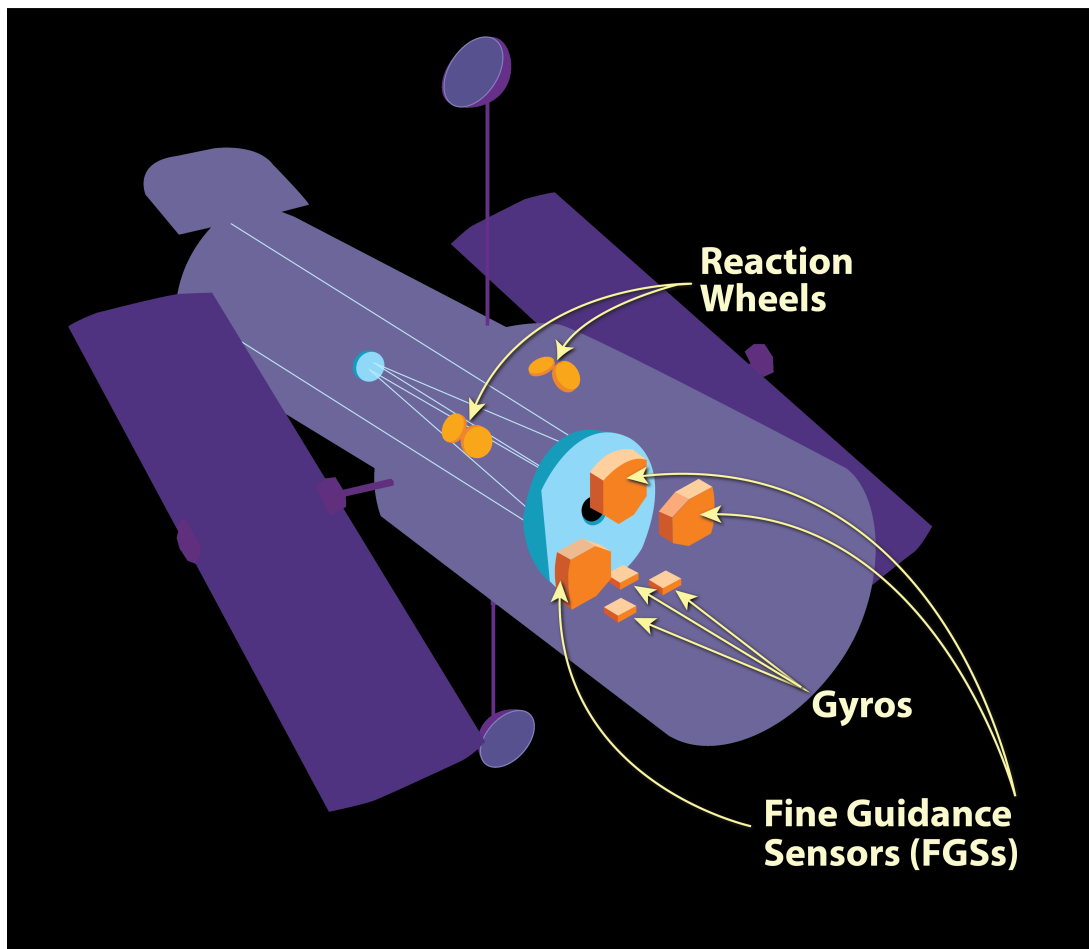


Figura 3 – Esquema de funcionamento de uma roda de reação dentro de um satélite [NASA, 2020]

5.6.3 Motor elétrico C.C.

Neste dispositivo, emprega-se um motor elétrico de corrente contínua por diferentes motivos. O motor elétrico C.C. é amplamente utilizado em aplicações de controle, já que a velocidade Ω do rotor é controlada pela tensão de entrada do sistema, diferentemente de motores de corrente alternada (C.A.) que demandam instrumentos adicionais para variar a frequência da tensão e, conseqüentemente, a tensão e velocidade de operação.

Além da facilidade de controle, o motor elétrico C.C apresenta maior confiabilidade, robustez, resistência a oscilações e baixa manutenção, características fundamentais para missões espaciais de longa duração, na qual o conserto de satélites é raro ou inexistente pelos custos da operação. O esquema da Figura 4 exemplifica a estrutura desse atuador, destacando-se a massa de inércia (*inertia load*) na ponta do eixo girante, a qual é acionada pela variação de campo magnético na base do motor.

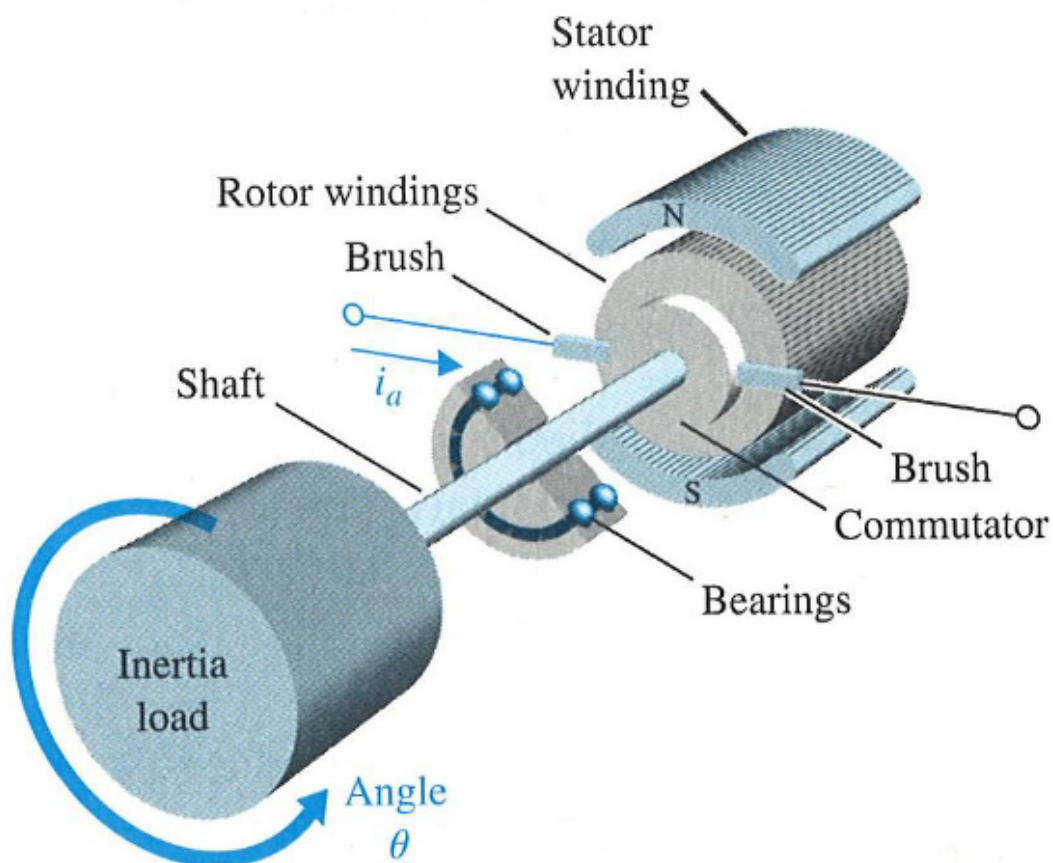


Figura 4 – Esquema de funcionamento do motor elétrico a corrente contínua [PME3380, 2020]

5.6.4 CAD e momentos de inércia

Dentre os parâmetros utilizados pelo modelo, destacam-se os momentos de inércia dos corpos envolvidos, tanto do satélite modelado, quanto das duas rodas de reação para controle de atitude. Devida à geometria complexa da estrutura dos objetos, modelos computacionais 3D do satélite CBERS 4 e das rodas de reação foram gerados por meio das características e dimensões do veículo apresentadas na Tabela 1. A Figura 5 apresenta a vista isométrica do satélite no *software Autodesk Fusion 360*:

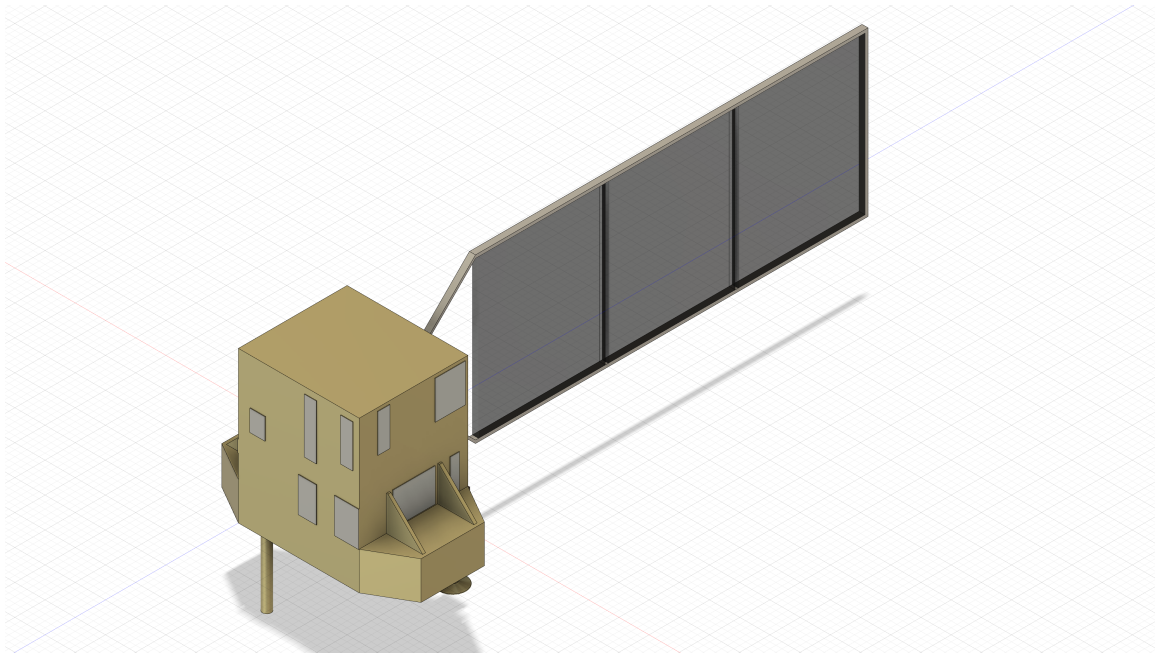


Figura 5 – Modelo 3D do satélite CBERS 4 - Autodesk Fusion 360 [Autores, 2020]

As dimensões das rodas de reação não apresentaram fontes por se tratar de uma tecnologia estratégica do governo chinês, parceira e fornecedora da tecnologia para o satélite sino-brasileiro, porém seus valores foram dimensionados em acordo com a estrutura interna do CBERS 4. Além disso, estas são posicionadas internamente no satélite nos eixos de atuação x e y por meio de um *assembly* (montagem) dentro do *software* de CAD *Autodesk Fusion 360*. A Figura 6 apresenta a vista isométrica em corte da montagem das rodas de reação na estrutura:

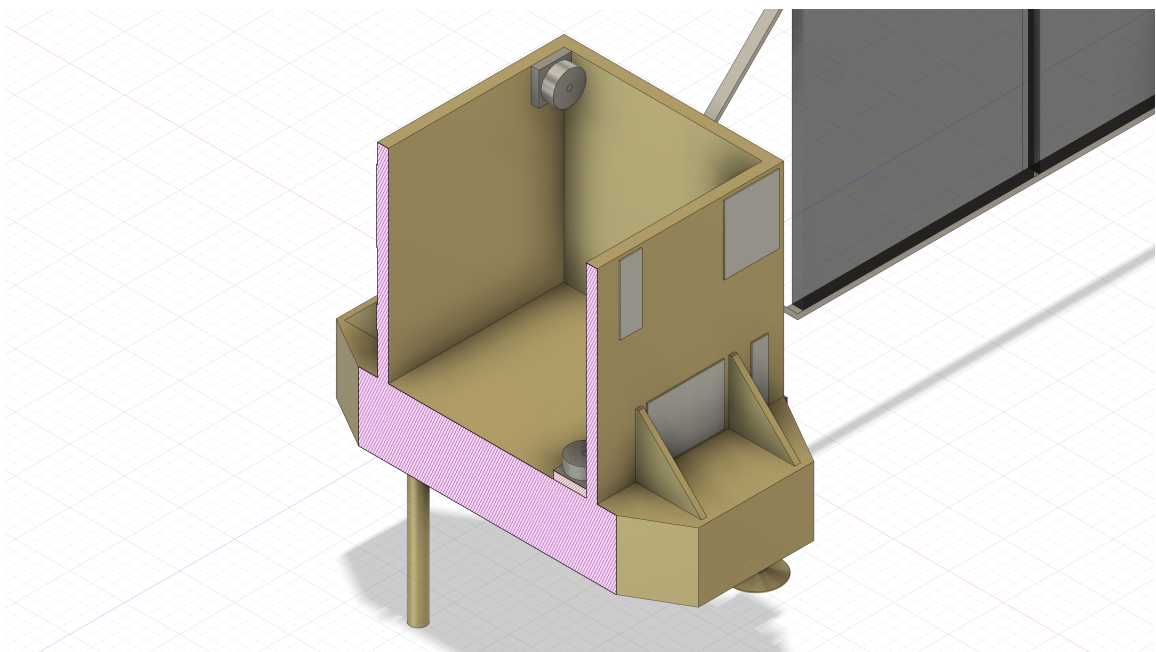


Figura 6 – Modelo 3D do satélite CBERS 4 com duas rodas de reação posicionadas internamente - Autodesk Fusion 360 [Autores, 2020]

Com base nos modelos computacionais 3D dos objetos, retiraram-se os momentos de inércia do satélite completo (I_x , I_y e I_z) no sistema de coordenadas do veículo e apenas do conjunto eixo e disco (J) no sistema de coordenadas da roda de reação. Os valores obtidos no CAD são relativos a eixos arbitrários x, y e z do modelo, de modo que se faz necessário aplicar uma diagonalização das matrizes de inércia para obtenção dos momentos principais de inércia, dispostos na Tabela 2:

Momentos principais de inércia [kgm^2]			
	Satélite	Roda de reação (eixo x)	Roda de reação (eixo y)
I_x	9840,05	0,70	0,43
I_y	9558,05	0,43	0,70
I_z	2520,89	0,43	0,43

Tabela 2 – Momentos principais de inércia do satélite e dos conjuntos eixo disco das rodas de reação

6 Resultados

Para a validação do modelo linear desenvolvido na seção 5.5, é de interesse que a solução deste seja comparada com a solução do sistema não linear 5.28.

Dessa maneira, para resolver o sistema de equações não lineares 5.28, escreveu-se um código no *software Open-Source Scilab*, anexado no apêndice A. Como o sistema de equações é de difícil resolução analítica, foi utilizada a função embutida no código base do *Scilab ode*, que utiliza por padrão o método de Adams para a resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Ainda assim, são necessárias sete condições de contorno para solução numérica do sistema, de modo que o vetor de condições iniciais é dado por:

$$x_0 = [\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0}, i_{x0}, i_{y0}, h_{x0}, h_{y0}]^T \quad (6.1)$$

6.1 Resultado das simulações

Para a análise do comportamento do sistema sob diferentes condições, optou-se por variar principalmente ω_{x0} , ω_{y0} e ω_{z0} . Esses valores serão pequenas perturbações em torno do equilíbrio, de forma a ser possível comparar com a solução linear, que deixa de ser válida para outros valores. Como descrito na seção 5.5, a solução da linearização é mais próxima para valores aproximadamente iguais aos dados na Equação 5.33, explicando a variação dos parâmetros iniciais em torno deste princípio. As entradas i_{x0} , i_{y0} , h_{x0} e h_{y0} são dadas pelas constantes de equilíbrio, sem nenhuma perturbação, assim como descrito na Equação 5.33:

$$h_{x0} = \frac{JV_x}{K_b} \quad h_{y0} = \frac{JV_y}{K_b} \quad (6.2)$$

$$i_{x0} = 0 \quad i_{y0} = 0 \quad (6.3)$$

Os demais parâmetros de simulação foram aproximados baseados no manual (*datasheet*) de motores de corrente contínua da fabricante *Hansen Corporation* (HANSEN, 2020), com exceção do momento de inércia J , baseado no modelo de roda de reação exposto na subseção 5.6.2. A diferença de potencial V é um parâmetro que pode ser variado, mas isso será melhor estudado na seção 6.2.

K [Nm/A]	K_b [Vs/rad]	R [Ω]	L [H]	J [kgm ²]	V [V]
10	0,001	4,0	0,001	0,7	12 V

Tabela 3 – Parâmetros numéricos de simulação.

Estabelecidos e substituídos os parâmetros do modelo, é possível reescrever o sistema 5.31 em torno do equilíbrio estabelecido nas equações 5.33:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,87 & -1,0 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,88 & 0 & -1,0 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ -3,2 & 3,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \cdot 10^3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \cdot 10^3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -0,61 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,61 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 10^3 & 0 \\ 0 & 10^3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Seguindo o procedimento indicado na seção 4.3, o polinômio característico $P(s)$ de A pode ser encontrado e escrito como:

$$P(s) = s^7 + 8 \cdot 10^3 \cdot s^6 + 1,6 \cdot 10^7 \cdot s^5 + 1,3 \cdot 10^5 \cdot s^4 + 9 \cdot 10^7 \cdot s^3 + 4,5 \cdot 10^5 \cdot s^2 + 563s \quad (6.5)$$

Em seguida, a função de transferência $G(s)$ do sistema 6.4 pode ser calculada. A partir dela, soluções analíticas ou mesmo numéricas podem ser feitas. Entretanto, nesse relatório, optou-se por solucionar o sistema linear pelo domínio do tempo, sem o auxílio da função de transferência.

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$G_{11}(s) = \frac{-1,03s^5 - 4,13 \cdot 10^3 s^4 - 13,3s^3 - 1,17 \cdot 10^4 s^2 - 29,2s}{P(s)}$$

$$G_{12}(s) = \frac{-2,92s^3 - 1,17 \cdot 10^4 s^2 - 29,2s}{P(s)}$$

$$G_{21}(s) = \frac{-2,92s^3 - 1,17 \cdot 10^4 s^2 - 29,2s}{P(s)}$$

$$G_{22}(s) = \frac{-1,04s^5 - 4,17 \cdot 10^3 s^4 - 13,3s^3 - 1,17 \cdot 10^4 s^2 - 29,2s}{P(s)}$$

$$G_{31}(s) = \frac{3,34s^4 + 1,33 \cdot 10^4 s^3 + 33,4s^2}{P(s)}$$

$$G_{32}(s) = \frac{-3,36s^4 - 1,35 \cdot 10^4 s^3 - 33,7s^2}{P(s)}$$

Para analisar as funções de transferência acima, é possível utilizar o diagrama de Bode. Partindo dos sistemas 6.4 e 5.34, os seguintes diagramas são obtidos através do software *Maple 18*:

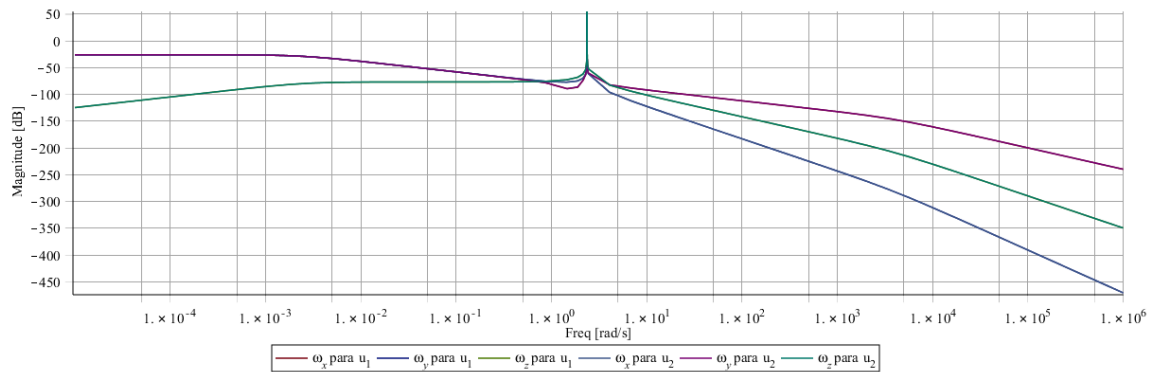


Figura 7 – Diagrama de Bode - magnitude [AUTORES, 2020]

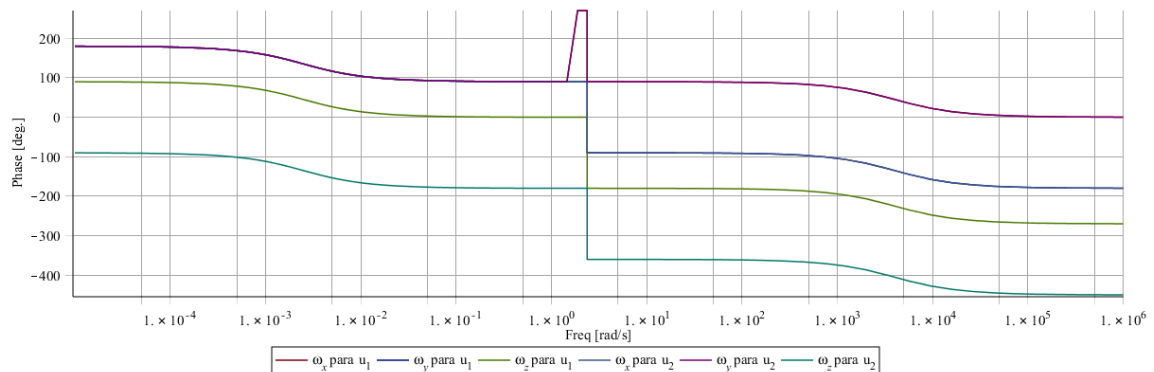


Figura 8 – Diagrama de Bode - fase [AUTORES, 2020]

Em primeiro lugar, nota-se que as entradas u_1 e u_2 geram respostas muito similares para cada uma das variáveis analisadas, de tal maneira que os gráficos de cada uma das entradas se sobrepõe. Em segundo lugar, percebe-se pelo diagrama da magnitude (Figura 7) que o ganho de cada uma das variáveis reduz para as frequências elevadas. Com frequências ao infinito, tem-se que o ganho é maior para ω_x e menor para ω_y . Ainda, observa-se a existência de pico no ganho para uma frequência de aproximadamente 3,3 rad/s, igual para todas as variáveis.

Para a análise do diagrama de fase (Figura 8), percebe-se que há descontinuidade na frequência de ressonância. Ainda, cada variável estabiliza-se em valores diferentes para frequências altas e baixas e há diferença entre o comportamento das fases de ω_z para a entrada u_1 e u_2 .

É importante ressaltar que essa análise é feita para interpretar a função de transferência obtida. Uma vez que o motor utilizado é de corrente contínua, a entrada do sistema não é senoidal e, dessa forma, o diagrama de Bode não é diretamente aplicável ao sistema.

6.1.1 Primeiro conjunto de condições iniciais: $\omega_{x0} = \omega_{y0}$

Adotou-se como valor padrão das rotações instantâneas 0,1 rad/s, e obteve-se o seguinte vetor das condições iniciais, conforme padronizado na Equação 6.1:

$$x_0 = [0, 1 ; 0, 1 ; 0, 1 ; 0 ; 0 ; 8400 ; 8400]^T \quad (6.7)$$

Com o código presente no apêndice A, obtiveram-se os resultados gráficos das figuras 9 a 12. Foram plotados os gráficos da rotação instantânea em X, Y e Z, as correntes elétricas dos motores dispostos em X e Y e os momentos da quantidade de movimento em X e Y:

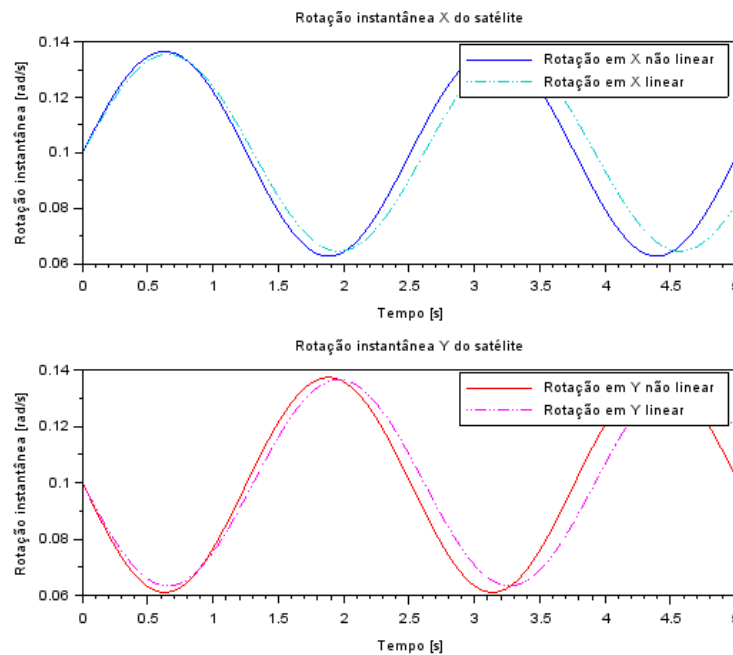


Figura 9 – Rotações instantâneas em X e Y para $\omega_{x0} = \omega_{y0}$ [AUTORES, 2020]

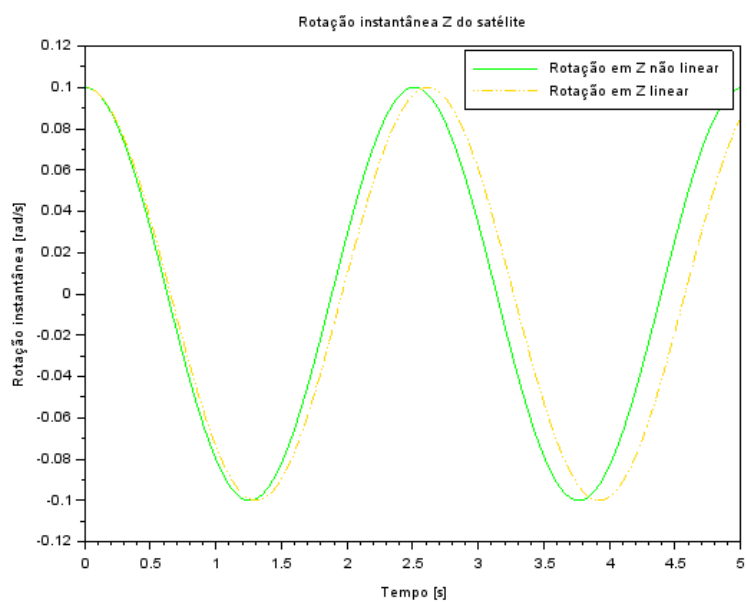


Figura 10 – Rotação instantânea em Z para $\omega_{x0} = \omega_{y0}$ [AUTORES, 2020]

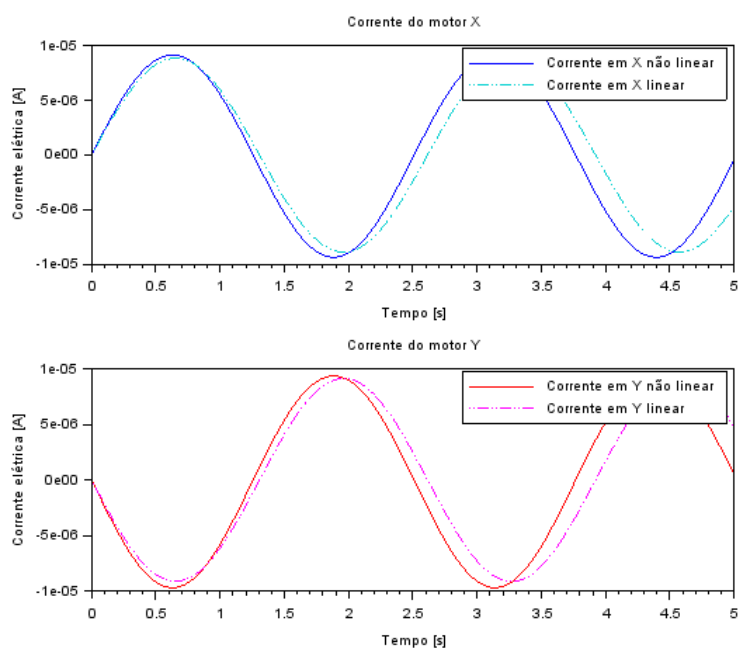


Figura 11 – Correntes elétricas em X e Y para $\omega_{x0} = \omega_{y0}$ [AUTORES, 2020]

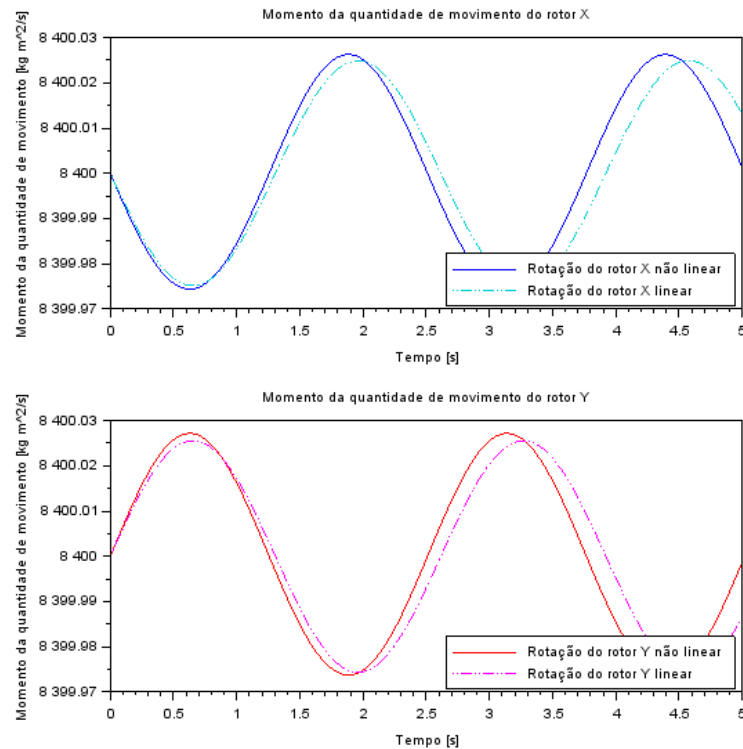


Figura 12 – Momentos da quantidade de movimento em X e Y para $\omega_{x0} = \omega_{y0}$ [AUTORES, 2020]

É perceptível que o comportamento do sistema real é bem próximo do modelo linearizado no intervalo analisado. Além disso, pela Figura 9, percebe-se que a amplitude da velocidade do movimento é em torno de 0,08 rad/s. Da Figura 10, observa-se que, além de uma proximidade com o sistema linear, a velocidade angular inicia-se em 0,1 rad/s, que era a condição inicial, e oscila até $-0,1$ rad/s. As correntes elétricas apresentam pequenas oscilações periódicas, em fase com os gráficos da rotação instantânea. Por fim, os momentos da quantidade de movimento apresentam pequenas variações em relação a condição inicial e estão defasados em 90 graus dos gráficos da rotação instantânea. No tempo de simulação de 5 segundos, foram observados pouco mais de 2,5 períodos.

Na Figura 13, serão exibidas duas soluções simultâneas: uma correspondente ao cenário observado de atuação do motor; e outra sem a atuação desse em 100 segundos de simulação. O objetivo da análise é investigar a influência que a atuação do motor causou no movimento que o satélite naturalmente executaria:

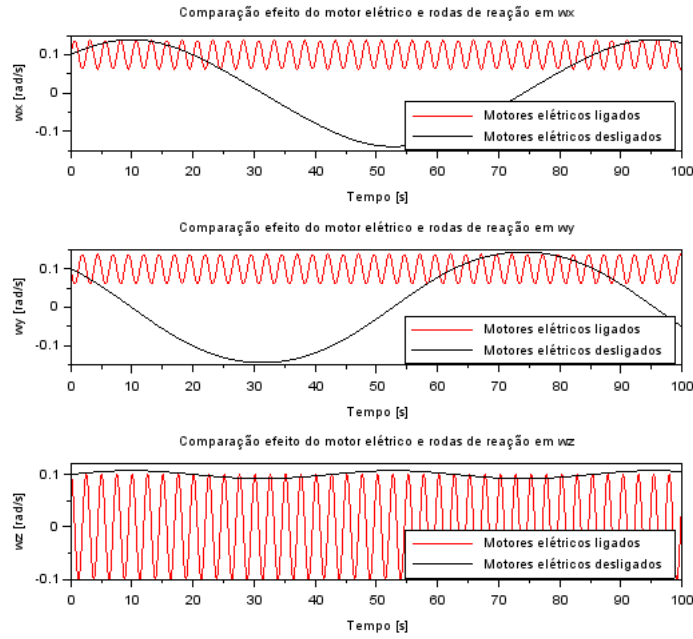


Figura 13 – Comparação de efeito do motor para $\omega_{x0} = \omega_{y0}$ [AUTORES, 2020]

Note que, nesse caso, o motor influenciou positivamente na estabilidade do satélite, uma vez que a amplitude das rotações instantâneas nos eixos x e y foram reduzidas em relação ao caso de não atuação do motor, de tal forma que a rotação em torno dos eixos observados são oscilações com período e amplitude reduzidas ao redor da condição inicial estabelecida.

6.1.2 Segundo conjunto de condições iniciais: $\omega_{y0} = 4\omega_{x0}$

Novamente, foi-se adotado como valor padrão dos valores de rotação 0,1 rad/s, logo o vetor das condições iniciais é:

$$x_0 = \begin{bmatrix} \omega_{x0} \\ \omega_{y0} \\ \omega_{z0} \\ i_{x0} \\ i_{y0} \\ h_{x0} \\ h_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,4 \\ 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 8400 \\ 8400 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Logo, os resultados estão abaixo:

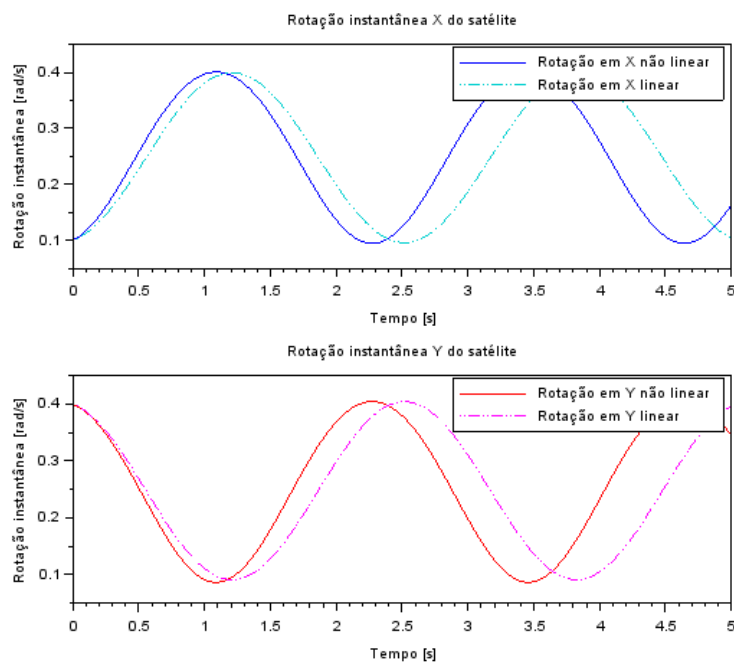


Figura 14 – Rotações instantâneas em X e Y para $\omega_{y0} = 4\omega_{x0}$ [AUTORES, 2020]

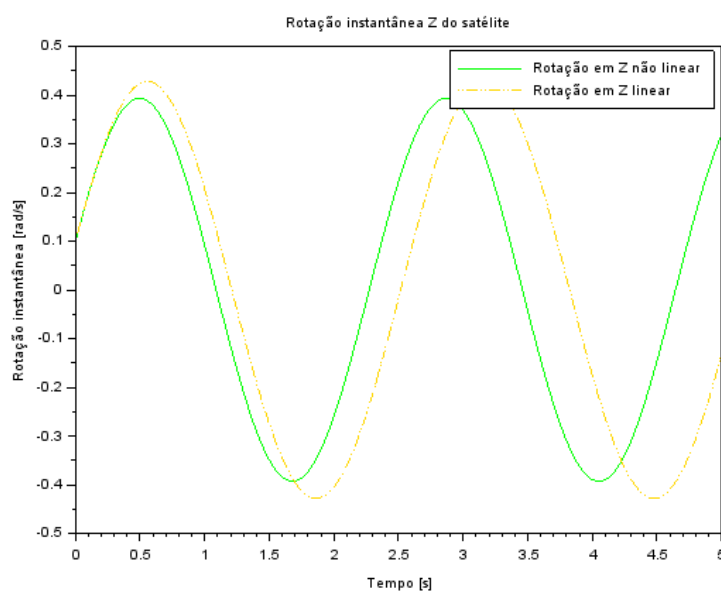


Figura 15 – Rotação instantânea em Z para $\omega_{y0} = 4\omega_{x0}$ [AUTORES, 2020]

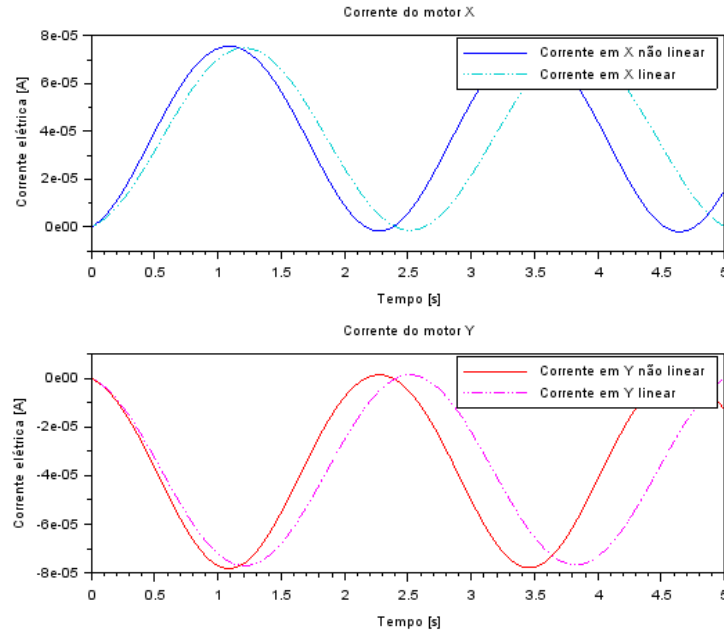


Figura 16 – Correntes elétricas em X e Y para $\omega_{y0} = 4\omega_{x0}$ [AUTORES, 2020]

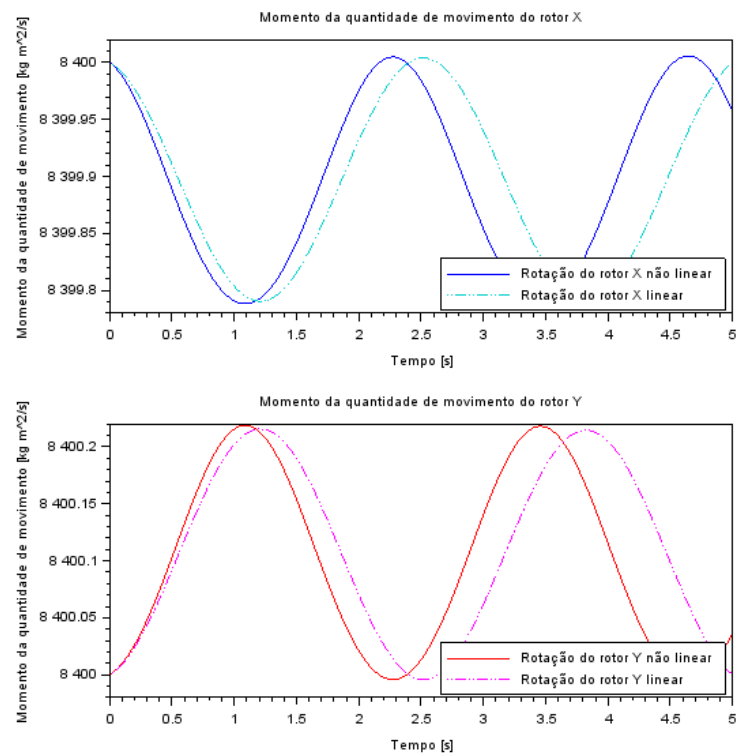


Figura 17 – Momentos da quantidade de movimento em X e Y para $\omega_{y0} = 4\omega_{x0}$ [AUTORES, 2020]

Novamente, os resultados obtidos são próximos do sistema linearizado, entretanto não tão próximos quanto do primeiro grupo de condições iniciais, o que era esperado, uma vez que a velocidade angular $\omega_{y0} = 0,4 \text{ rad/s}$, o que distancia as condições mais do caso de equilíbrio descrito nas equações 5.33. As variações das rotações mostradas em 14 ocorre

entre as duas condições iniciais de rotação em X e Y, ou seja 0,1 rad/s e 0,4 rad/s. No gráfico 15 da rotação em Z, percebe-se que ela se inicia em 0,1 rad/s, que corresponde ao seu estado inicial, mas varia entre 0,4 rad/s e - 0,4 rad/s. Para os gráficos das correntes e dos momentos da quantidade de movimento ocorre como no caso anterior de condições iniciais. São observados dessa vez, apenas 2 períodos de oscilação.

Analisando o efeito do motor elétrico em relação a movimentação natural do satélite em 100 segundos de simulação:

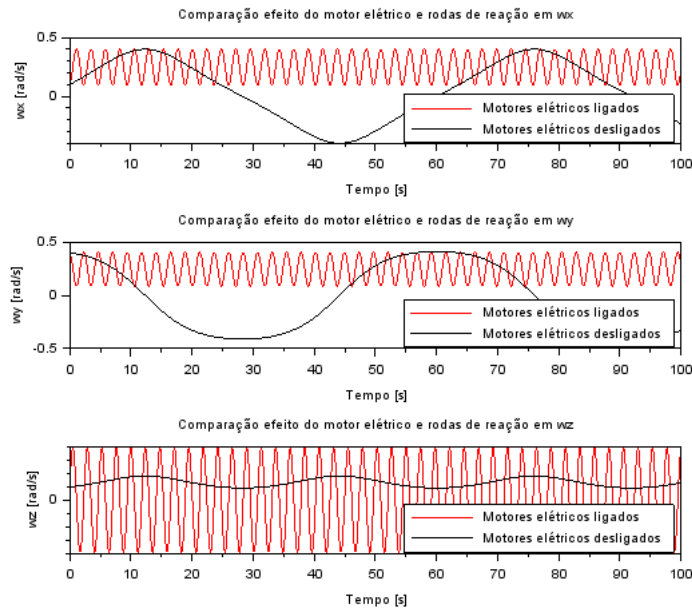


Figura 18 – Comparação de efeito do motor para $\omega_{y0} = 4\omega_{x0}$ [AUTORES, 2020]

Vale ressaltar, que de forma semelhante ao caso anterior a aplicação do motor elétrico e das rodas reativas tiveram um impacto positivo na dinâmica do satélite, uma vez que a amplitude de oscilação das componentes X e Y do vetor rotação instantânea foi reduzida.

6.1.3 Terceiro conjunto de condições iniciais: $\omega_{x0} = 4\omega_{y0}$

O vetor das condições iniciais é:

$$\begin{bmatrix} \omega_{x0} \\ \omega_{y0} \\ \omega_{z0} \\ i_{x0} \\ i_{y0} \\ h_{x0} \\ h_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 8400 \\ 8400 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Consequentemente, os resultados obtidos através da simulação do código são os seguintes gráficos.

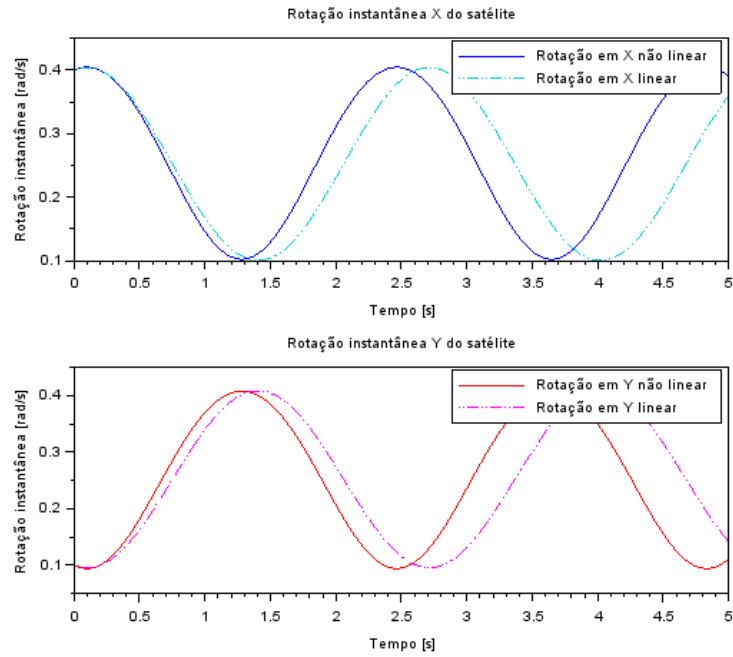


Figura 19 – Rotações instantâneas em X e Y para $\omega_{x0} = 4\omega_{y0}$.

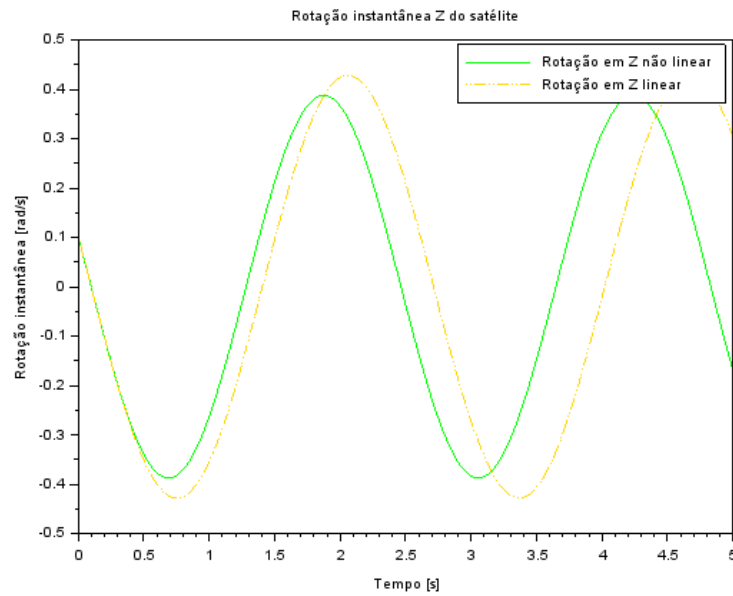


Figura 20 – Rotação instantânea em Z para $\omega_{x0} = 4\omega_{y0}$.

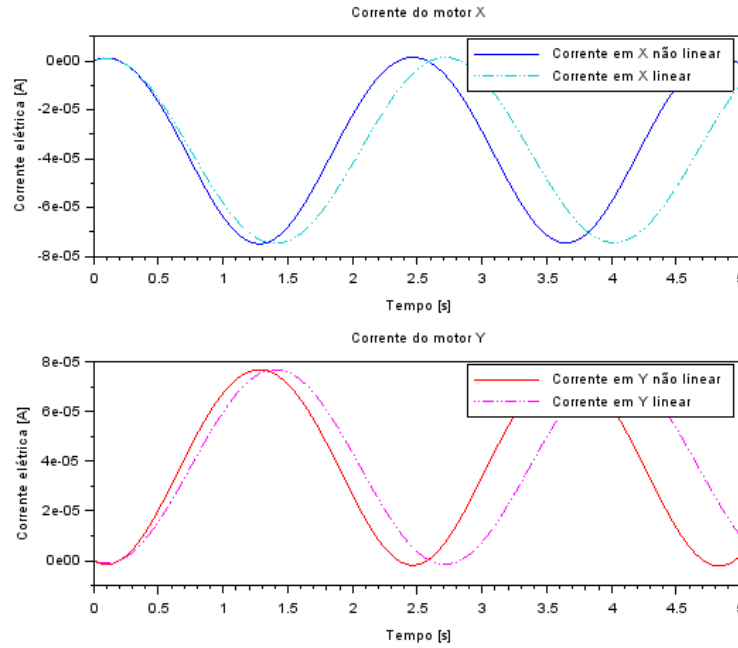


Figura 21 – Correntes elétricas em X e Y para $\omega_{x0} = 4\omega_{y0}$.

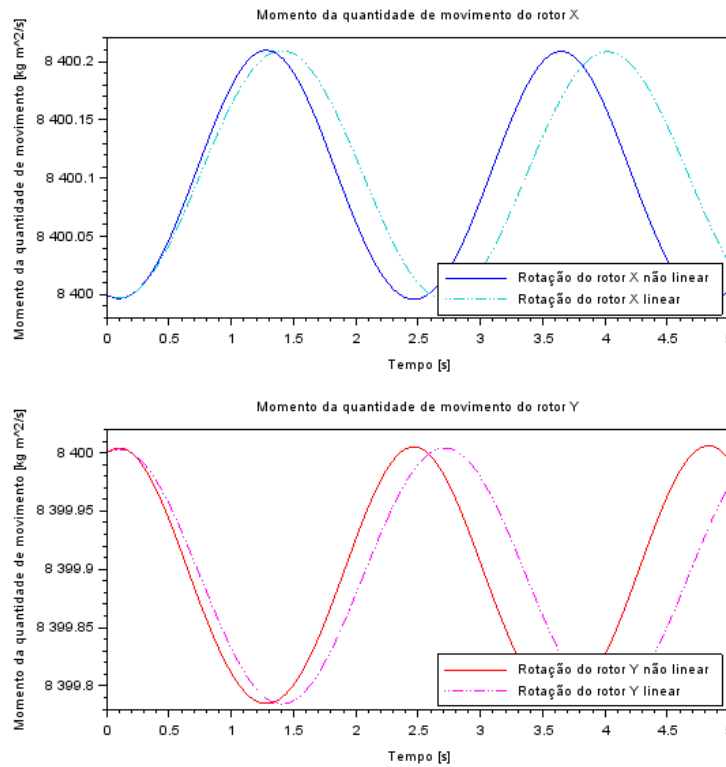


Figura 22 – Momentos da quantidade de movimento em X e Y para $\omega_{x0} = 4\omega_{y0}$.

Para o terceiro conjunto de condições iniciais, pode-se perceber que ele é muito parecido com os gráficos do segundo caso, o que podia-se esperar já que a diferença é apenas uma troca dos valores de ω_{x0} e ω_{y0} . A única diferença é que todos os gráficos estão defasados em 90 graus em relação àqueles do segundo conjunto.

Analisando o efeito do motor elétrico em relação a movimentação natural do satélite em 100 segundos de simulação:

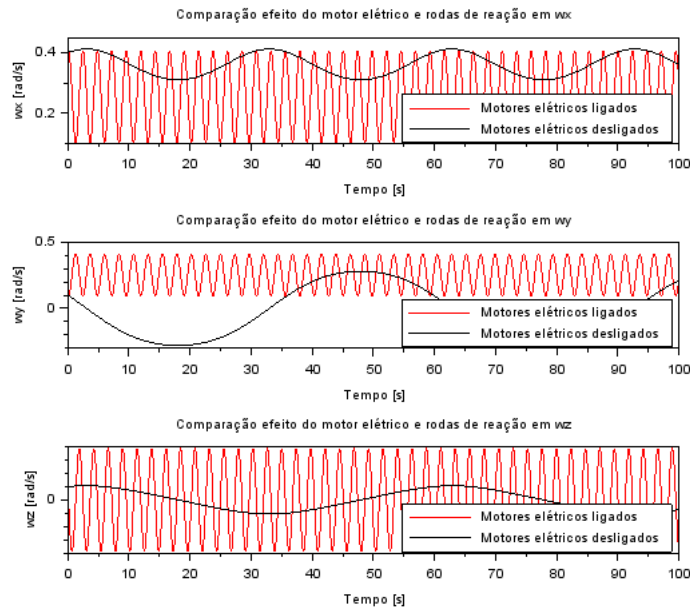


Figura 23 – Comparação de efeito do motor para $\omega_{x0} = 4\omega_{y0}$

Nesse caso, a atuação do motor elétrico não contribuiu de forma positiva para a estabilização, uma vez que aumentou significativamente o número de oscilações do sistema, além de aumentar a sua amplitude no caso da rotação em torno do eixo X. Dessa maneira, nota-se a influência que as condições iniciais arbitradas tem para o resultado da movimentação final do sistema após a atuação dos motores, o que indica uma dependência direta do controle do sistema elétrico com as condições iniciais observadas.

6.1.4 Quarto conjunto de condições iniciais: todas as rotações negativas

Para o quarto conjunto de condições iniciais, foi-se usado o valor de - 0,1 rad/s para todas as rotações, inclusive ω_{z0} , que não havia sido alterado até então. O vetor das condições iniciais está abaixo.

$$\begin{bmatrix} \omega_{x0} \\ \omega_{y0} \\ \omega_{z0} \\ i_{x0} \\ i_{y0} \\ h_{x0} \\ h_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,1 \\ -0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 8400 \\ 8400 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Os resultados gráficos estão a seguir.

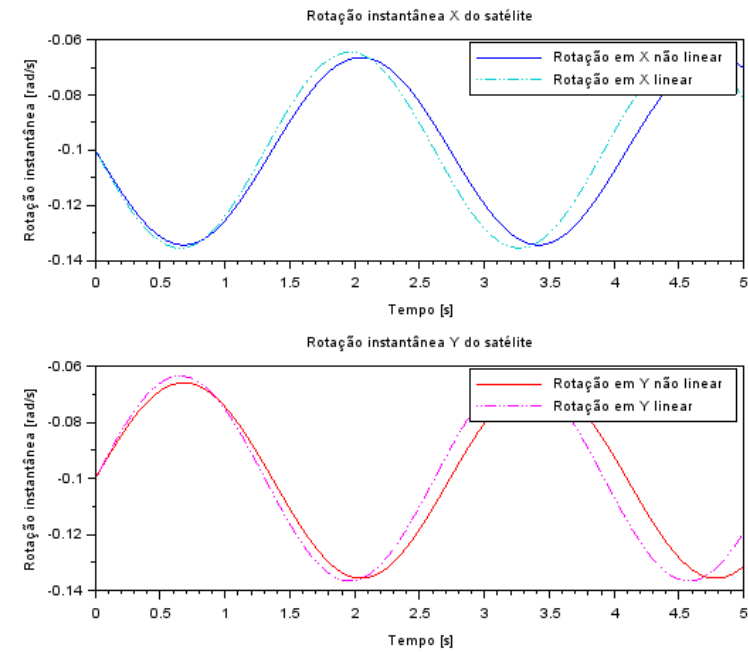


Figura 24 – Rotações instantâneas em X e Y para rotações negativas.

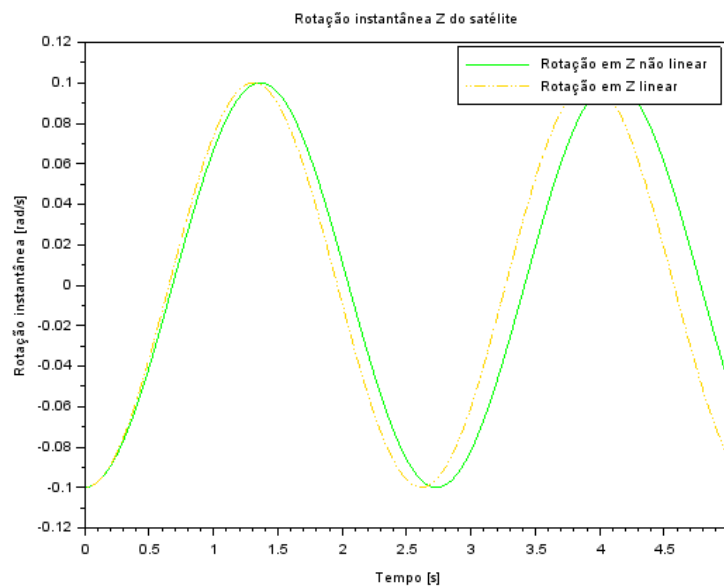


Figura 25 – Rotação instantânea em Z para rotações negativas.

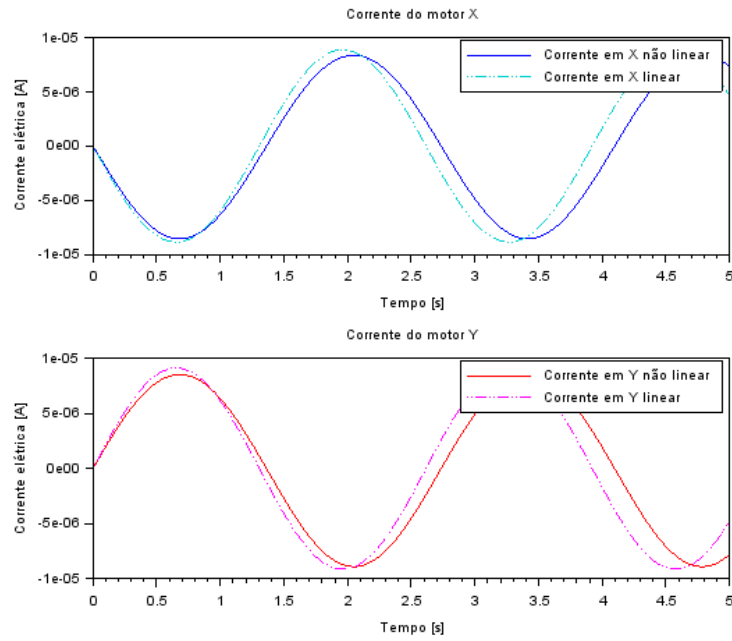


Figura 26 – Correntes elétricas em X e Y para rotações negativas.

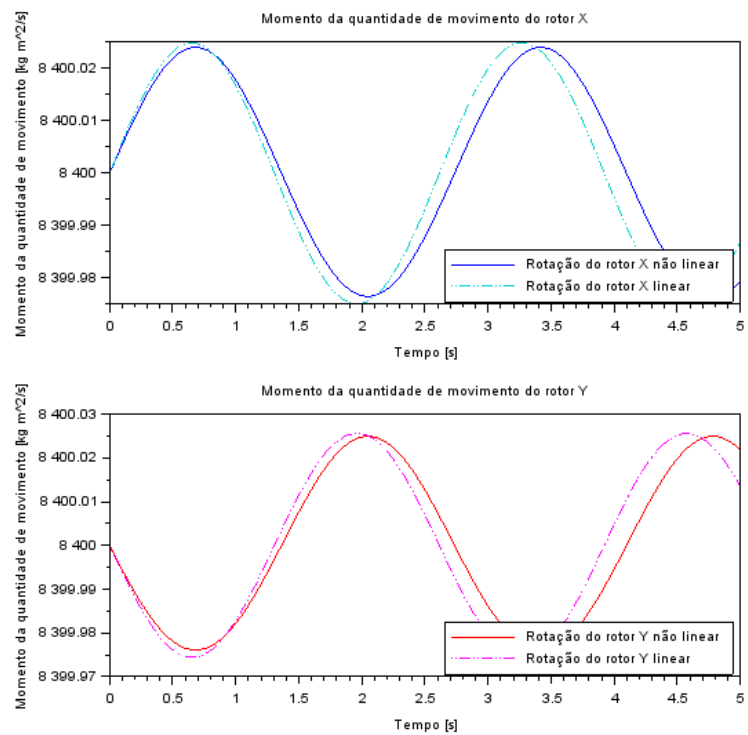


Figura 27 – Momentos da quantidade de movimento em X e Y para rotações negativas.

Para o quarto e último caso de condições iniciais, pode-se perceber que os gráficos são muito parecidos com os do primeiro conjunto, os limites dos gráficos são iguais, assim como a frequência de oscilações. A diferença significativa é que os gráficos estão defasados em 90 graus.

Analisando o efeito do motor elétrico em relação a movimentação natural do satélite em 100 segundos de simulação:

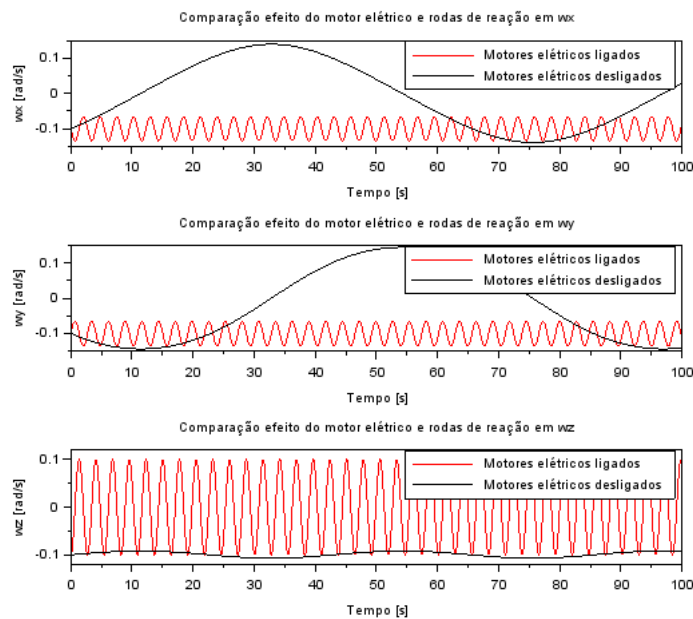


Figura 28 – Comparação de efeito do motor para rotações negativas

O resultado dessa análise é semelhante ao observado para rotações positivas, o motor elétrico contribuiu de forma positiva para a estabilização do sistema, de forma que a rotação em torno dos eixos X e Y ficaram oscilando com baixa amplitude em torno das condições iniciais.

6.2 Análise de sensibilidade dos parâmetros

Para análise de sensibilidade do sistema, foram realizadas simulações assim como na seção 6.1. Entretanto, dessa vez foram observadas o comportamento das variáveis para variações nos parâmetros, mais especificamente na diferença de potencial a qual o motor elétrico está submetido. Foi escolhido esse parâmetro para ser variado uma vez que o motor foi feito para ser operado a diferentes voltagens, o que resulta em diferentes torques sendo aplicados sobre a roda de reação e, conseqüentemente, sobre o satélite.

As simulações foram realizadas inicialmente com o motor desligado, ou seja 0 V, então elas foram feitas com a tensão aplicada de 12, 24, 36 e 48 Volts. Foram escolhidas essas tensões pois são as esperadas caso baterias de 12 V sejam ligadas em série, no caso

foram ligadas de 0 a 4 baterias em série. O vetor das condições iniciais usado é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} \omega_{x0} \\ \omega_{y0} \\ \omega_{z0} \\ i_{x0} \\ i_{y0} \\ h_{x0} \\ h_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, 1 \\ 0, 1 \\ 0, 1 \\ 0 \\ 0 \\ 8400 \\ 8400 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Foram montados mosaicos com as rotações instantâneas nos eixos X, Y e Z para facilitar a visualização e comparação do efeito da diferença da voltagem. Os gráficos estão dispostos abaixo.

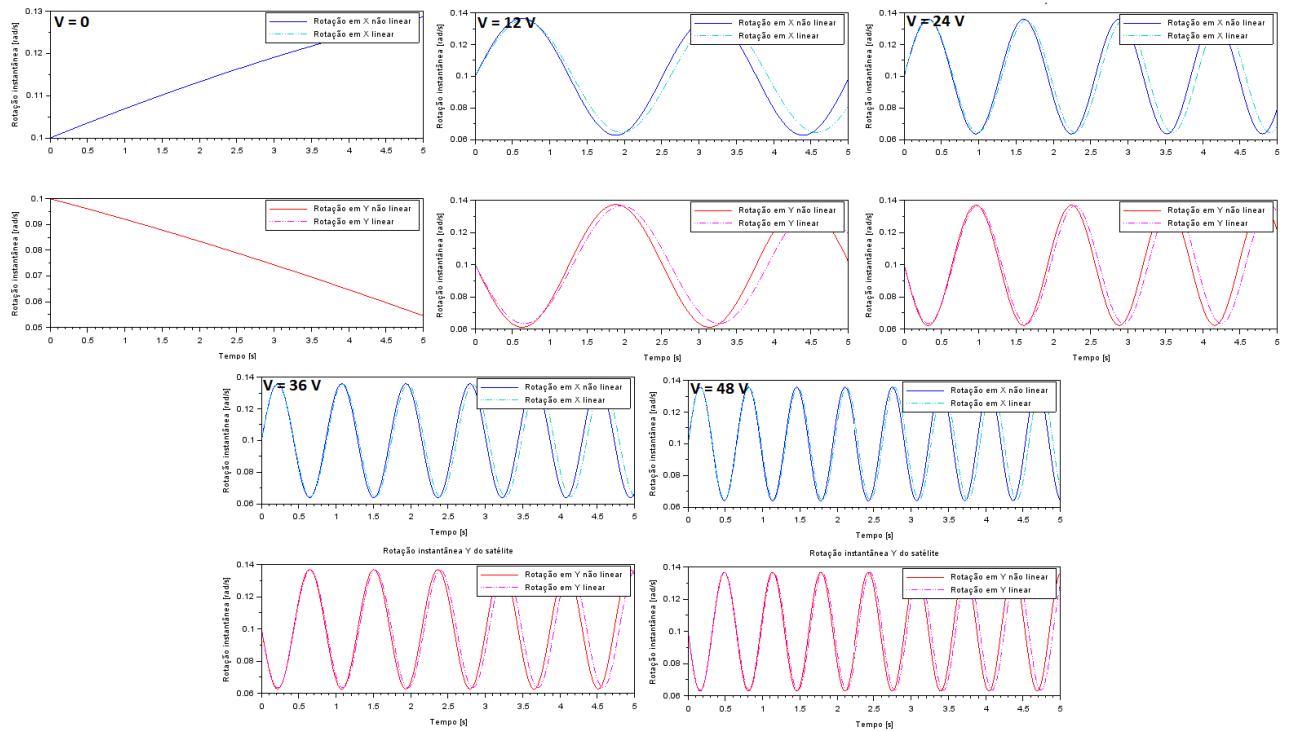


Figura 29 – Mosaico dos gráficos da rotação instantânea em X e Y. As voltagens estão dispostas de forma crescente da esquerda para direita, começando com 0, 12, 24, 36 e 48 Volts.

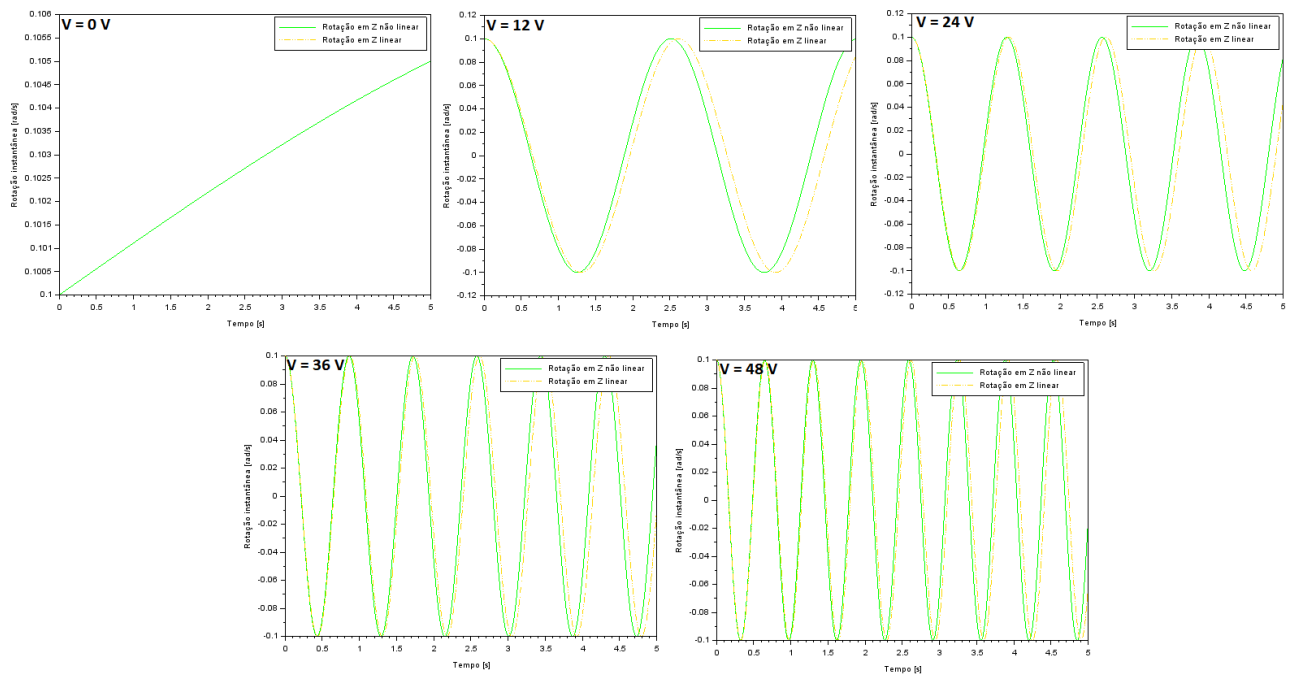


Figura 30 – Mosaico dos gráficos da rotação instantânea em Z. As voltagens estão dispostas de forma crescente da esquerda para direita, começando com 0, 12, 24, 36 e 48 Volts.

Como pode-se perceber, o motor elétrico tem grande influência no comportamento do satélite. Quando o motor está ligado, as rotações tendem a crescer com o passar do tempo. Entretanto, quando a roda de reação é ativada as rotações possuem um perfil senoidal, oscilando em torno das condições iniciais. Com o aumento da voltagem, pode-se perceber que a frequência das oscilações cresce linearmente de acordo com a diferença de potencial. Isso vale não só para as rotações, como também para a corrente elétrica e momento da quantidade de movimento, logo esses gráficos foram reprimidos. Conclui-se que o aumento da voltagem não é necessariamente impactante na estabilização do satélite, já que seu único efeito é aumentar as oscilações em torno do ponto de equilíbrio, o que pode ser ruim ou bom, dependendo da aplicação.

6.3 Análise de estabilidade

A análise de estabilidade do sistema acima pode ser feita através do procedimento indicado na seção 4.3. Partindo da análise do sistema 6.4, que trata da posição de equilíbrio do sistema, obtêm-se o polinômio característico 6.5. A partir dele, o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz é utilizado:

s^7	1	$1,6 \cdot 10^7$	$9 \cdot 10^7$	563
s^6	$8 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^5$	$4,5 \cdot 10^5$	0
s^5	$1,6 \cdot 10^7$	$9 \cdot 10^7$	563	0
s^4	$8 \cdot 10^3$	$4,5 \cdot 10^5$	0	0
s^3	$8 \cdot 10^3$	563	0	0
s^2	$4,4 \cdot 10^5$	0	0	0
s^1	563	0	0	0
s^0	563	0	0	0

Tabela 4 – Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

Uma vez que todos os números na primeira coluna são positivos, sabe-se que todos as raízes de P apresentam parte real negativa e, portanto, o sistema é estável. Isso implica que configurações próximas ao equilíbrio tendem a permanecer próximas ao equilíbrio mantidas as condições do sistema. O mesmo procedimento pode ser feito para valores de V_x e V_y iguais a 24 V, 36 V e 46 V e mesmo 0 V obtendo o mesmo resultado de estabilidade. Dessa forma, as condições de equilíbrio apresentadas em 5.33 configuram um equilíbrio estável com o motor ativado ou não, o que é desejado para o controle das rotações do satélite.

A estabilidade do sistema também pode ser testada para linearizações fora do equilíbrio. Para um valor de ω_z^* de 0,01 rad/s e potenciais de 12 V, por exemplo, a configuração do sistema é instável. Esse resultado difere do caso em que o satélite é analisado sem motor algum, em que o sistema apresenta equilíbrio estável para qualquer velocidade angular em torno do eixo z .

7 Conclusão

No presente relatório foram estudados e elaborados modelos matemáticos para cada componente da situação física a ser estudada. No caso, foram analisadas a dinâmica do satélite e a implementação de rodas de torque reativos acionados a partir de um motor elétrico.

Após a obtenção das equações diferenciais que regem os sistemas físicos a serem estudados, foi elaborado um código na linguagem *Scilab 6.1.0* a fim de simular numericamente a solução do sistema. Em seguida utilizando as técnicas de linearização, foi realizada uma análise do sistema linearizado, visando obter soluções aproximadas do problema, permitindo uma maior compreensão sobre o estado do sistema quando submetido a entradas de tensões diferentes.

Uma vez obtido o código de simulação, tanto do sistema não linearizado quanto do linearizado, buscou-se adotar parâmetros convencionais para a determinada situação a ser estudada. Assim, foram realizados diferentes testes para condições iniciais variadas, com o objetivo de averiguar a validade da solução não linear a partir da observação dos resultados e a compatibilidade com a solução linearizada.

Dessa maneira, foi possível verificar a evolução temporal de todas as variáveis a serem discutidas, além das condições de estabilidade a partir dos métodos de verificação analíticos, como o critério de *Routh-Hurwitz*. Tal verificação possibilitou um maior entendimento do efeito das rodas de reação, em adição a como as tensões iniciais arbitradas influenciam no comportamento do sistema como um todo.

O experimento foi bem sucedido, dada a utilização de diversas condições diferentes que se enquadraram positivamente na análise de validade de respostas, obtendo-se resultados que eram esperados. Em consequência, obteve-se um programa intuitivo que, dados os parâmetros do satélite, do motor elétrico e da roda de reação, o mesmo retorna as componentes do vetor rotação instantânea do satélite, além da corrente nos motores e os momentos da quantidade de movimento relativos a cada roda de reação.

Por fim, obtido um programa confiável que simula a situação física do problema a ser analisado, será possível posteriormente desenvolver o controle do sistema. Tal estudo consistiria na obtenção de entradas ideais com o objetivo estabelecido de alcançar a estabilidade do satélite. O feito será realizado a partir do estudo da teoria de controle para a definição e regulação do tempo de abertura e fechamento do circuito elétrico.

Referências

- CABETTE, R. E. S. *Estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais*. Tese (Doutorado) — Dissertação de doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São . . . , 2006. Citado na página 2.
- CANAL, I.; VALDIERO, A.; REIMBOLD, M. Modelagem matemática de motor de corrente contínua e análise dinâmica. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 2017. Citado na página 2.
- DAVIS, L. P. et al. Hubble space telescope reaction wheel assembly vibration isolation system. *NASA Marshall Space Flight Center, Huntsville, Alabama*, v. 9, 1986. Citado na página 2.
- GONÇALVES, L. D. *Manobras Orbitais de Satélites Artificiais Lunares com Aplicação de Propulsão Contínua*. Tese (Doutorado) — dissertação (Mestrado em Mecânica Espacial e Controle)-Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2013. Citado na página 2.
- HANSEN. *Hansen Series 121-8 - DC Planetary Gear Motor (Metal) Datasheet*. 2020. Disponível em: <https://www.hansen-motor.com/pdf.php?pdf=products/data-sheets/dc-motors/Series121-8_2.1inDCPlanetaryGearMotor-Metal.pdf>. Citado na página 26.
- HENDERSON, D. Shuttle program. euler angles, quaternions, and transformation matrices working relationships. 1977. Citado na página 2.
- KIM, S.; KIM, Y. Spin-axis stabilization of a rigid spacecraft using two reaction wheels. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 24, n. 5, p. 1046–1049, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 16.
- OLIVEIRA, F. de. *Brasil-China: 20 anos de cooperação espacial : CBERS, o satélite da parceria estratégica*. Instituto Nacional de Pesquisas Especiais, 2009. ISBN 9788560064182. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=xk5JzS-nUxgC>>. Citado na página 1.
- SHRIVASTAVA, S.; MODI, V. Satellite attitude dynamics and control in the presence of environmental torques-a brief survey. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 6, n. 6, p. 461–471, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 11.
- VIEGAS, J. W. Wilder da V. C. Estudo de viabilidade do controle de atitude do satélite universitário itasat empregando duas rodas de reação. *Brazilian Symposium on Aerospace Eng. Applications*, 2009. Disponível em: <<http://www.cta-dlr2009.ita.br/Proceedings/PDF/59539.pdf>>. Citado na página 2.

Apêndices

APÊNDICE A – Código de simulação do modelo em *Scilab*

```

1 //Projeto final – Modelagem de Sistemas Dinamicos
2
3 //Integrantes:
4 //Cássio Murakami;
5 //Gabriel Barbosa Paganini;
6 //Henrique Kuhlmann;
7 //João Otávio Tanaka de Oliveira;
8
9 clear();
10 xdel(winsid());
11
12 //Parâmetros de simulação:
13 t_inicial = 0; //Instante inicial [s]
14 t_final = 5; //Instante final [s]
15 iteration = 10000; //Número de Discretizações
16 t = linspace(t_inicial, t_final, iteration);
17
18 t_desl = t_final; //Instante que os dois motores desligam
19 // simultaneamente
20 t_desl_x = t_desl; //Instante de desligamento do motor X
21 t_desl_y = t_desl; //Instante de desligamento do motor Y
22
23 analise = 1; // "1" Para a comparação da solução não linear com linear |
24 // "2" Para a comparação da solução com motor elétrico e sem motor elétrico
25
26 //Parâmetros do projeto do satélite:
27 Ix = 9840; //Momento de inércia em relação ao eixo x [kg m^2]
28 Iy = 9558; //Momento de inércia em relação ao eixo y [kg m^2]
29 Iz = 2520; //Momento de inércia em relação ao eixo z [kg m^2]
30 //Observação: (Ix >= Iy >= Iz)
31
32 //Parâmetros do projeto dos motores:
33 K = 10; //Constante do motor K
34 Kb = 0.001; //Constante do motor Kb
35 R = 4; //Resistência elétrica do motor [Ohm]
36 L = 0.001; //Indutância do motor [H]
37 J = 0.7; //Momento de inércia do rotor [kg m^2]
38
39 //Definição da evolução temporal das fontes de tensão:
40 function fun = Vx(t)

```

```
39     if t < t_desl_x then
40         fun = 48 //Definição da fonte de tensão do motor X
41     else
42         fun = 0
43     end
44 endfunction
45
46 function fun = Vy(t)
47     if t < t_desl_y then
48         fun = 48 //Definição da fonte de tensão do motor Y
49     else
50         fun = 0
51     end
52 endfunction
53
54 //Condições iniciais do sistema:
55 wx0 = 0.1; //Componente do eixo X do vetor rotação instant nea [rad
/s]
56 wy0 = 0.1; //Componente do eixo Y do vetor rotação instant nea [rad
/s]
57 wz0 = 1; //Componente do eixo Z do vetor rotação instant nea [rad/s
]
58
59 ix0 = 0; // Corrente inicial no motor X [A]
60 iy0 = 0; // Corrente inicial no motor Y [A]
61 iz0 = 0; // Corrente inicial no motor Z [A]
62
63 hx0 = Vx(0)*J/Kb; // Momento da quantidade de movimento inicial de X
[kg m2/s]
64 hy0 = Vy(0)*J/Kb; // Momento da quantidade de movimento inicial de Y
[kg m2/s]
65
66 //Condições de operação:
67 wz_op = 0;
68 hx_op = Vx(0)*J/Kb;
69 hy_op = Vy(0)*J/Kb;
70
71 //Definição dos vetores de solução:
72 wx = zeros(length(t));
73 wy = zeros(length(t));
74 wz = zeros(length(t));
75
76 ix = zeros(length(t));
77 iy = zeros(length(t));
78
79 hx = zeros(length(t));
80 hy = zeros(length(t));
```



```

81
82 //Iniciação dos valores de desvio padrão:
83 des_wx = 0;
84 des_wy = 0;
85 des_wz = 0;
86 des_ix = 0;
87 des_iy = 0;
88 des_hx = 0;
89 des_hy = 0;
90 // ----- Solução do sistema não linear ----- //
91
92 //Definição do vetor de estados:
93 funcprot(0);
94     function dy = solution_nl(t,y)
95         wx = y(1);
96         wy = y(2);
97         wz = y(3);
98         ix = y(4);
99         iy = y(5);
100        hx = y(6);
101        hy = y(7);
102
103        dy(1) = ((Iy + J - Iz)/Ix)*wy*wz + (1/Ix)*hy*wz - (K/Ix)*ix;
104        dy(2) = ((Iz - Ix - J)/Iy)*wx*wz - (1/Iy)*hx*wz - (J/Iy)*iy;
105        dy(3) = ((Ix - Iy)/Iz)*wx*wy + (1/Iz)*hx*wy - (1/Iz)*hy*wx;
106
107        dy(4) = -(R/L)*ix - (Kb/(J*L))*hx + (1/L)*Vx(t);
108        dy(5) = -(R/L)*iy - (Kb/(J*L))*hy + (1/L)*Vy(t);
109
110        dy(6) = -(J*(Ix + J - Iz)/Ix)*wy*wz - (J/Ix)*hy*wz + (K*(Ix+J)/Ix)
111        *ix;
112        dy(7) = -(J*(Iz - Ix - J)/Iy)*wx*wz + (J/Iy)*hx*wz + (K*(Iy+J)/Iy)
113        *iy;
114    endfunction
115
116 result_nl = ode([wx0;wy0;wz0;ix0;iy0;hx0;hy0],0,t,solution_nl);
117
118 wx = result_nl(1,:);
119 wy = result_nl(2,:);
120 wz = result_nl(3,:);
121 ix = result_nl(4,:);
122 iy = result_nl(5,:);
123 hx = result_nl(6,:);
124 hy = result_nl(7,:);
125
126 // ----- Solução do sistema linear ----- //

```

```

126 funcprot(0)
127     function dy = solution_l(t,y)
128         x1 = y(1);
129         x2 = y(2);
130         x3 = y(3);
131         x4 = y(4);
132         x5 = y(5);
133         x6 = y(6);
134         x7 = y(7);
135
136         dy(1) = ((Iy + J - Iz)*wz_op/Ix)*x2 + (hy_op/Ix)*x3 - (K/Ix)*x4 + (
wz_op/Ix)*x7;
137         dy(2) = ((Iz - Ix - J)*wz_op/Iy)*x1 - (hx_op/Iy)*x3 - (K/Iy)*x5 - (
wz_op/Iy)*x6;
138         dy(3) = -(hy_op/Iz)*x1 + (hx_op/Iz)*x2;
139         dy(4) = -(R/L)*x4 - (Kb/(J*L))*x6 + (1/L)*Vx(t);
140         dy(5) = -(R/L)*x5 - (Kb/(J*L))*x7 + (1/L)*Vy(t);
141         dy(6) = ((Iz - Ix - J)*J*wz_op/Ix)*x2 - (J*hy_op/Ix)*x3 + ((K*Ix +
J*K)/Ix)*x4 - (J*wz_op/Ix)*x7;
142         dy(7) = ((Ix + J - Iz)*J*wz_op/Iy)*x1 + (J*hx_op/Iy)*x3 + ((K*Iy +
J*K)/Iy)*x5 + (J*wz_op/Iy)*x6;
143     endfunction
144
145 result_l = ode([wx0;wy0;wz0;ix0;iy0;hx0;hy0],0,t,solution_l);
146
147 wx_l = result_l(1,:);
148 wy_l = result_l(2,:);
149 wz_l = result_l(3,:);
150 ix_l = result_l(4,:);
151 iy_l = result_l(5,:);
152 hx_l = result_l(6,:);
153 hy_l = result_l(7,:);
154
155 //Cálculo do desvio padrão entre a solução não linear e linear:
156
157 for i = 1:length(t)
158     des_wx = des_wx + (wx(i) - wx_l(i))^2;
159     des_wy = des_wy + (wy(i) - wy_l(i))^2;
160     des_wz = des_wz + (wz(i) - wz_l(i))^2;
161     des_ix = des_ix + (ix(i) - ix_l(i))^2;
162     des_iy = des_iy + (iy(i) - iy_l(i))^2;
163     des_hx = des_hx + (hx(i) - hx_l(i))^2;
164     des_hy = des_hy + (hy(i) - hy_l(i))^2;
165 end
166
167 des_wx = sqrt(des_wx);
168 des_wy = sqrt(des_wy);

```

```

169 des_wz = sqrt(des_wz);
170 des_ix = sqrt(des_ix);
171 des_iy = sqrt(des_iy);
172 des_hx = sqrt(des_hx);
173 des_hy = sqrt(des_hy);
174
175 // ----- Solução do sistema sem o sistema elétrico e rodas de reação
    // ----- //
176
177 //Definição do vetor de estados:
178 funcprot(0);
179 function dy = sat_nat(t,y)
180     wx = y(1);
181     wy = y(2);
182     wz = y(3);
183
184     dy(1) = ((Iy - Iz)/Ix)*wy*wz;
185     dy(2) = ((Iz - Ix)/Iy)*wx*wz;
186     dy(3) = ((Ix - Iy)/Iz)*wx*wy;
187 endfunction
188
189 result_nat = ode([wx0;wy0;wz0],0,t,sat_nat);
190
191 wx_nat = result_nat(1,:);
192 wy_nat = result_nat(2,:);
193 wz_nat = result_nat(3,:);
194
195 // ----- Exibição dos resultados ----- //
196
197 if analyse == 1 then
198     scf(1)
199     subplot(2,1,1);
200     xtitle("Rotação instant nea X do satélite");
201     xlabel("Tempo [s]");
202     ylabel("Rotação instant nea [rad/s] ");
203     plot(t,wx,'b');
204     plot_wx_1 = plot(t,wx_1,'b');
205     plot_wx_1.line_style = 5;
206     plot_wx_1.foreground = 18;
207     legend(['Rotação em X não linear';'Rotação em X linear']);
208
209     subplot(2,1,2);
210     xtitle("Rotação instant nea Y do satélite");
211     xlabel("Tempo [s]");
212     ylabel("Rotação instant nea [rad/s] ");
213     plot(t,wy,'r');
214     plot_wy_1 = plot(t,wy_1,'r');

```

```
215     plot_wy_1.line_style = 5;
216     plot_wy_1.foreground = 6;
217     legend(['Rotação em Y não linear'; 'Rotação em Y linear']);
218
219     scf(2)
220     xtitle("Rotação instant nea Z do satélite");
221     xlabel("Tempo [s]");
222     ylabel("Rotação instant nea [rad/s] ");
223     plot_wz = plot(t, wz);
224     plot_wz.foreground = 3;
225     plot_wy_1 = plot(t, wz_1);
226     plot_wy_1.line_style = 5;
227     plot_wy_1.foreground = 32;
228     legend(['Rotação em Z não linear'; 'Rotação em Z linear']);
229
230     scf(3)
231     subplot(2,1,1);
232     xtitle("Corrente do motor X ");
233     xlabel("Tempo [s]");
234     ylabel("Corrente elétrica [A] ");
235     plot(t, ix, 'b');
236     plot_ix_1 = plot(t, ix_1, 'b');
237     plot_ix_1.line_style = 5;
238     plot_ix_1.foreground = 18;
239     legend(['Corrente em X não linear'; 'Corrente em X linear']);
240
241     subplot(2,1,2);
242     xtitle("Corrente do motor Y");
243     xlabel("Tempo [s]");
244     ylabel("Corrente elétrica [A] ");
245     plot(t, iy, 'r');
246     plot_iy_1 = plot(t, iy_1, 'r');
247     plot_iy_1.line_style = 5;
248     plot_iy_1.foreground = 6;
249     legend(['Corrente em Y não linear'; 'Corrente em Y linear']);
250
251     scf(4)
252     subplot(2,1,1);
253     xtitle("Momento da quantidade de movimento do rotor X");
254     xlabel("Tempo [s]");
255     ylabel("Momento da quantidade de movimento [kg m^2/s] ");
256     plot(t, hx, 'b');
257     plot_hx_1 = plot(t, hx_1, 'b');
258     plot_hx_1.line_style = 5;
259     plot_hx_1.foreground = 18;
260     legend(['Rotação do rotor X não linear'; 'Rotação do rotor X linear'
], [4]);
```

```

261
262     subplot(2,1,2);
263     xtitle("Momento da quantidade de movimento do rotor Y");
264     xlabel("Tempo [s]");
265     ylabel("Momento da quantidade de movimento [kg m^2/s] ");
266     plot(t,hy,'r');
267     plot_hy_1 = plot(t,hy_1,'r');
268     plot_hy_1.line_style = 5;
269     plot_hy_1.foreground = 6;
270     legend(['Rotação do rotor Y não linear';'Rotação do rotor Y linear'
271 ],[4]);
272
273 //Display dos desvios padrões das medidas:
274 disp("Desvio padrão de wx : "+string(des_wx));
275 disp("Desvio padrão de wy : "+string(des_wy));
276 disp("Desvio padrão de wz : "+string(des_wz));
277 disp("Desvio padrão de ix : "+string(des_ix));
278 disp("Desvio padrão de iy : "+string(des_iy));
279 disp("Desvio padrão de Omegax : "+string(des_hx));
280 disp("Desvio padrão de Omegay : "+string(des_hy));
281
282 elseif analise == 2 then
283     scf(1);
284     xtitle("Comparação efeito do motor elétrico e rodas de reação em wx");
285     xlabel("Tempo [s]");
286     ylabel("Rotatão instant nea em x [rad/s] ");
287     plot(t,wx,'r');
288     plot(t,wx_nat,'black');
289     legend(['Motores elétricos ligados';'Motores elétricos desligados']);
290
291     scf(2);
292     xtitle("Comparação efeito do motor elétrico e rodas de reação em wy");
293     xlabel("Tempo [s]");
294     ylabel("Rotatão instant nea em y [rad/s] ");
295     plot(t,wy,'r');
296     plot(t,wx_nat,'black');
297     legend(['Motores elétricos ligados';'Motores elétricos desligados']);
298
299     scf(3);
300     xtitle("Comparação efeito do motor elétrico e rodas de reação em wz");
301     xlabel("Tempo [s]");
302     ylabel("Rotatão instant nea em z [rad/s] ");
303     plot(t,wz,'r');
304     plot(t,wz_nat,'black');
305     legend(['Motores elétricos ligados';'Motores elétricos desligados']);
306 else
307     disp("O valor análise não é um valor válido (Digite 1 ou 2).")

```

307 **end**