



PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

## Modelagem Dinâmica de um Veículo Aéreo Não Tripulado do Tipo Quadrirrotor

Professores: Agenor T. Fleury e Décio C. Donha

**PME**  
Departamento de Engenharia Mecânica



# INTEGRANTES



Gabriela Vasconcelos Araujo

NUSP: 10771497



Henrique Silva Barbeta

NUSP: 10769323



Ítalo Gonçalves Sant'Ana Paiva

NUSP: 10853310

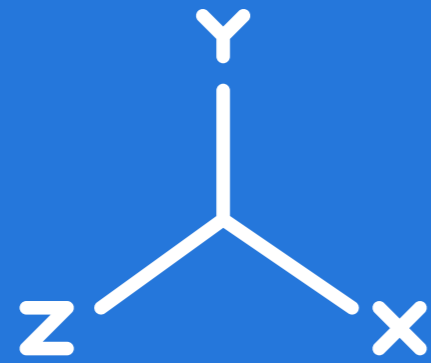


João Pedro Junqueira S. de Moraes

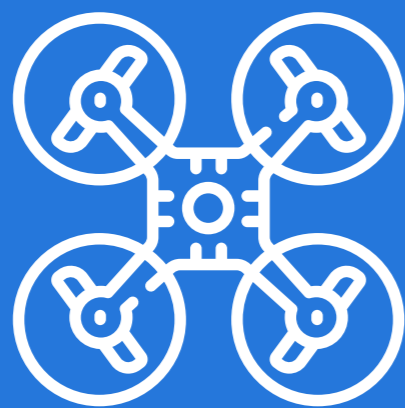
NUSP: 10774437



Introdução



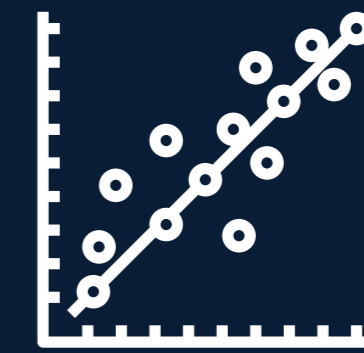
Modelagem  
Matemática



Análise do  
Sistema



Objetivos e Revisão  
Bibliográfica



Linearização



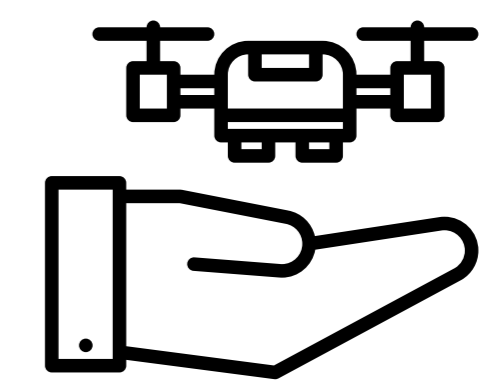
Estudo de  
Estabilidade



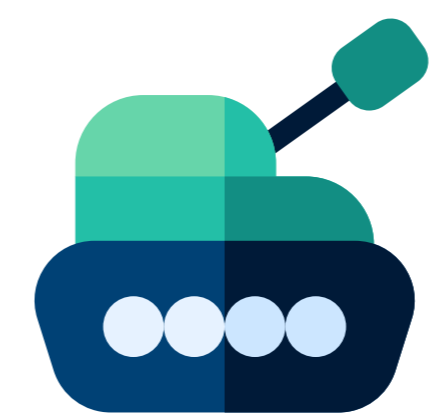
# Introdução



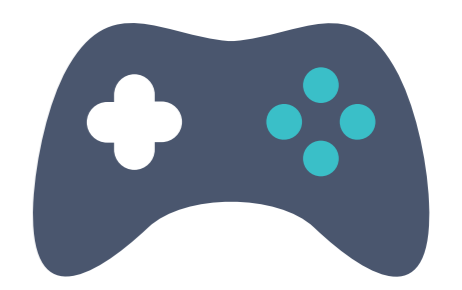
Pilotados à distância



Autônomos

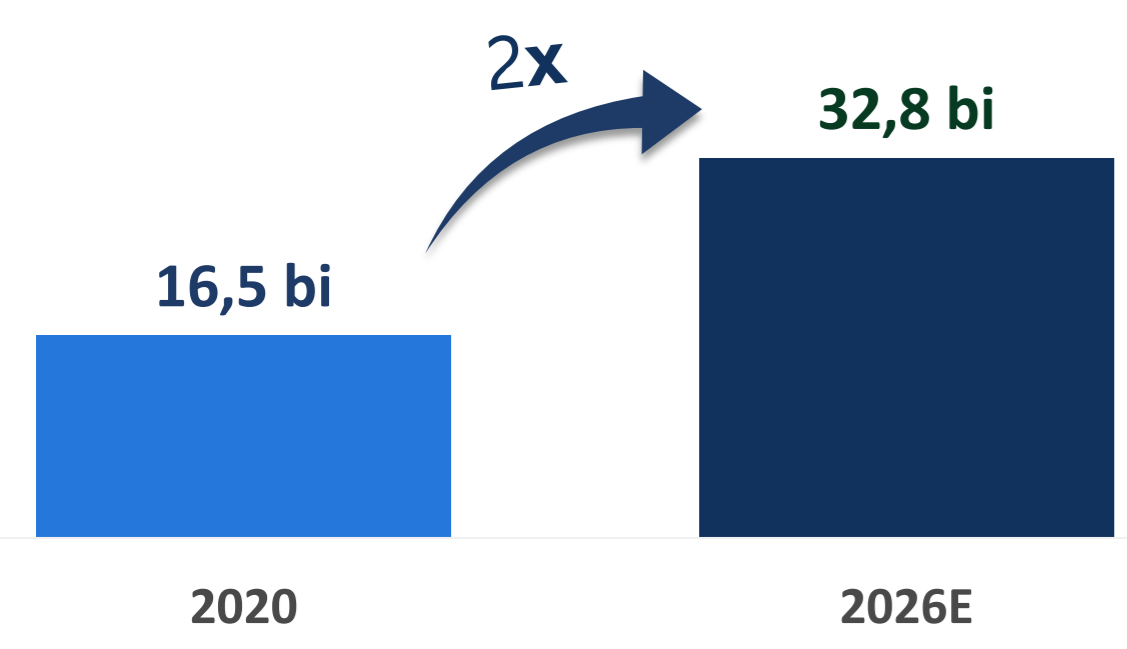


Uso Militar

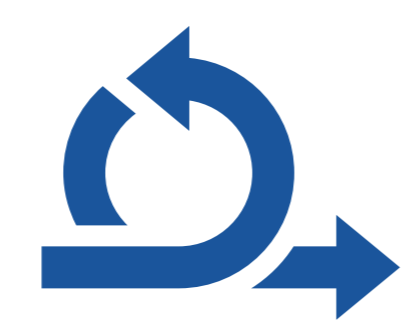


Entretenimento

Tamanho do mercado global de VANTs (US\$)



Quadrícóptero



Agilidade



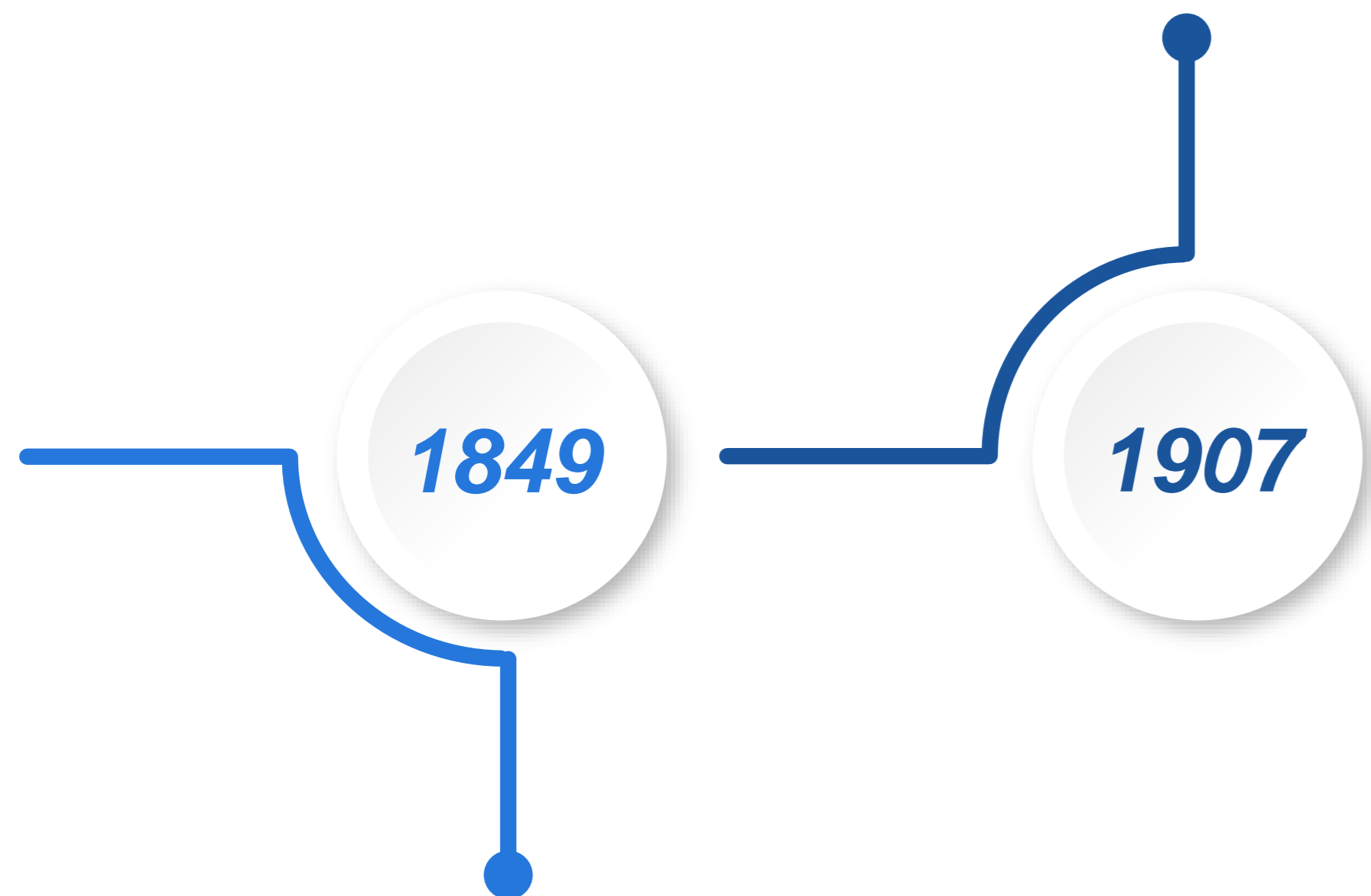
Segurança



# História dos Veículos Aéreos Não Tripulados

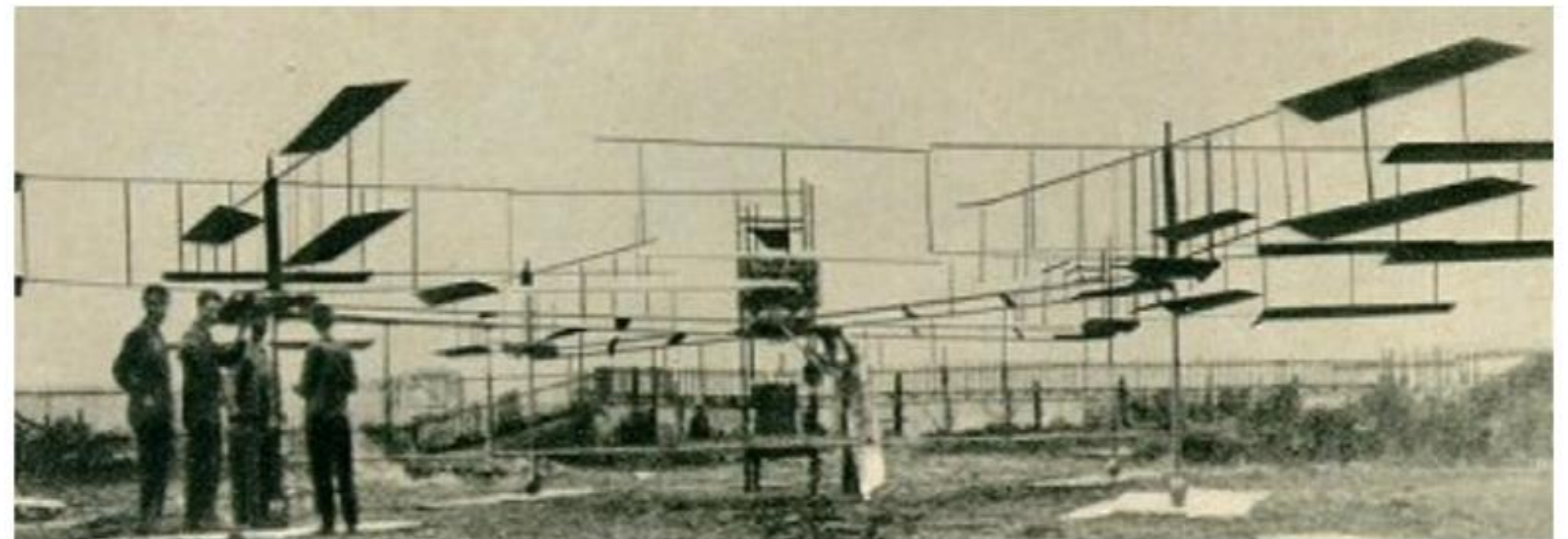
Fonte: LEISHMAN (2000), Aviastar

Gyroplane No. 1



**Primeiro Registro**

O registro mais remoto de VANTs foi de balões austríacos contra Veneza

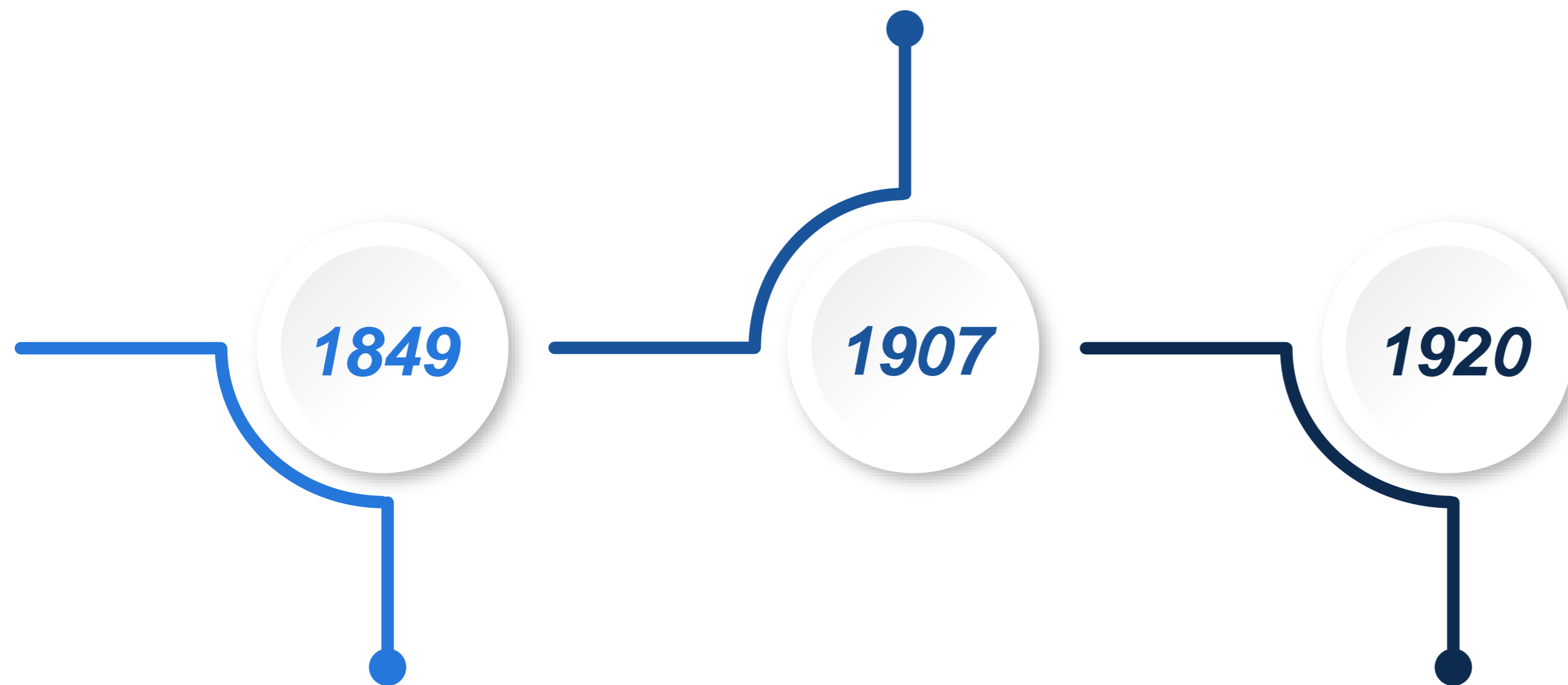


Foi desenhado pelos irmãos Brégué com a ajuda do professor Charles Richet no ano de 1907

# História dos Veículos Aéreos Não Tripulados

Fonte: LEISHMAN (2000), Aviastar

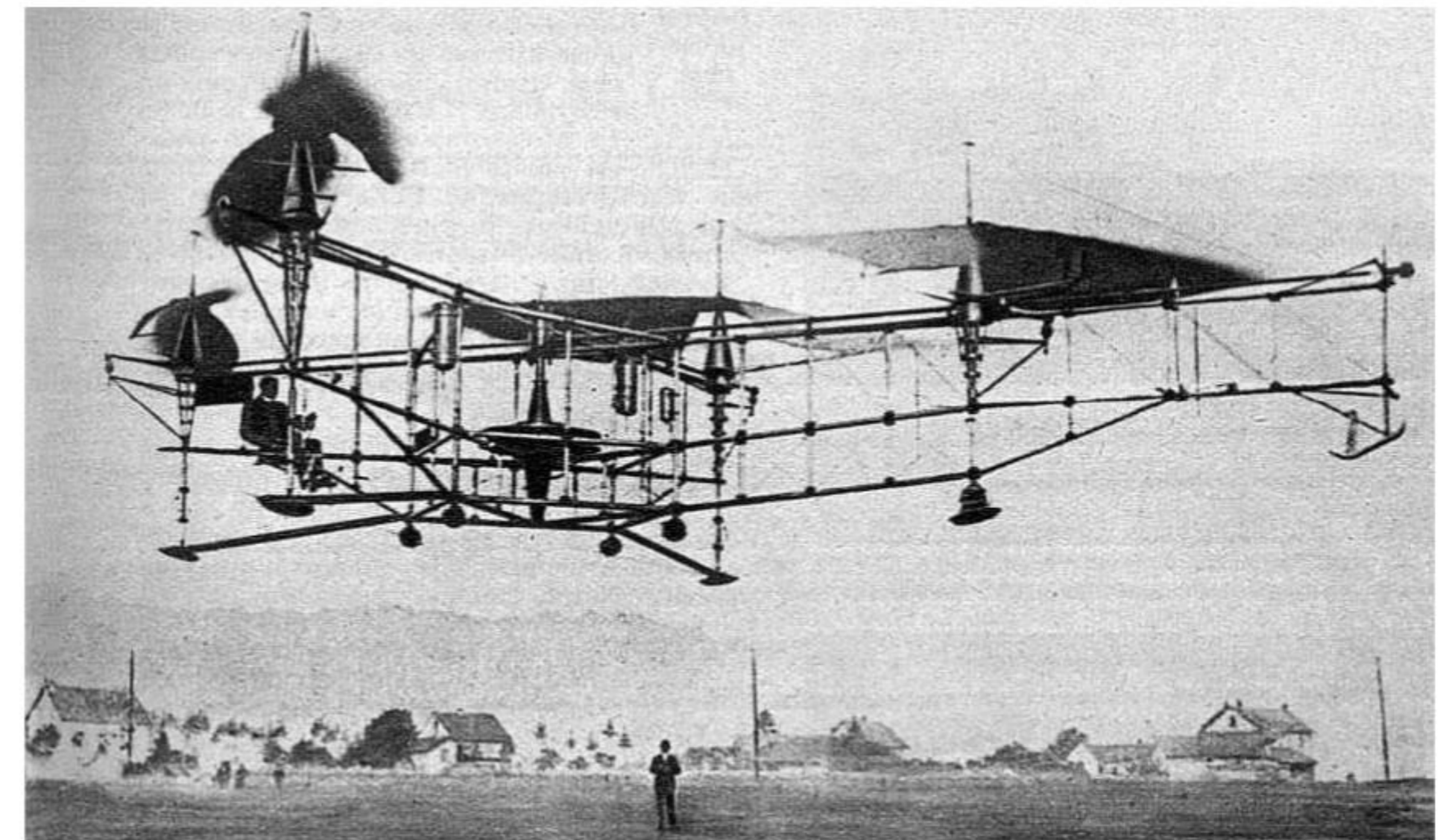
Gyroplane No. 1



**Primeiro Registro**

O registro mais remoto de VANTs foi de balões austríacos contra Veneza

Oehmichen No. 2



Foi produzido por Étienne Oehmichen. O Oehmichen No. 2 possuía quatro rotores e oito hélices, todos movidos por um motor

# História dos Veículos Aéreos Não Tripulados

Fonte: LEISHMAN (2000), Aviastar

Gyroplane No. 1

De Bothezat

1849

1907

1920

1922

Primeiro Registro

Oehmichen No. 2



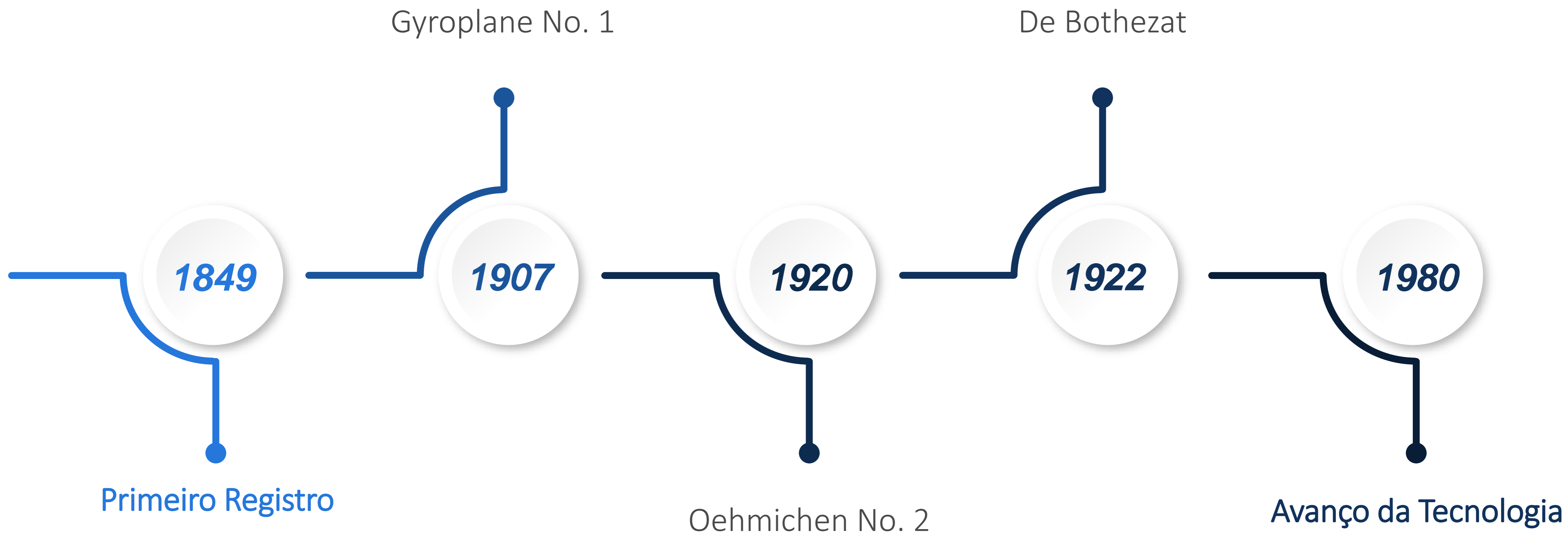
Em 1922, o exército dos EUA desenvolveu, a partir do Dr. George de Bothezat e Ivan Jerome, o “Flying Octopus”

O registro mais remoto de VANTs foi de balões austríacos contra Veneza



# História dos Veículos Aéreos Não Tripulados

Fonte: LEISHMAN (2000), COSTA (2008), Aviastar



O registro mais remoto de VANTs foi de balões austríacos contra Veneza

Em direção a aparelhos enxutos e de menor porte

# História dos Veículos Aéreos Não Tripulados

Fonte: LEISHMAN (2000), COSTA (2008), Aviastar



De Bothezat

1922

1980

**Avanço da Tecnologia**

Em direção a aparelhos enxutos e de menor porte

O principal foco vem sendo testar os microcomponentes usados para controlar os VANTs e obter novos processos de estabilidade e controle para esses veículos aéreos



# Objetivos e Revisão Bibliográfica

# Objetivos do trabalho proposto

Analisar sua operação no plano XZ, contemplando aspectos relevantes para sua operação

Analisar os movimentos típicos do veículo e a sua resposta a condições de contorno distintas

1º

2º

3º

4º

5º

Modelar cinematica e dinamicamente o funcionamento de um quadricóptero

Enfoque na influência do valor das entradas do sistema para operação

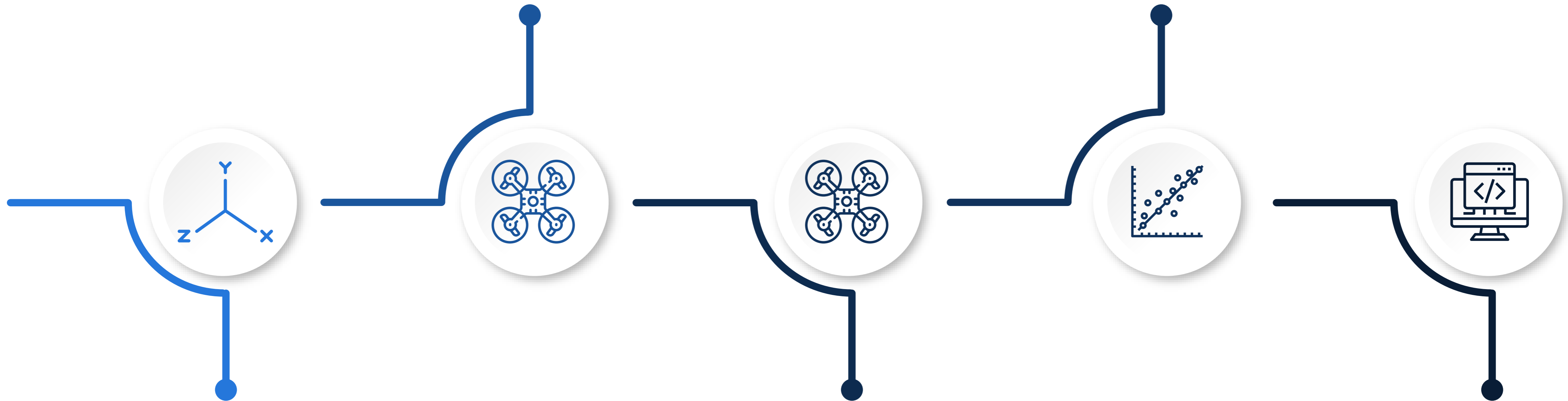
Estudar a estabilidade do sistema

Modelagem por Newton-Euler:

- OLIVEIRA (2019)
- MONTEIRO (2015)

Linearização e simplificação para o plano XZ:

- SILVA (2018)



Sistema de coordenadas:

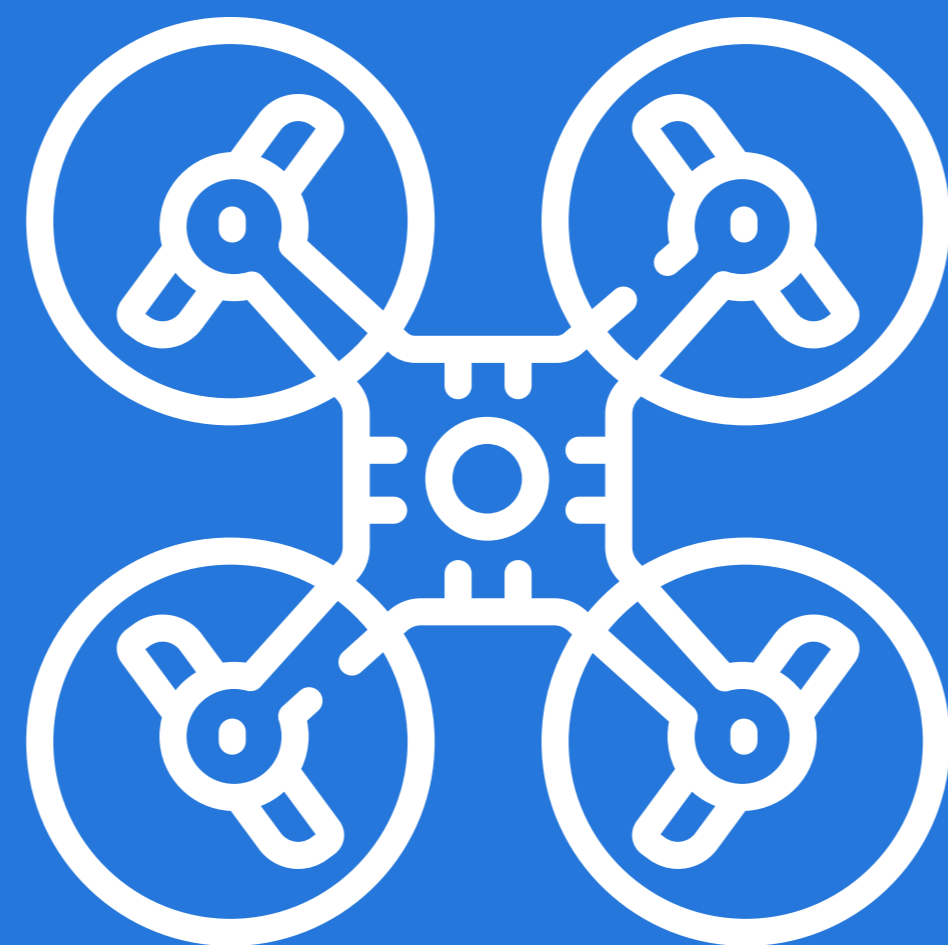
- LEISHMAN (2000)
- CAVALLARO (2019)

Modelagem por Lagrange:

- LIMA (2015), BOUABDALLAH (2007) e OLIVEIRA (2019)

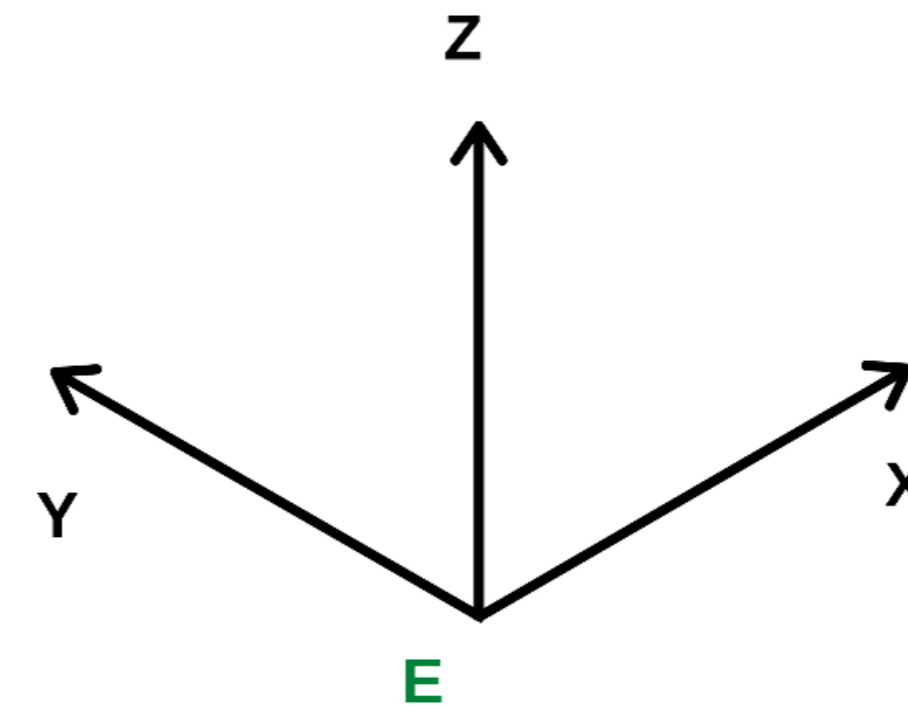
Parâmetros do sistema:

- DOMINGUES (2009)
- CAVALLARO (2019)

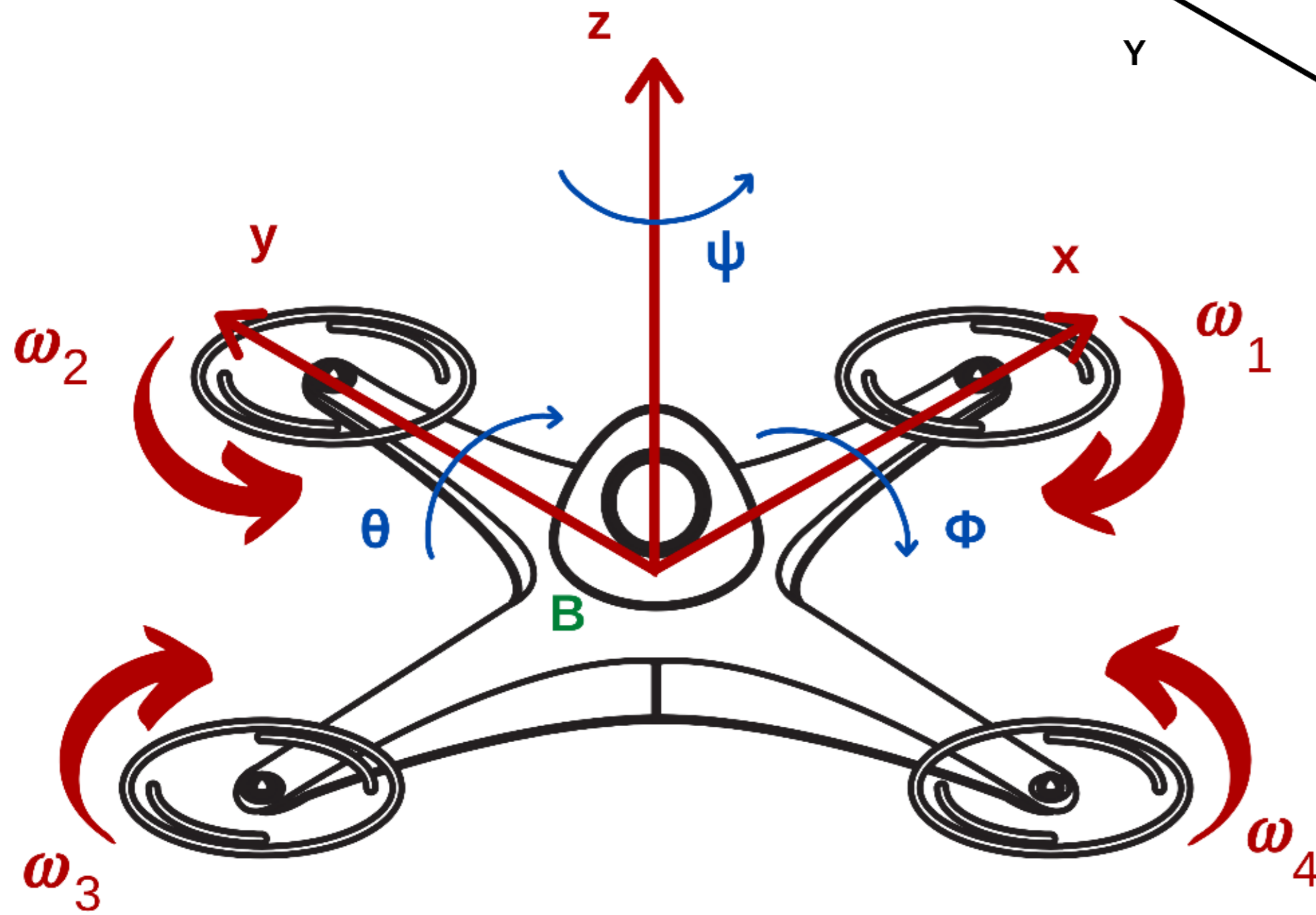


# Modelagem Cinemática e Dinâmica

# Sistema de Coordenadas



Referencial Inercial -  $E (X, Y, Z)$   
Referencial Não Inercial -  $B (x, y, z)$



Translação

$x$   
 $y$   
 $z$



Graus de Liberdade

Rotação

$\phi$   
 $\theta$   
 $\psi$

2 pares  
de rotores



Sistema  
subatuado

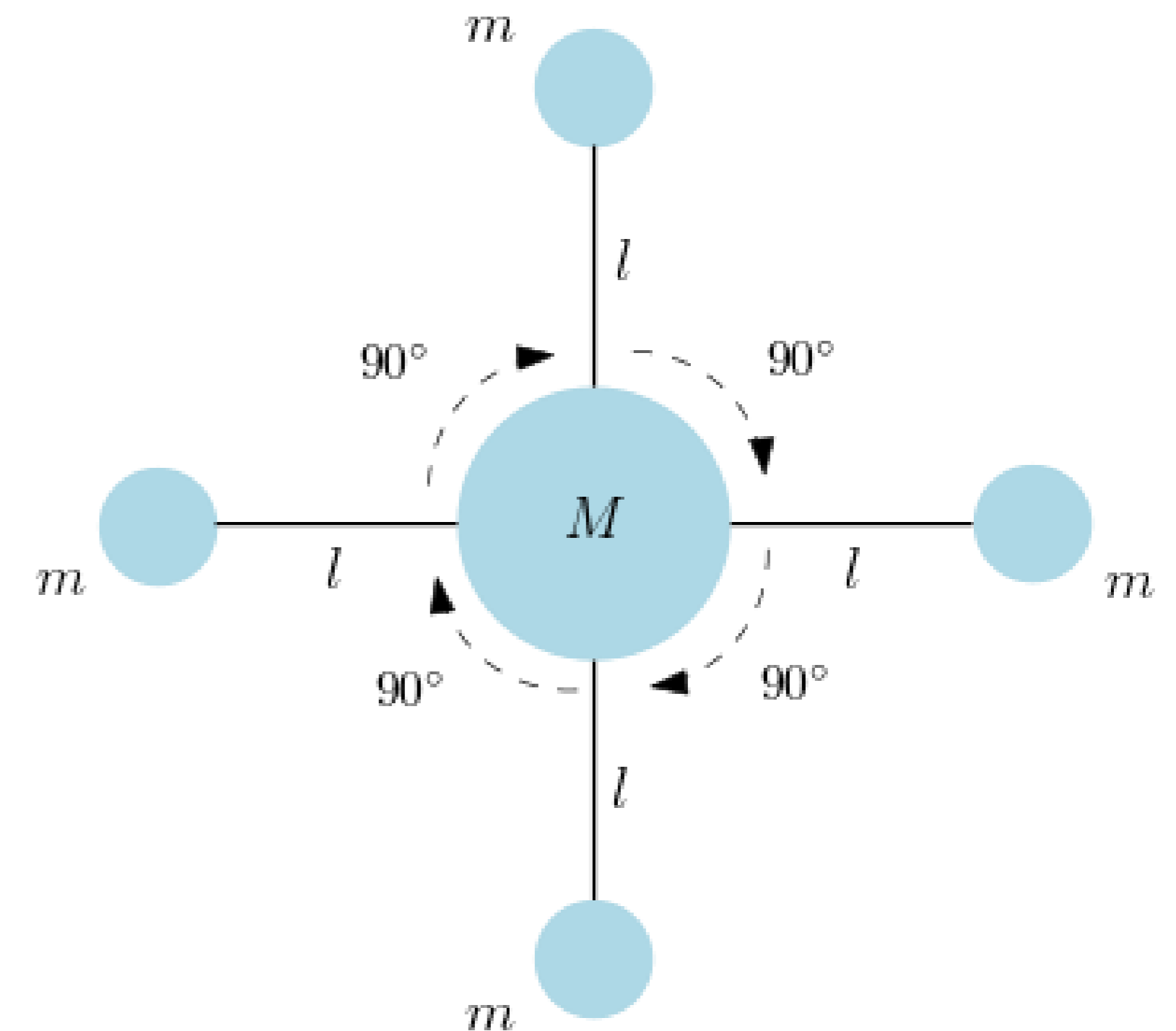
## Equação Geral:

$$\begin{cases} \vec{F} = M_{Total} \dot{\vec{V}} + \vec{\Omega} \times M_{Total} \vec{V} \\ \vec{\tau} = J \dot{\vec{\Omega}} + \vec{\Omega} \times (J \vec{\Omega}) \end{cases}$$

## Matriz de Inércia:

$$J = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot m \cdot l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot m \cdot l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \cdot m \cdot l^2 \end{bmatrix}$$

Massas e braços do quadricóptero:





## Força Gravitacional - Z

$$F_P = M_{Total} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix}^T$$

## Força de Empuxo

Hipóteses; Bernoulli; Somatório de Empuxos

$$E_{Total,B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_e (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{bmatrix}$$

## Força de Arrasto

Resistência do ar; Desprezível para as forças

$$F_{ar} = \frac{1}{2} \rho C_a \begin{bmatrix} A_{ref,X} \cdot \dot{X}^2 \\ A_{ref,Y} \cdot \dot{Y}^2 \\ A_{ref,Z} \cdot \dot{Z}^2 \end{bmatrix}$$

**Momento da reação das hélices:**  $\tau_{Mi} = \frac{1}{2} \rho C_a A_{\text{ref}} R (\omega R)^2 = K_a \omega^2$



$$M_{\text{guinada}} = (\tau_{M2} + \tau_{M4}) - (\tau_{M1} + \tau_{M3}) = K_a [(\omega_2^2 + \omega_4^2) - (\omega_1^2 + \omega_3^2)]$$

**Diferença entre empuxos:  
Hélices**

$$M_{\text{rolagem}} = E_3 l - E_1 l = C_e l (\omega_2^2 - \omega_4^2)$$

$$M_{\text{arfagem}} = E_2 l - E_4 l = C_e l (\omega_3^2 - \omega_1^2)$$

**Tentativa de alinhamento do eixo:  
Inércia dos rotores**

$$M_{\text{Gir}} = \vec{\Omega} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_r \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} J_r \omega_i & -\dot{\phi} J_r \omega_i & 0 \end{bmatrix}$$

# Método de Newton-Euler: Matriz de Rotação

$$R = R_Z(\psi)R_Y(\theta)R_X(\phi) = \begin{bmatrix} C\psi C\theta & C\psi S\theta S\phi - S\psi C\phi & C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi \\ S\psi C\theta & S\psi S\theta S\phi + C\psi C\phi & S\psi S\theta C\phi - S\phi C\psi \\ -S\theta & C\theta S\phi & C\theta C\phi \end{bmatrix}$$

Referencial Não Inercial  
 $B(x, y, z)$



Referencial Inercial  
 $E(X, Y, Z)$

# Método de Newton-Euler: Equações Dinâmicas (Forças)

$$M_{Total}\dot{V} + (\vec{\Omega} \times (M_{Total}\vec{V})) = F_P - F_{ar} + R.E_{Total,B}$$



**Despreza Coriolis e Força de arrasto; entrada  $u_1$**



$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \frac{1}{M_{Total}} u_1 \begin{bmatrix} C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi \\ S\psi S\theta C\phi - S\phi C\psi \\ C\theta C\phi \end{bmatrix}$$

# Método de Newton-Euler: Equações Dinâmicas (Momentos)

$$J\Omega = -\Omega \times J\Omega - M_{gir} + M_{rot}$$



**Entrada  $u_3, u_3$  e  $u_4$ ;  
Forças de Coriolis**



$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\psi}\dot{\theta}(I_y - I_z)}{I_x} \\ \frac{\dot{\phi}\dot{\psi}(I_z - I_x)}{I_y} \\ \frac{\dot{\theta}\dot{\phi}(I_x - I_y)}{I_z} \end{bmatrix} - J_r \omega_i \begin{bmatrix} \frac{\dot{\theta}}{I_x} \\ \frac{-\dot{\phi}}{I_y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{u_2}{I_x} \\ \frac{u_3}{I_y} \\ \frac{u_4}{I_z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_P \\ \tau_\eta \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} \quad L = E_C + E_P$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_P \\ \tau_\eta \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} \quad L = E_C + E_P$$

$$\longrightarrow E_p = mgZ$$

$$\longrightarrow E_{c\text{Trans}} = \frac{1}{2} \int \dot{P}^2(X, Y, Z) dm = \frac{m}{2} \dot{P}^T \dot{P}$$

$$\longrightarrow E_{c\text{Rot}} = \frac{1}{2} I_x (\dot{\phi} - \dot{\psi} \cdot S\theta)^2 + \frac{1}{2} I_y (\dot{\theta} \cdot C\phi + \dot{\psi} \cdot S\phi \cdot C\theta)^2 + \frac{1}{2} I_z (\dot{\theta} \cdot S\phi - \dot{\psi} \cdot C\phi \cdot C\theta)^2$$

## Parcela rotacional

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \tau_{\phi} & \ddot{\phi} &= \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\psi} \dot{\theta} - \frac{J_r \dot{\theta}(\omega_i)}{I_x} + \frac{u_2}{I_x} \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \tau_{\theta} \longrightarrow & \ddot{\theta} &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\psi} \dot{\phi} + \frac{J_r \dot{\phi}(\omega_i)}{I_y} + \frac{u_3}{I_y} \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= \tau_{\psi} & \ddot{\psi} &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{u_4}{I_z}
 \end{aligned}$$

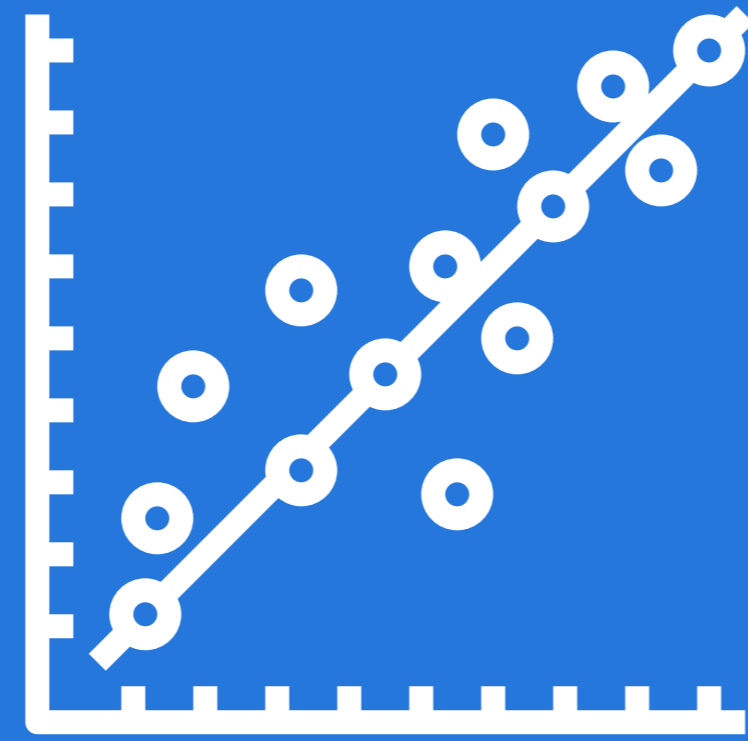


## Parcela rotacional

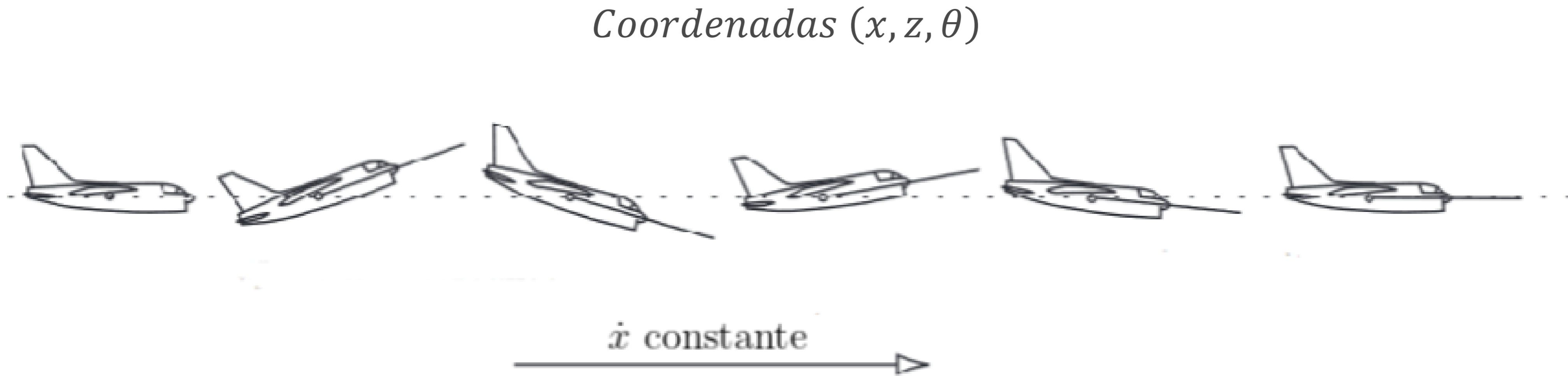
$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \tau_{\phi} \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \tau_{\theta} \longrightarrow \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= \tau_{\psi}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 \ddot{\phi} &= \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\psi} \dot{\theta} - \frac{J_r \dot{\theta}(\omega_i)}{I_x} + \frac{u_2}{I_x} \\
 \ddot{\theta} &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\psi} \dot{\phi} + \frac{J_r \dot{\phi}(\omega_i)}{I_y} + \frac{u_3}{I_y} \\
 \ddot{\psi} &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{u_4}{I_z}
 \end{aligned}$$

## Parcela translacional

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{P}} \right) - \frac{\partial L}{\partial P} &= f_P \longrightarrow \\
 \ddot{x} &= \frac{1}{m} (\cos \psi \operatorname{sen} \theta \cos \phi + \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi) u_1 \\
 \ddot{y} &= \frac{1}{m} (\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \cos \phi - \cos \psi \operatorname{sen} \phi) u_1 \\
 \ddot{z} &= -g + \frac{1}{m} (\cos \theta \cos \phi) u_1
 \end{aligned}$$



Linearização



$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Avanço} \\ \textit{Ganho de Altura} \\ \textit{Short - Period} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot \text{sen } \theta \cdot u_1 \\ \ddot{z} = -g + \frac{1}{m} \cdot \text{cos } \theta \cdot u_1 \\ \ddot{\theta} = \frac{u_3}{I_y} \end{array} \right.$$

## Espaço de estados

$$X = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & z & \dot{z} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m} \cdot \text{sen } x_5 \cdot u_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -g + \frac{1}{m} \cdot \text{cos } x_5 \cdot u_1 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = \frac{u_3}{I_y} \end{cases}$$

## Modelo linear

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = A \cdot \tilde{X} + B \cdot \tilde{U} \\ \tilde{Y} = C \cdot \tilde{X} + D \cdot \tilde{U} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - \bar{x} \\ \tilde{u} = u - \bar{u} \end{cases}$$

## Expansão por Taylor

$$\dot{\tilde{x}} = f(x, u)$$

$$\dot{\tilde{x}} \cong f(\bar{x}, \bar{u}) + \left[ \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot (x - \bar{x}) + \left[ \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot (u - \bar{u})$$

Como no equilíbrio  $f(x, u) = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ , temos:

$$\dot{\tilde{x}} \cong \left[ \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot (x - \bar{x}) + \left[ \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot (u - \bar{u})$$

Fazendo o Jacobiano:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}} ; B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}}$$

## Funções do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = x_2 \\ f_2 = \frac{1}{m} \cdot \text{sen } x_5 \cdot u_1 \\ f_3 = x_4 \\ f_4 = -g + \frac{1}{m} \cdot \text{cos } x_5 \cdot u_1 \\ f_5 = x_6 \\ f_6 = \frac{u_3}{I_y} \end{array} \right.$$

Ponto estacionário de operação:

$$\bar{X} = [\bar{x} \ \dot{\bar{x}} \ \bar{z} \ \dot{\bar{z}} \ \bar{\theta} \ \dot{\bar{\theta}}]^T = [0 \ 0 \ \bar{z} \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

# Linearização

Definindo o vetor  $\bar{U}$ :

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 & \bar{u}_4 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = C_e \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) = mg \\ \bar{u}_2 = C_e l \cdot (\omega_4^2 - \omega_2^2) = 0 \\ \bar{u}_3 = C_e l \cdot (\omega_3^2 - \omega_1^2) = 0 \\ \bar{u}_4 = K_a \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) = 0 \end{cases}$$

Reescrevendo o vetor  $\bar{U}$  para o plano  $XZ$ :

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} mg & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} \end{bmatrix}$$

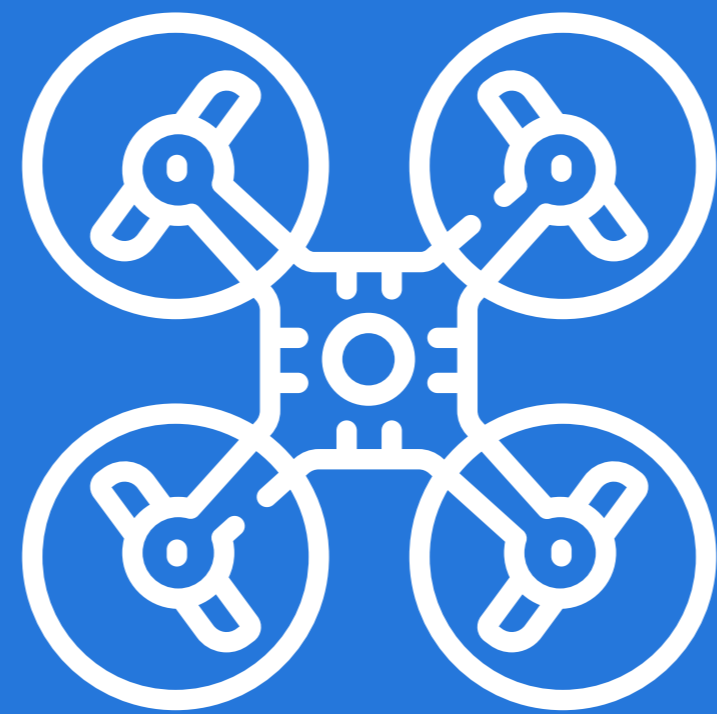
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo na forma  $\dot{\tilde{x}} = A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{u}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_5 \\ \dot{\tilde{x}}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_3 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = g \cdot \tilde{x}_5 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_4 = \frac{1}{m} \cdot \tilde{u}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_5 = \tilde{x}_6 \\ \dot{\tilde{x}}_6 = \frac{1}{I_y} \tilde{u}_3 \end{array} \right.$$



# Análise do Sistema



Parâmetro	Valor
$M_{\text{Total}}$ [kg]	0,82
$l$ [m]	0,29
$g$ [m/s <sup>2</sup> ]	9,81
$I_y$ [kg · m <sup>2</sup> ]	0,0081
$C_e$	0,1154

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot \text{sen } \theta \cdot u_1$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{1}{m} \cdot \text{cos } \theta \cdot u_1$$

$$\ddot{\theta} = \frac{u_3}{I_y}$$

Parâmetro	Valor
$M_{\text{Total}} [kg]$	0,82
$l [m]$	0,29
$g [m/s^2]$	9,81
$I_y [kg \cdot m^2]$	0,0081
$C_e$	0,1154

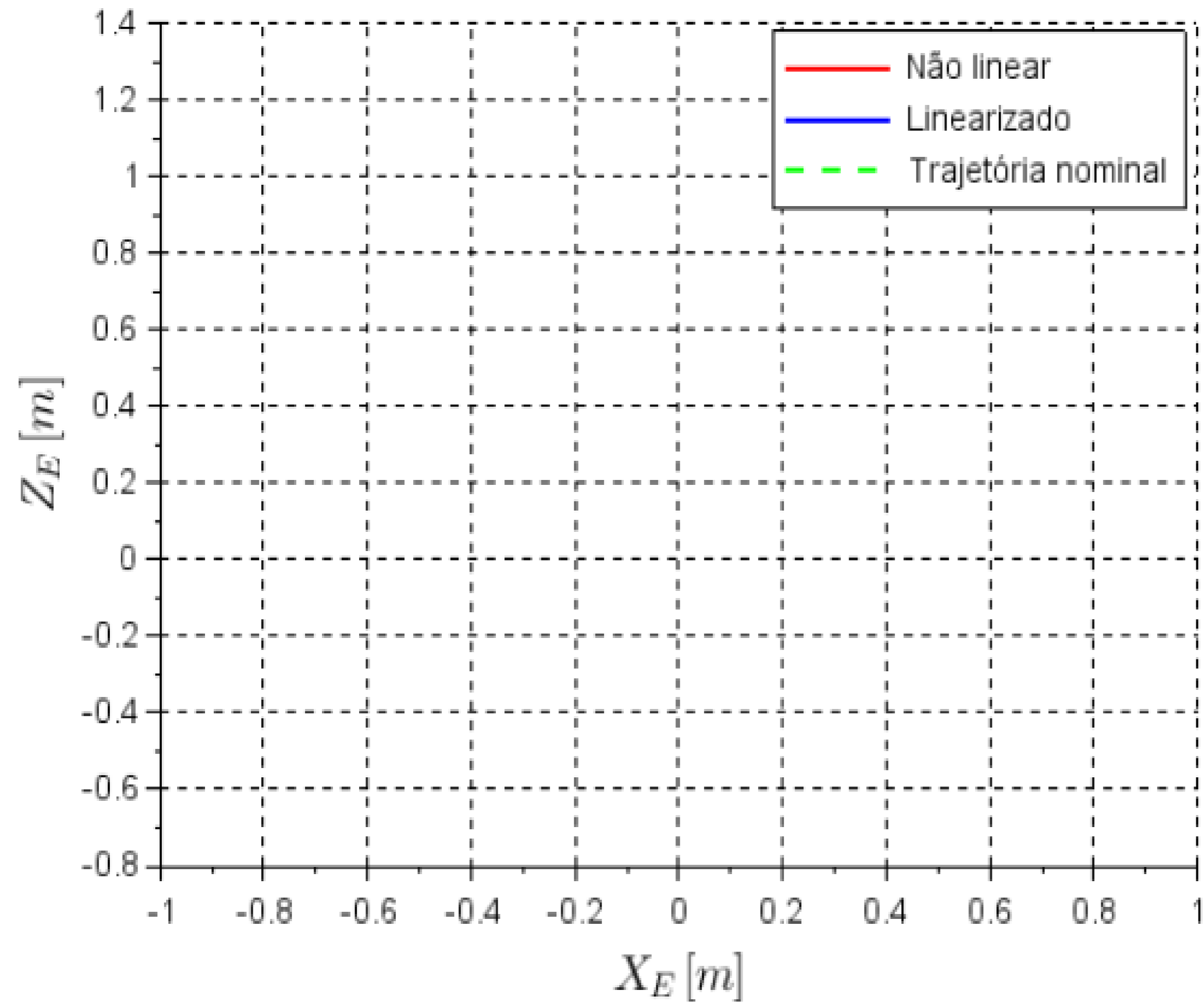
$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot \text{sen } \theta \cdot u_1$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{1}{m} \cdot \text{cos } \theta \cdot u_1$$

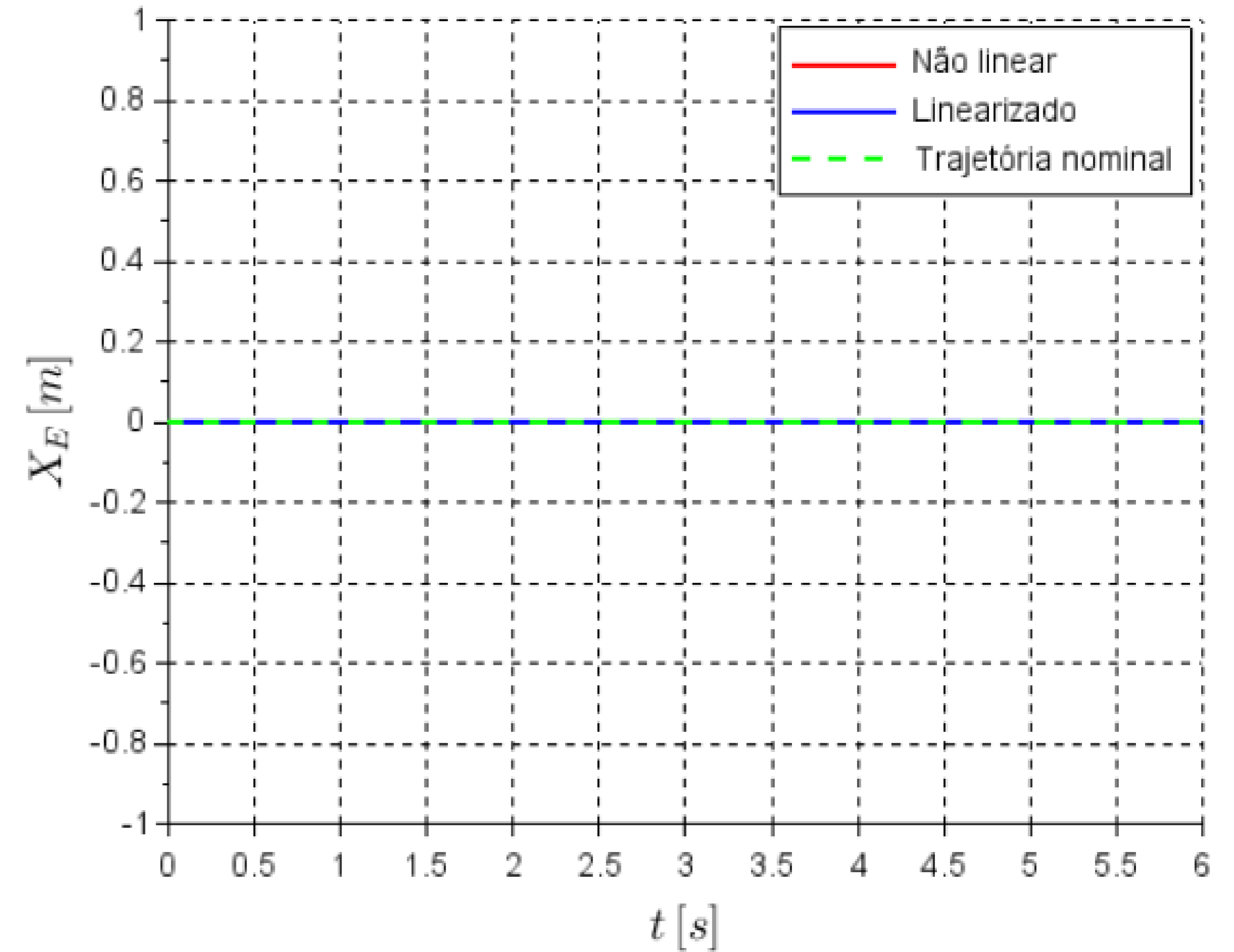
$$\ddot{\theta} = \frac{u_3}{I_y}$$

Cenários	$X_0[m]$	$\dot{X}_0[m/s]$	$Z_0[m]$	$\dot{Z}_0[m/s]$	$\theta_0[rad]$	$\dot{\theta}_0[rad/s]$	$u_1[N]$	$u_3[Nm]$
Cenário 0	0	0	0,3	0	0	0	$mg$	0
Cenário 1	0	0	0,3	0	0,01	0	$\frac{mg}{\text{cos } \theta_0}$	0
Cenário 2	0	0	0,3	0	0	0	$1,1mg$	0
Cenário 3	0	0	0,3	0	0	0	$1,1mg$	$1,004 \cdot 10^{-5}$

## Trajétoria ( $Z - X$ )

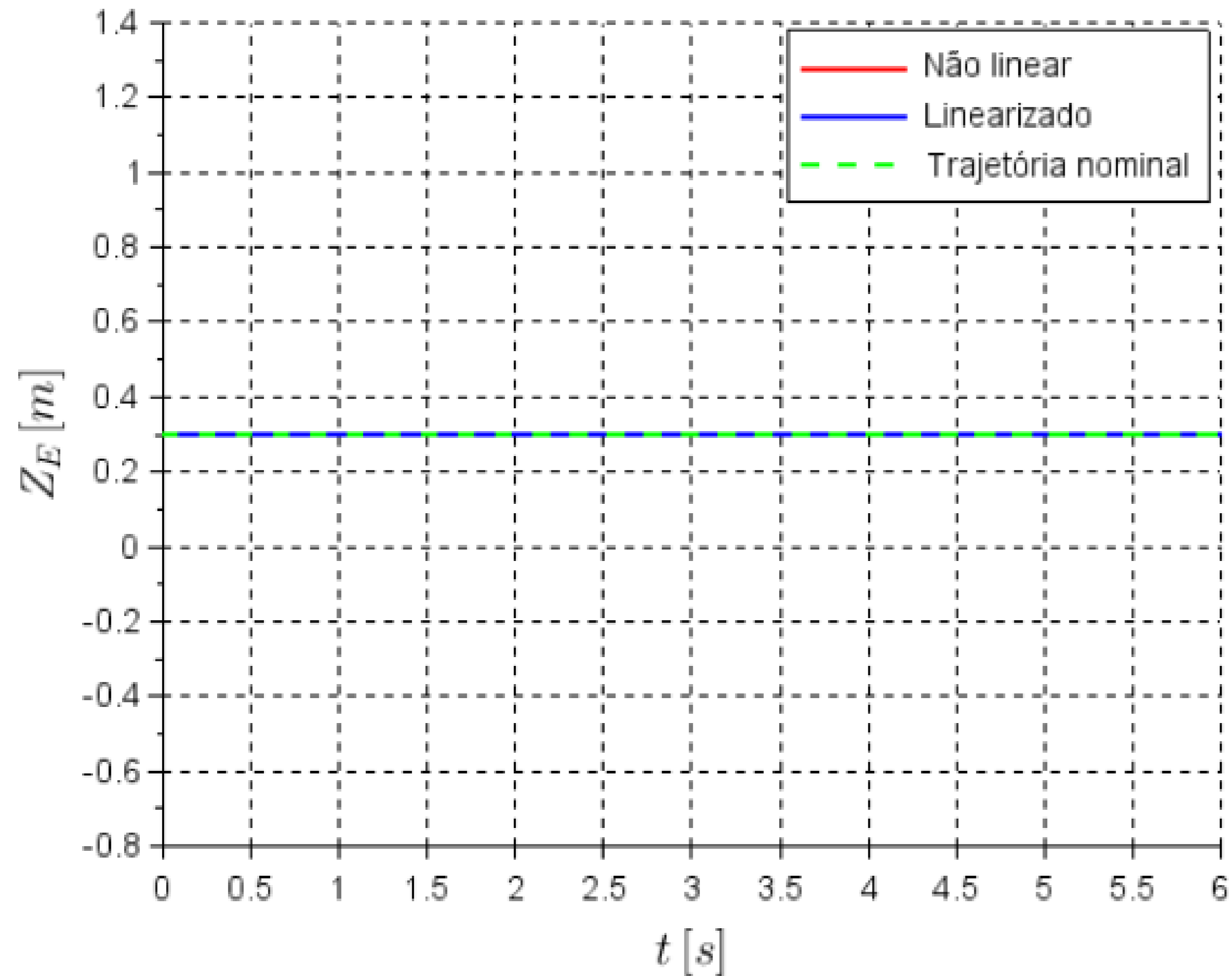


## Deslocamento em $X$

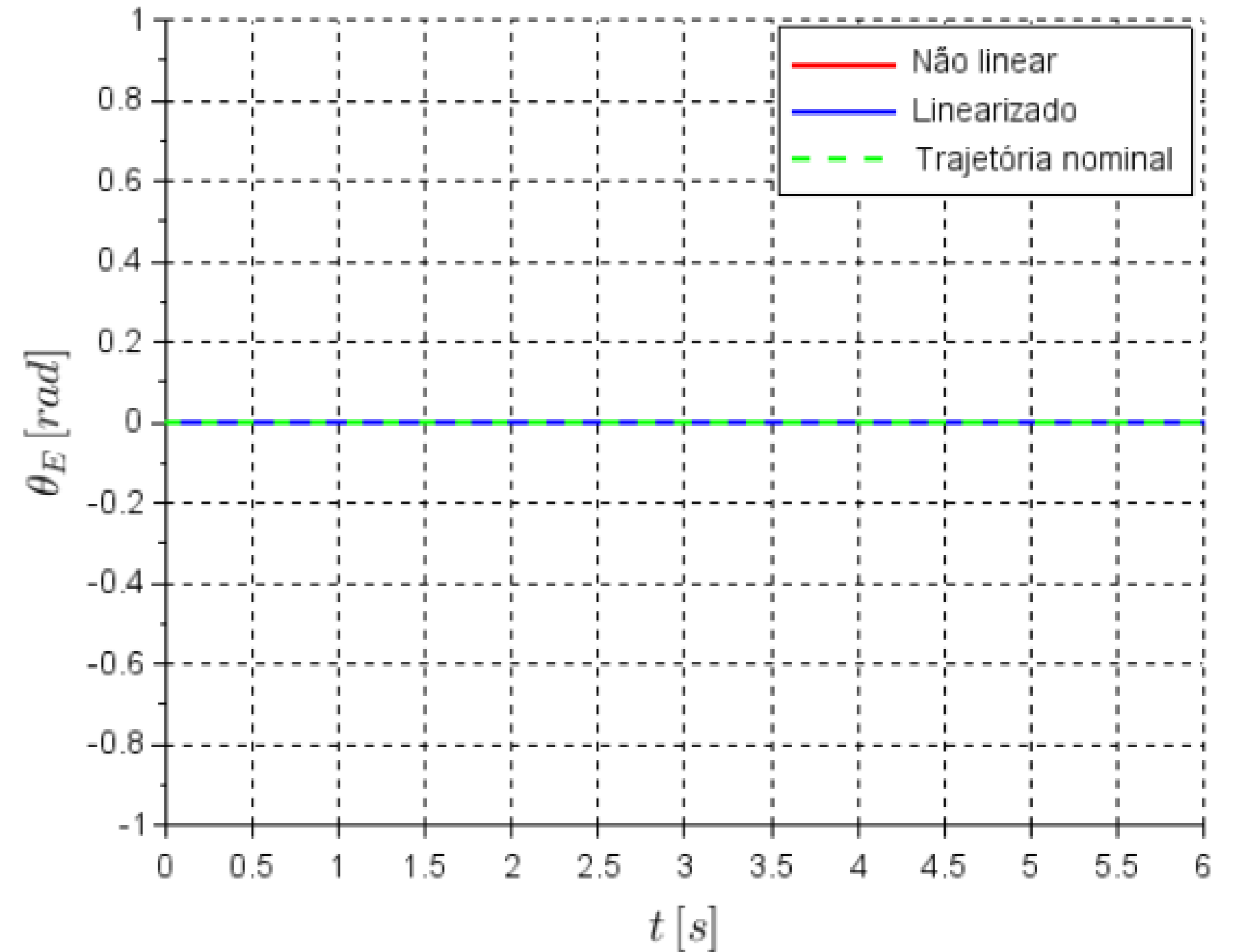


# Cenário 0 – Teste

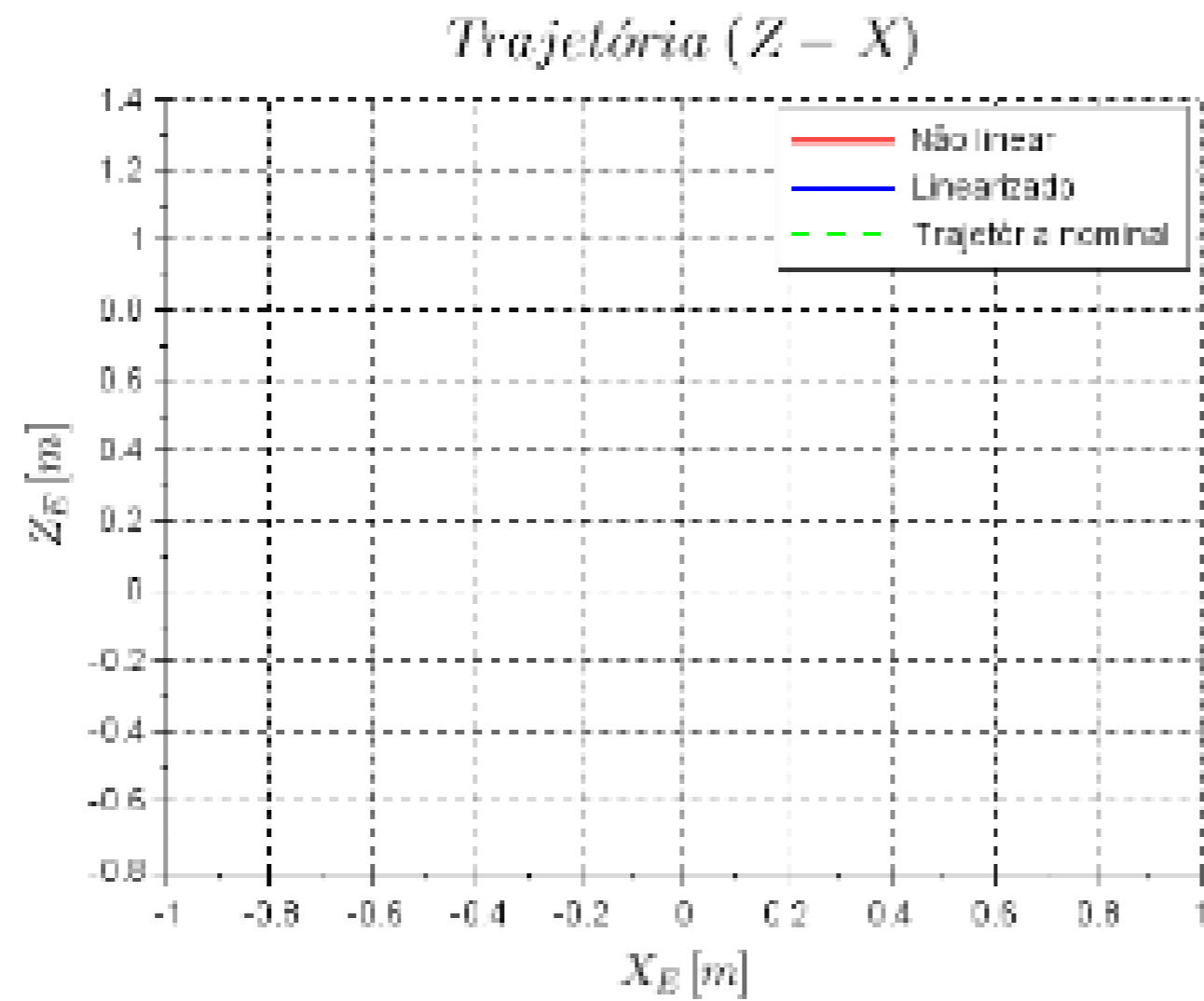
*Deslocamento em Z*



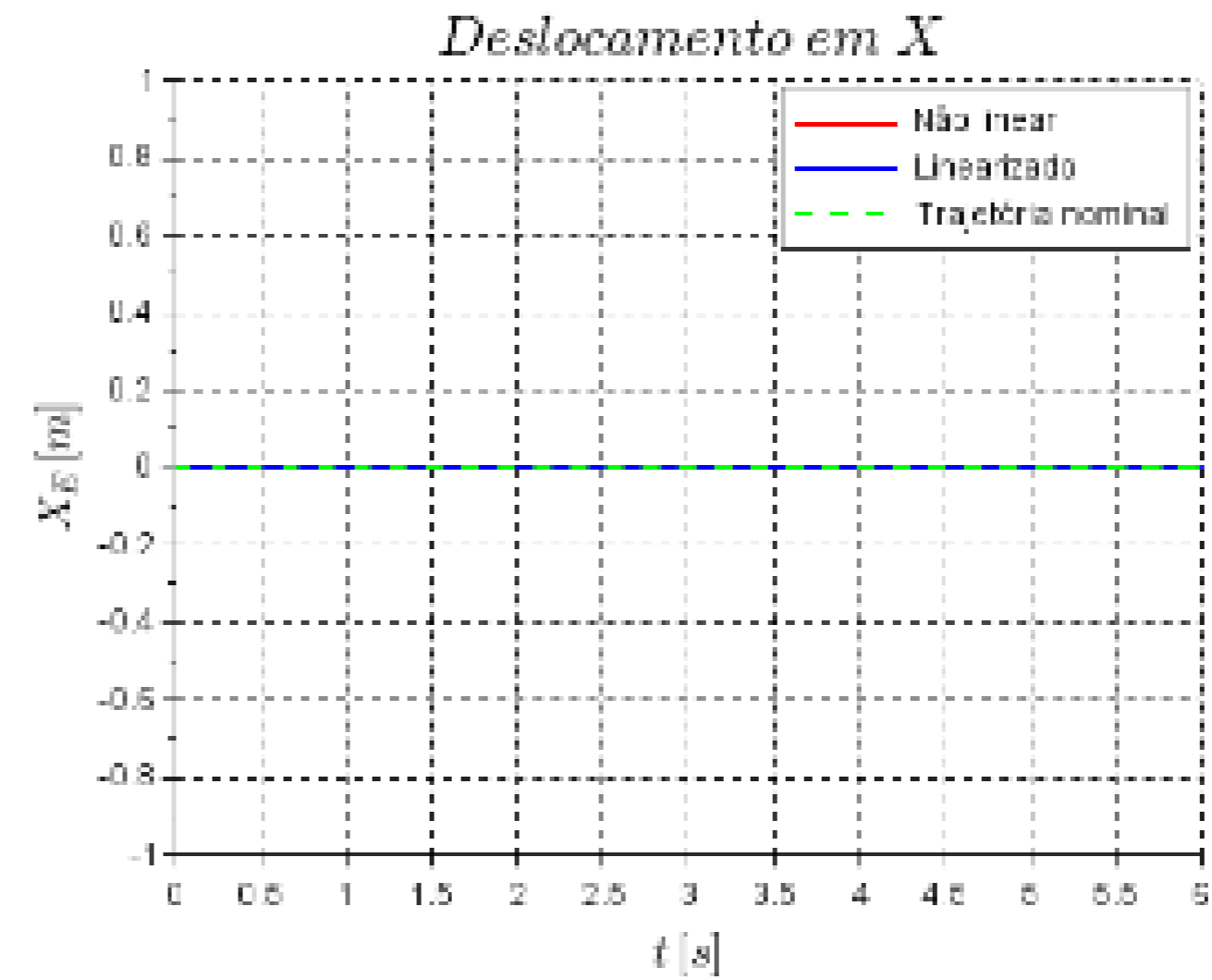
*Ângulo de Arfagem*



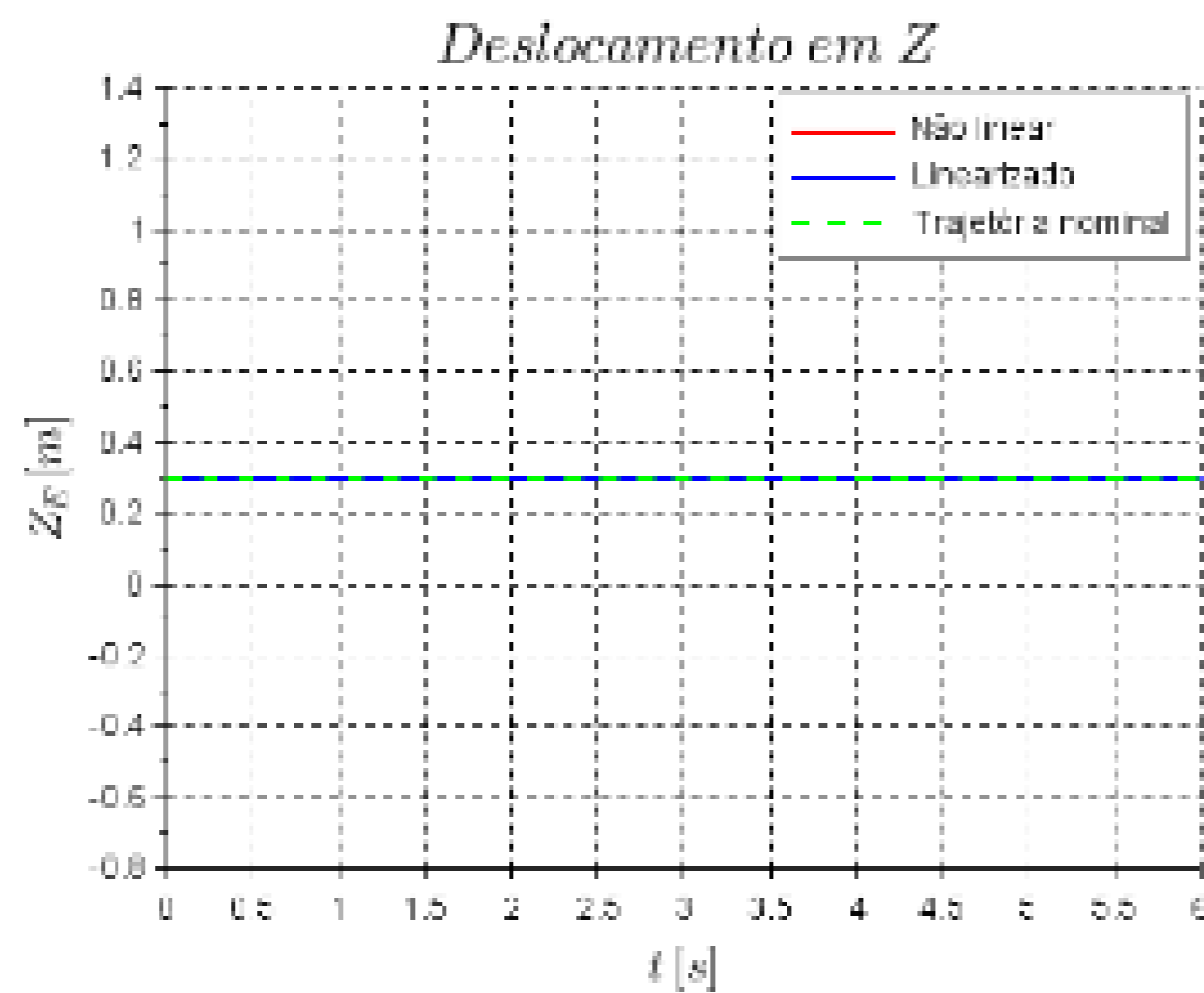
# Cenário 0 – Teste



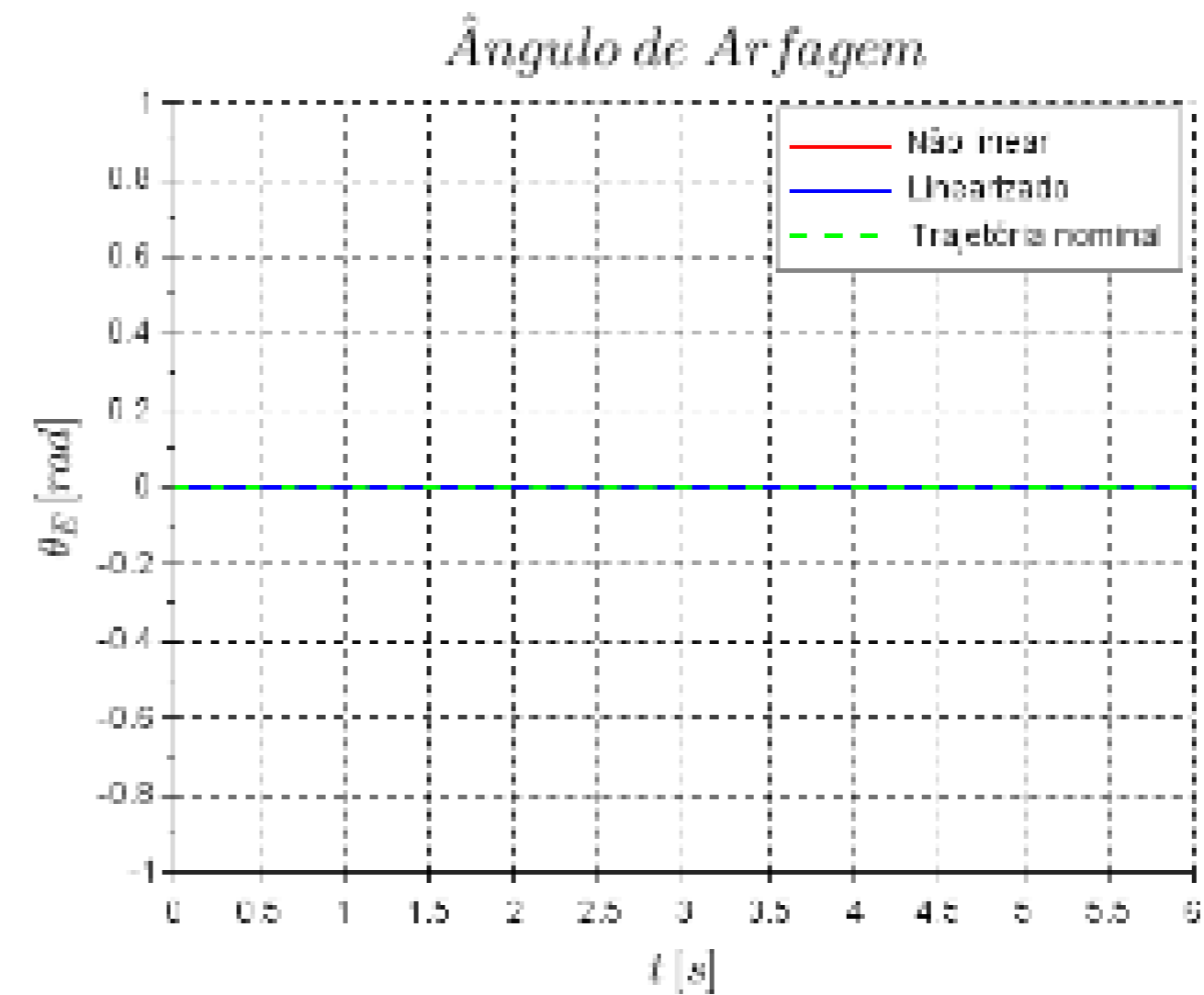
(a) Trajetória em XZ



(b) Deslocamento em X



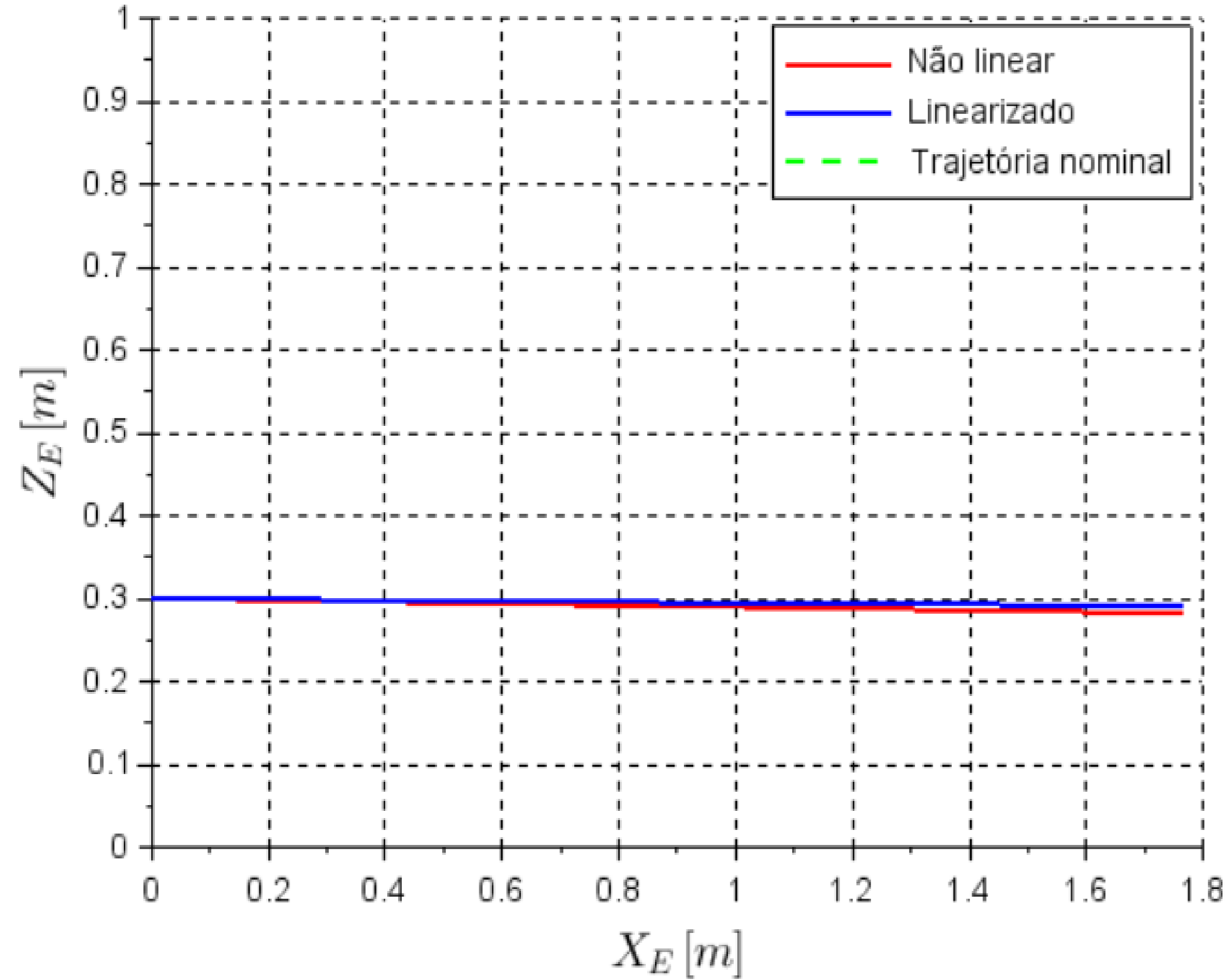
(c) Deslocamento em Z



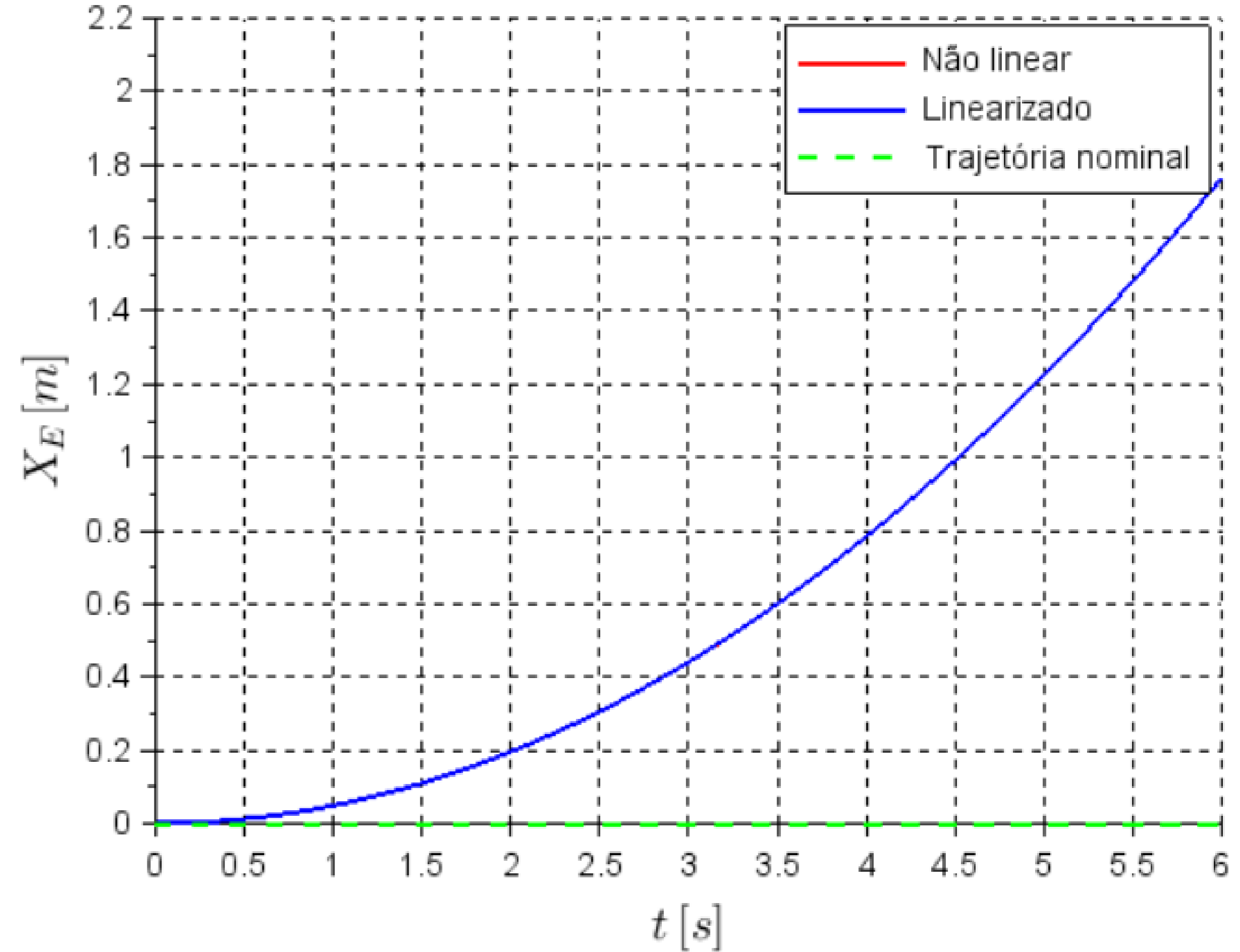
(d) Ângulo de Arfagem

# Cenário 1 – Movimento em X

*Trajétória (Z – X)*

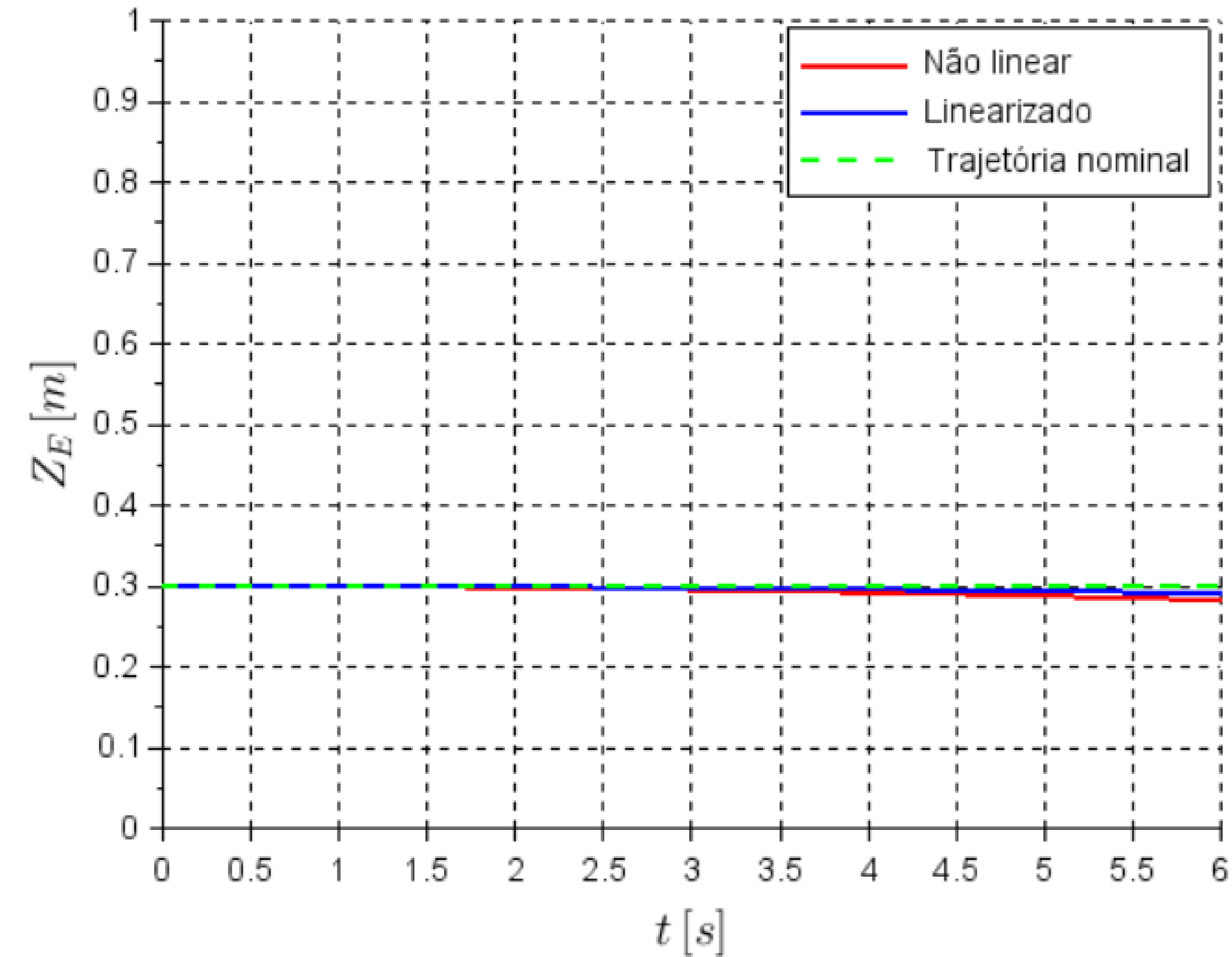


*Deslocamento em X*

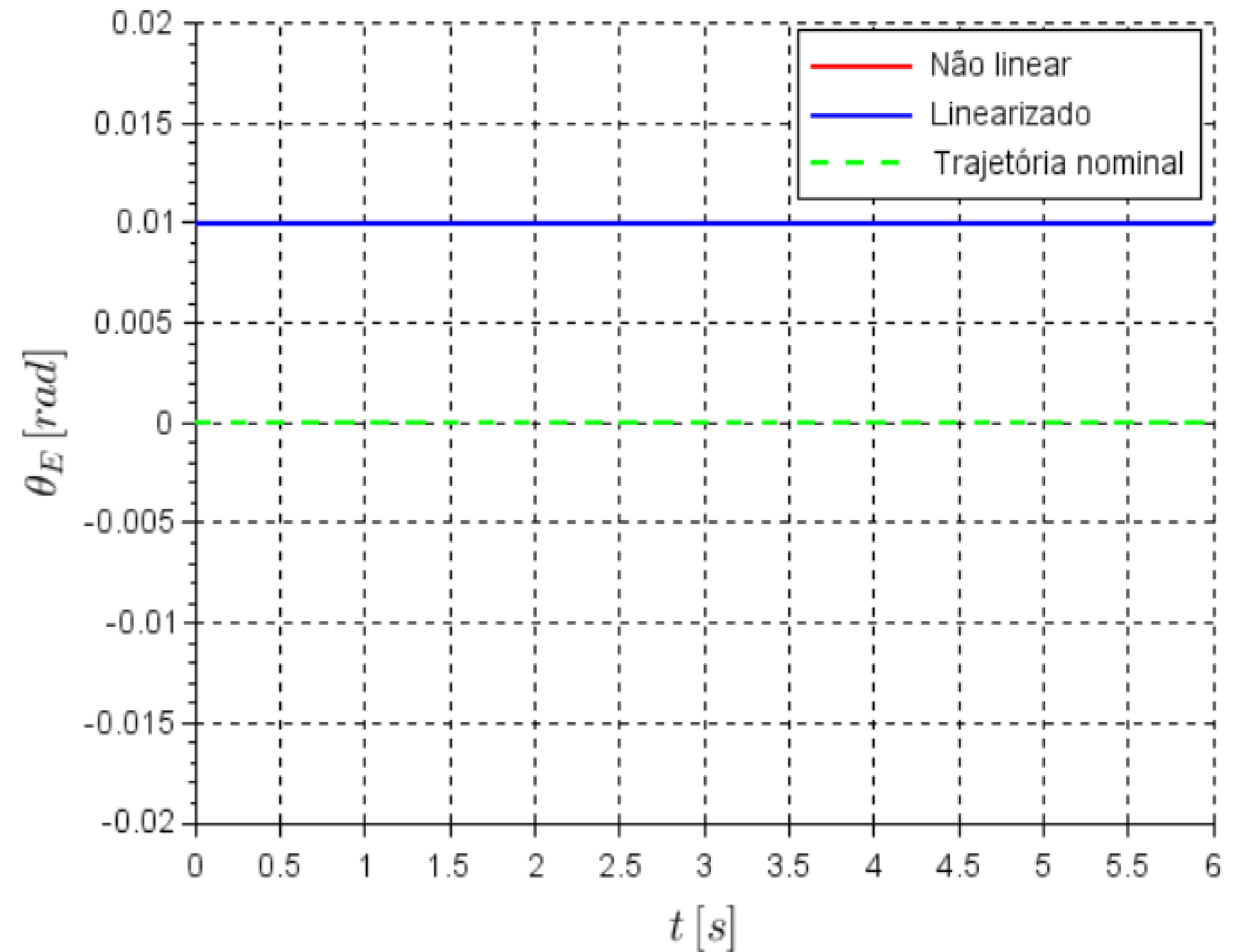


# Cenário 1 – Movimento em X

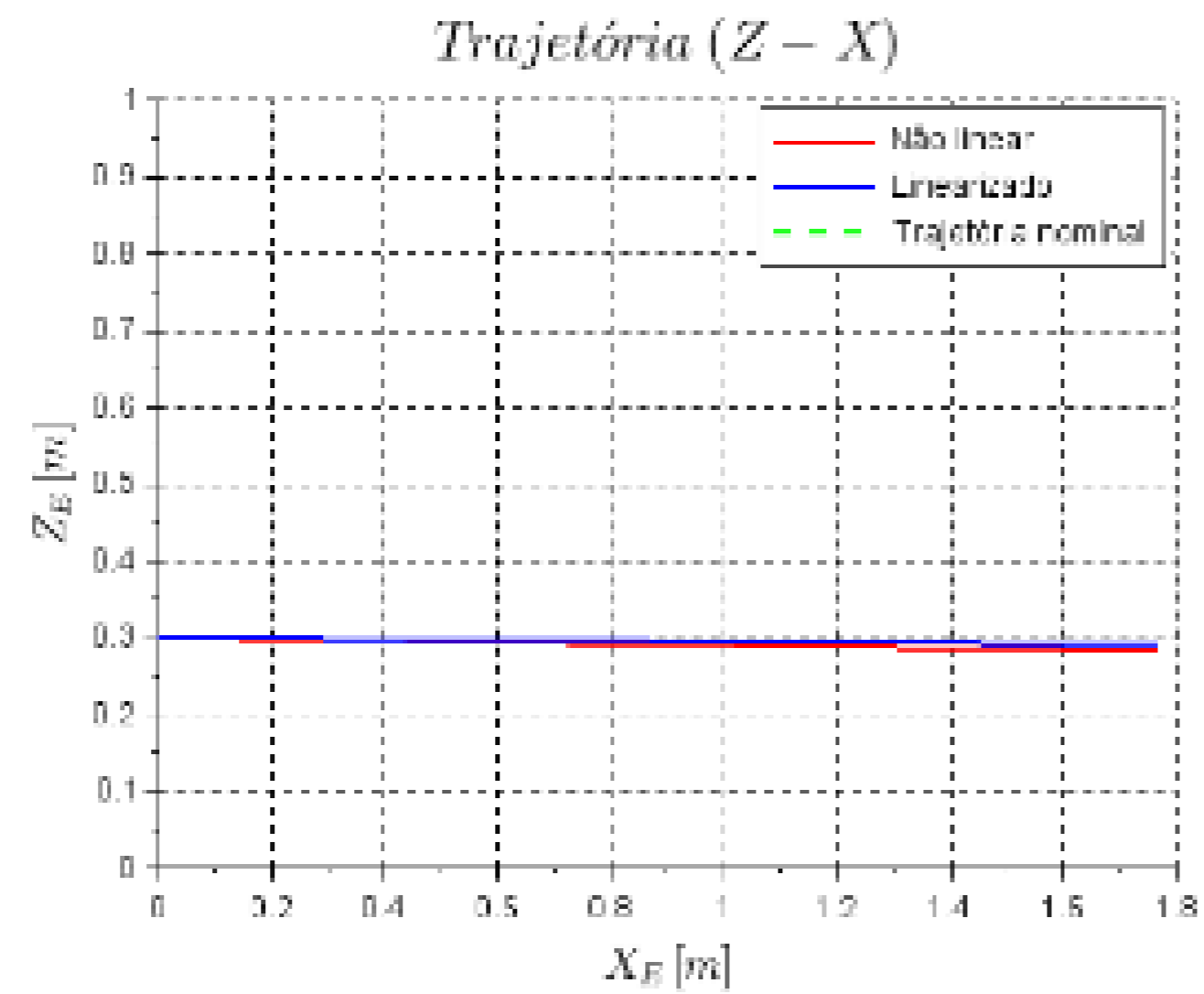
*Deslocamento em Z*



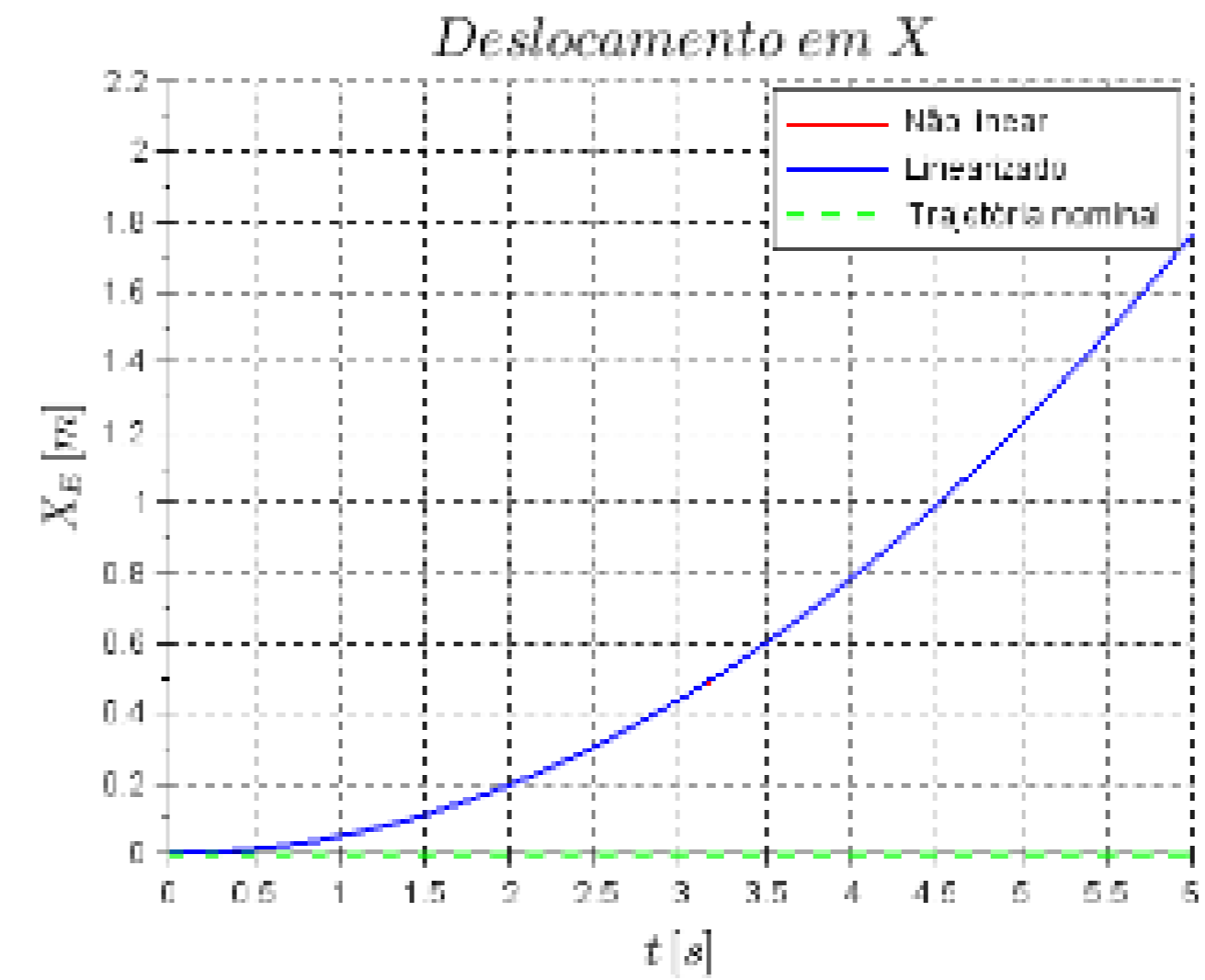
*Ângulo de Arfagem*



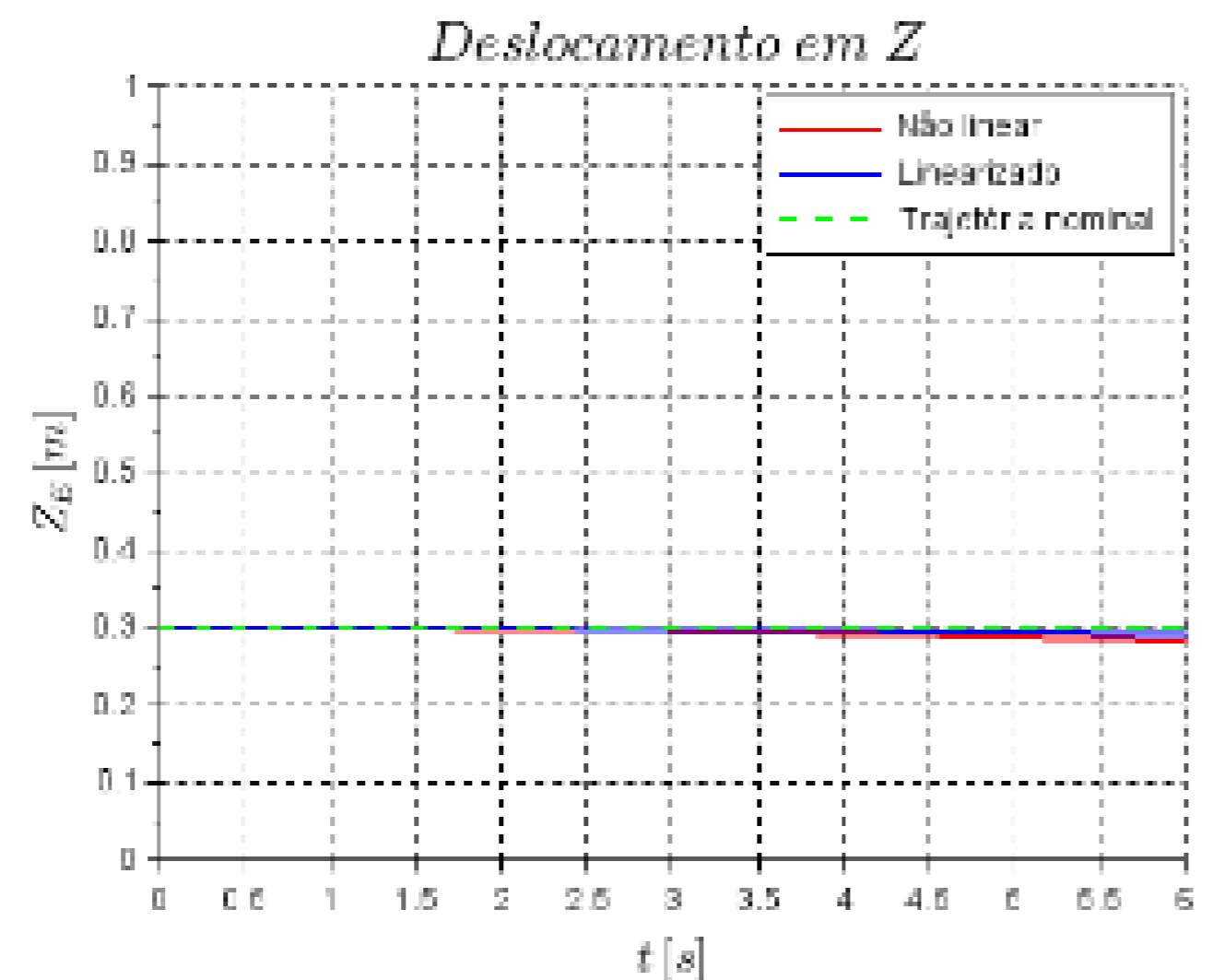
# Cenário 1 – Movimento em X



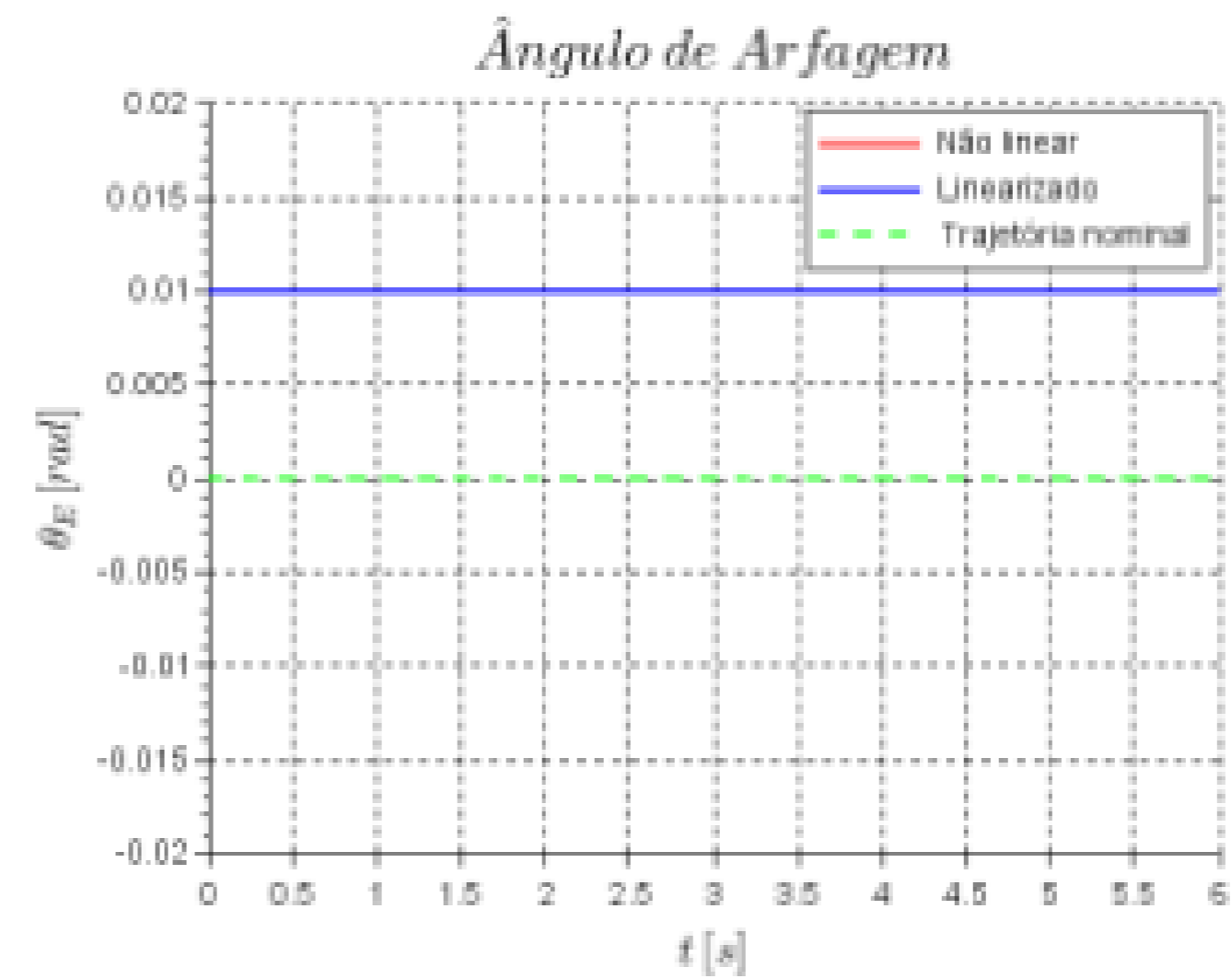
(a) Trajetória em XZ



(b) Deslocamento em X



(c) Deslocamento em Z

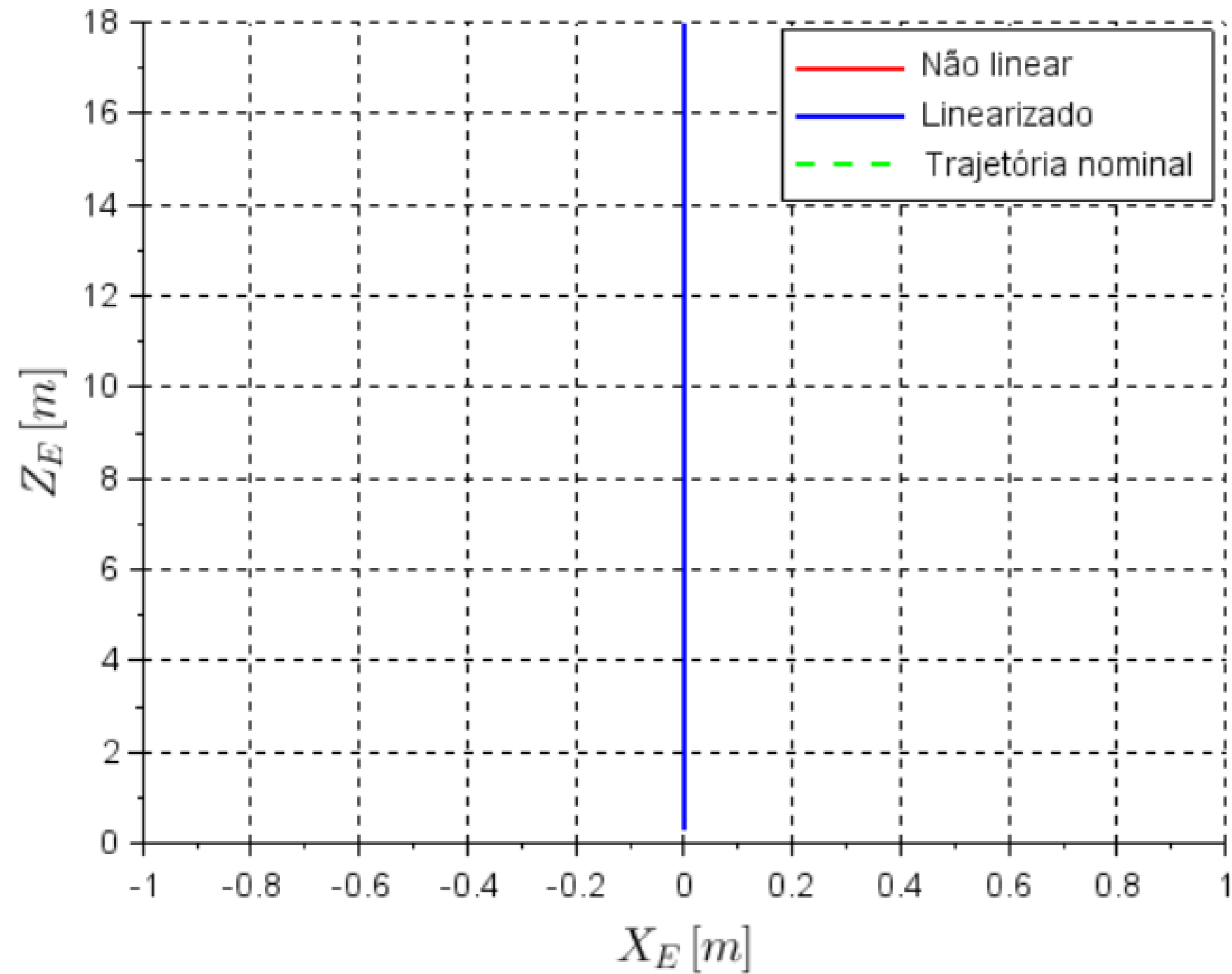


(d) Ângulo de Arfagem

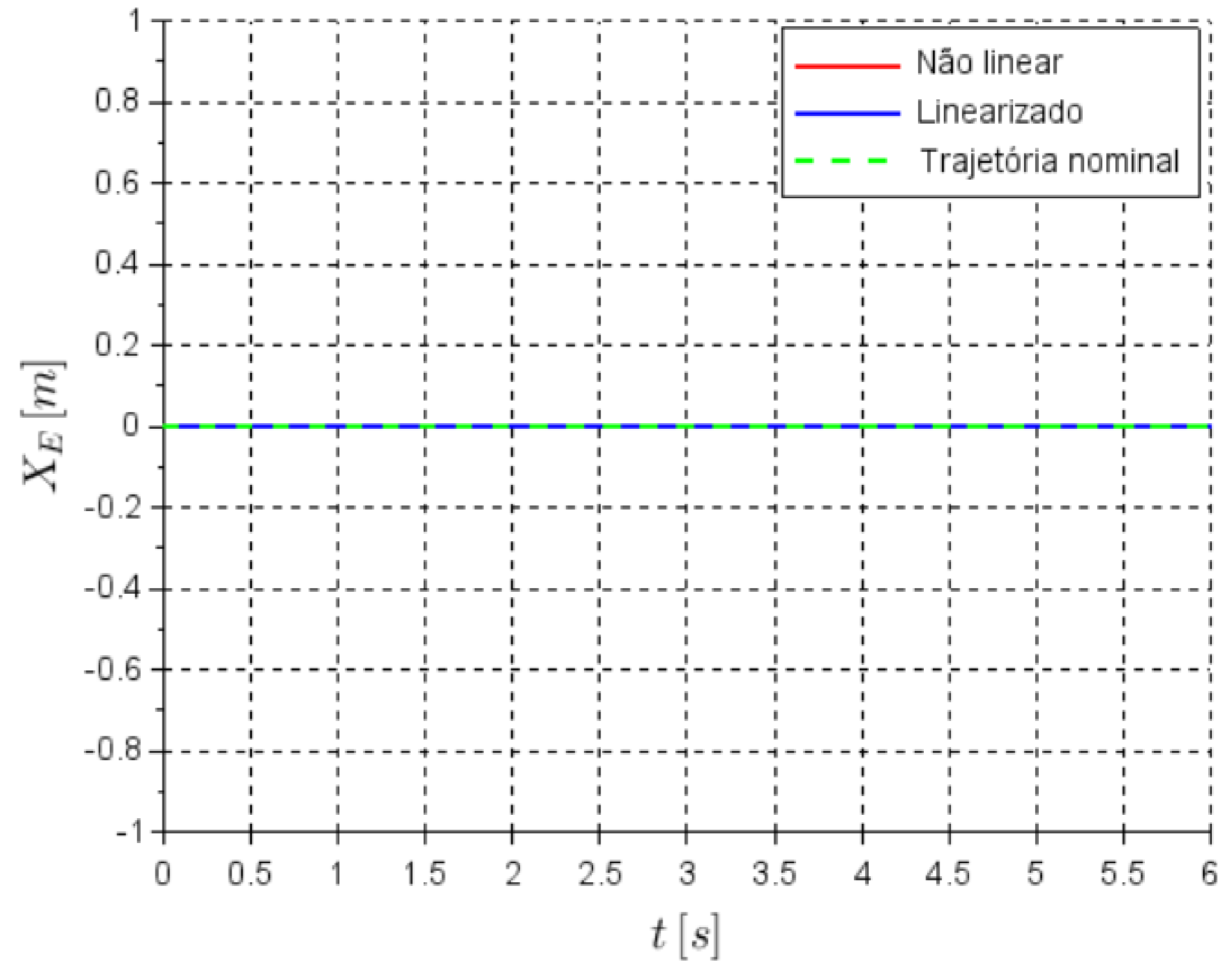


## Cenário 2 – Movimento em Z

*Trajétoria (Z – X)*

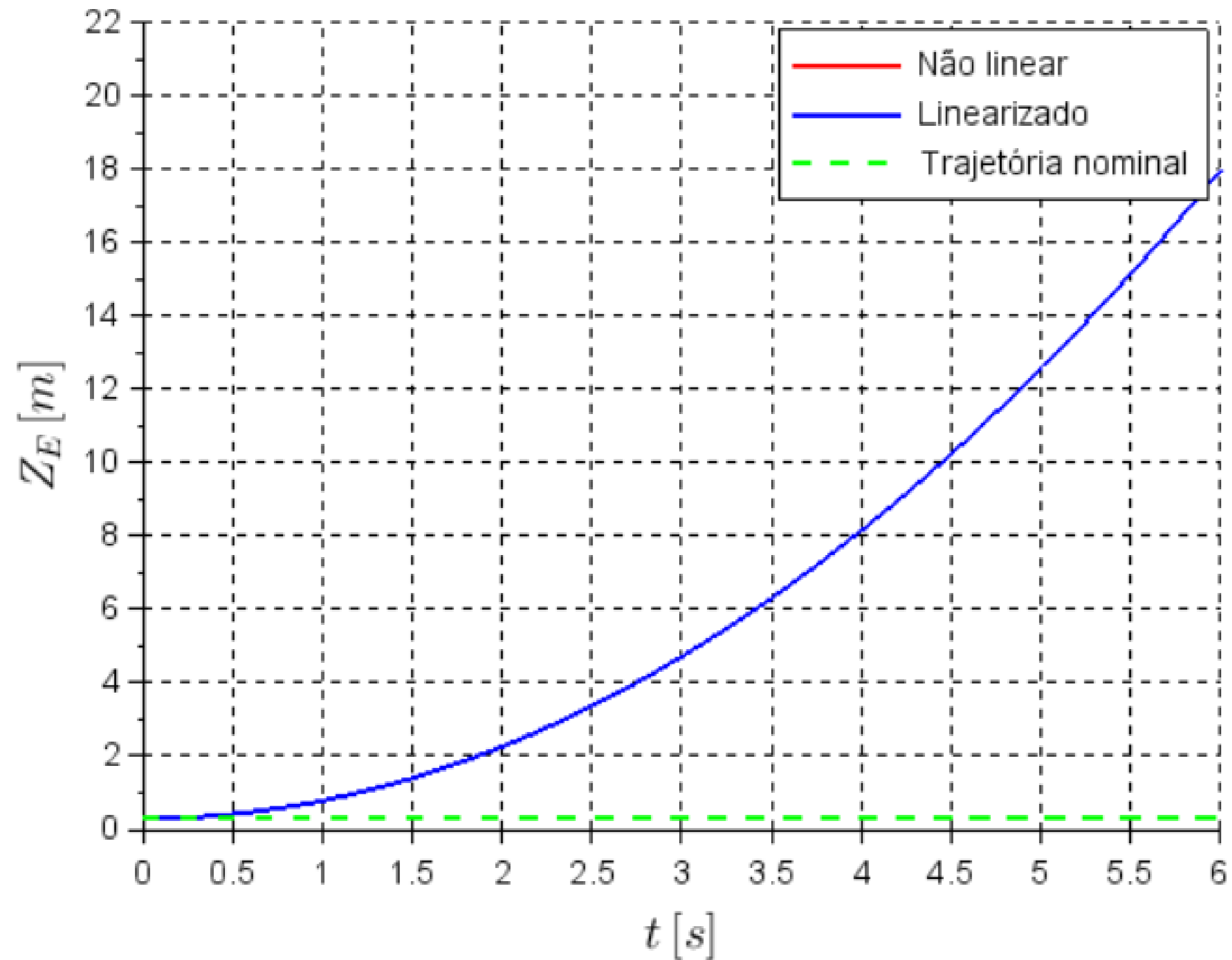


*Deslocamento em X*

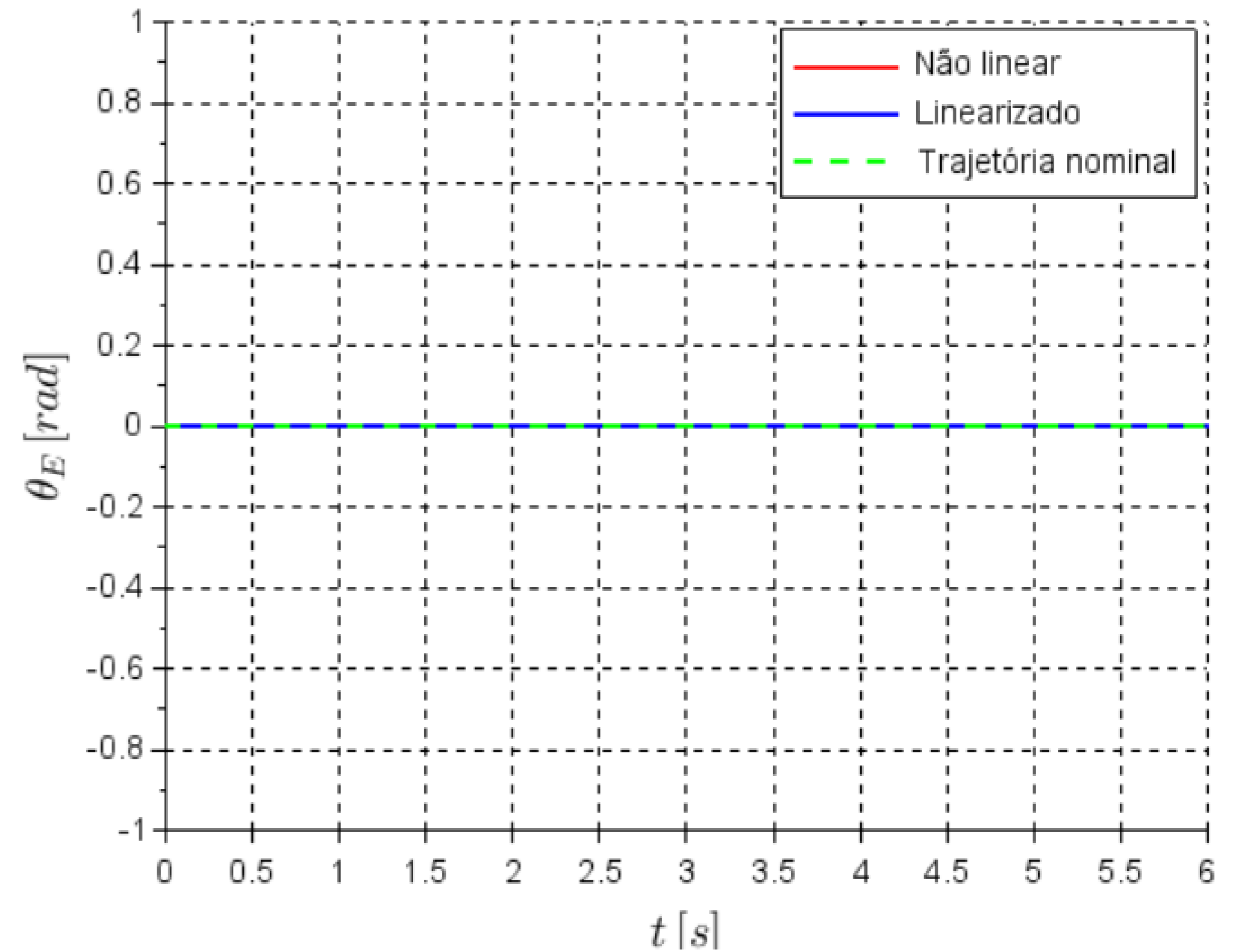


## Cenário 2 – Movimento em Z

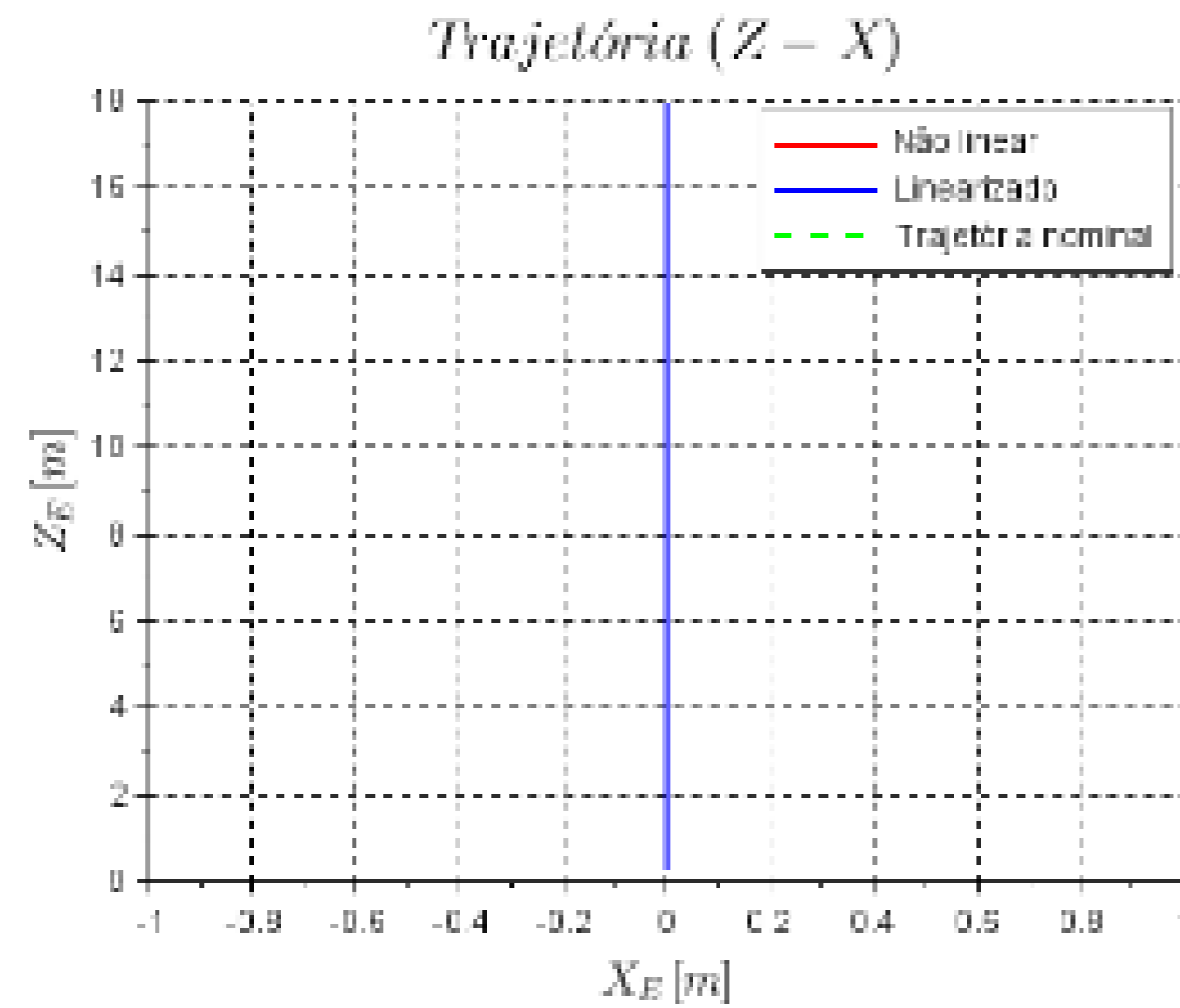
*Deslocamento em Z*



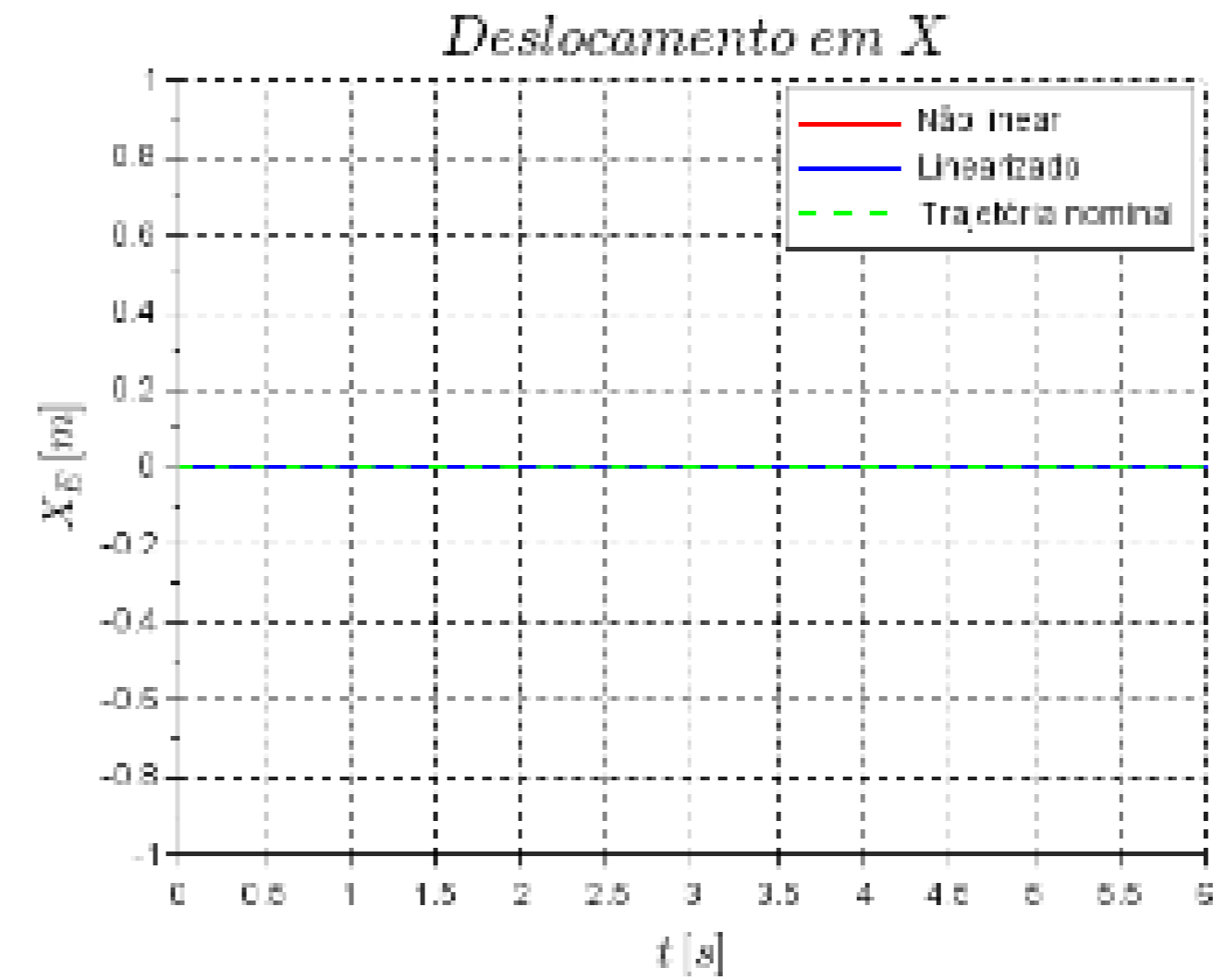
*Ângulo de Arfagem*



# Cenário 2 – Movimento em Z



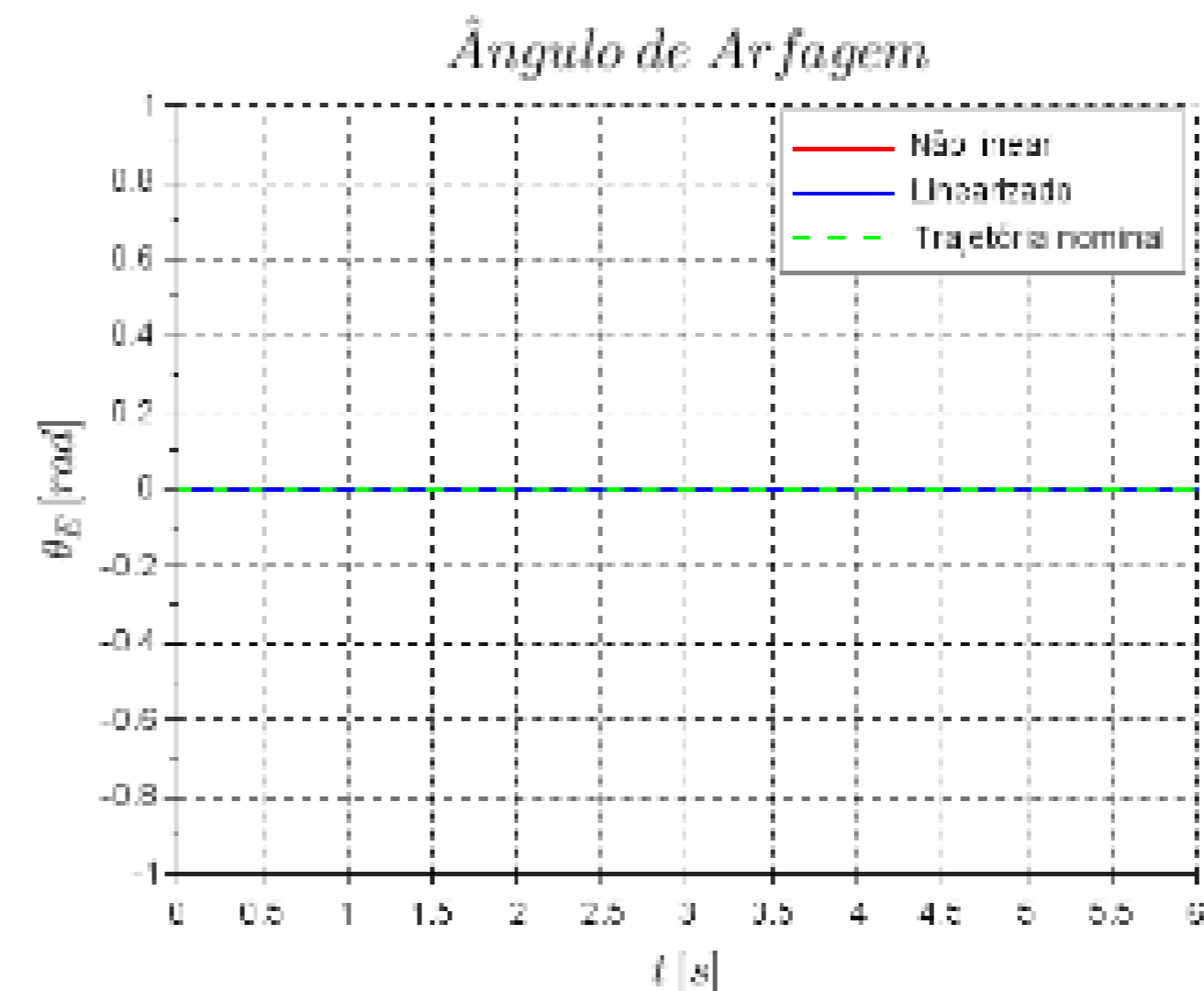
(a) Trajetória em XZ



(b) Deslocamento em X



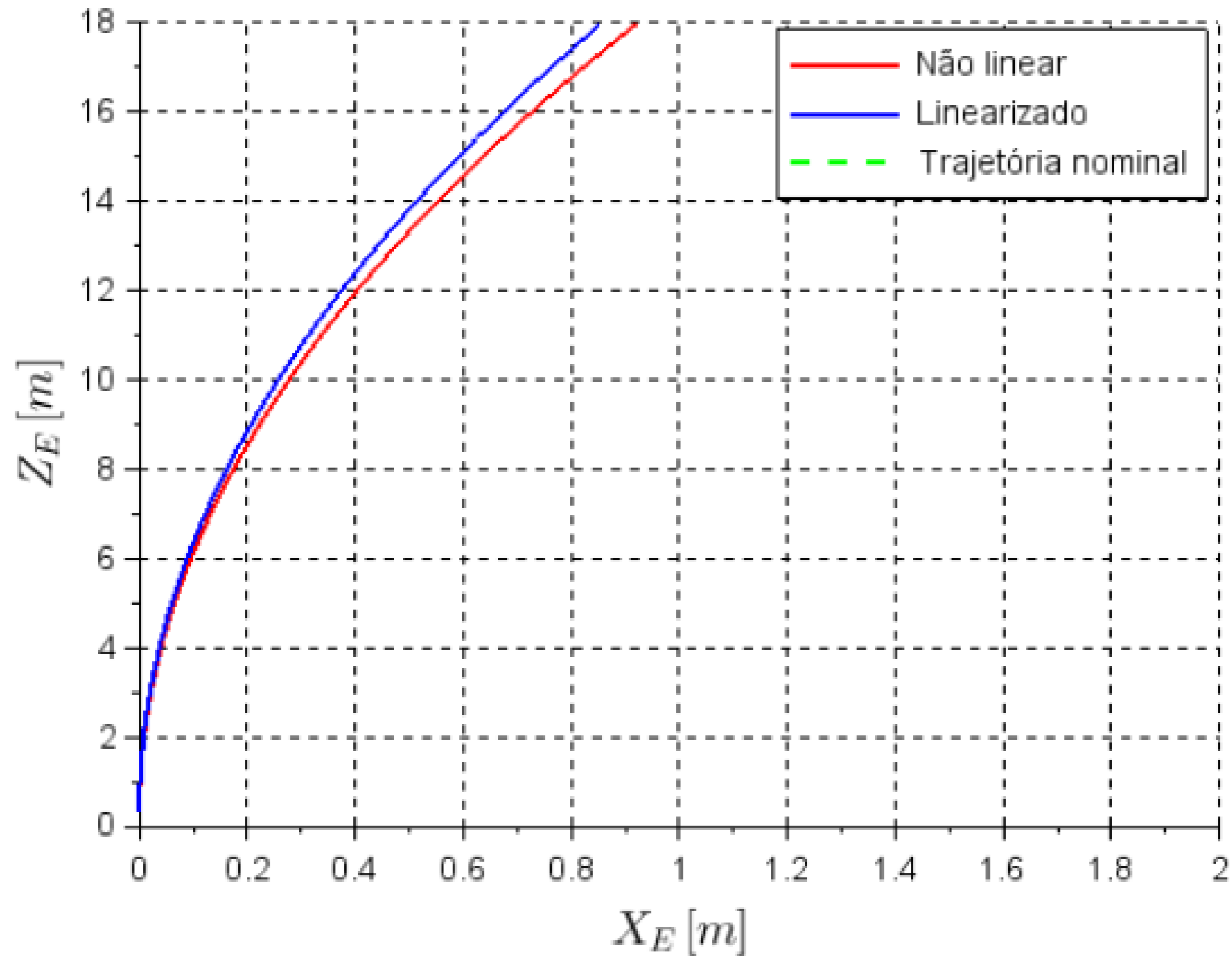
(c) Deslocamento em Z



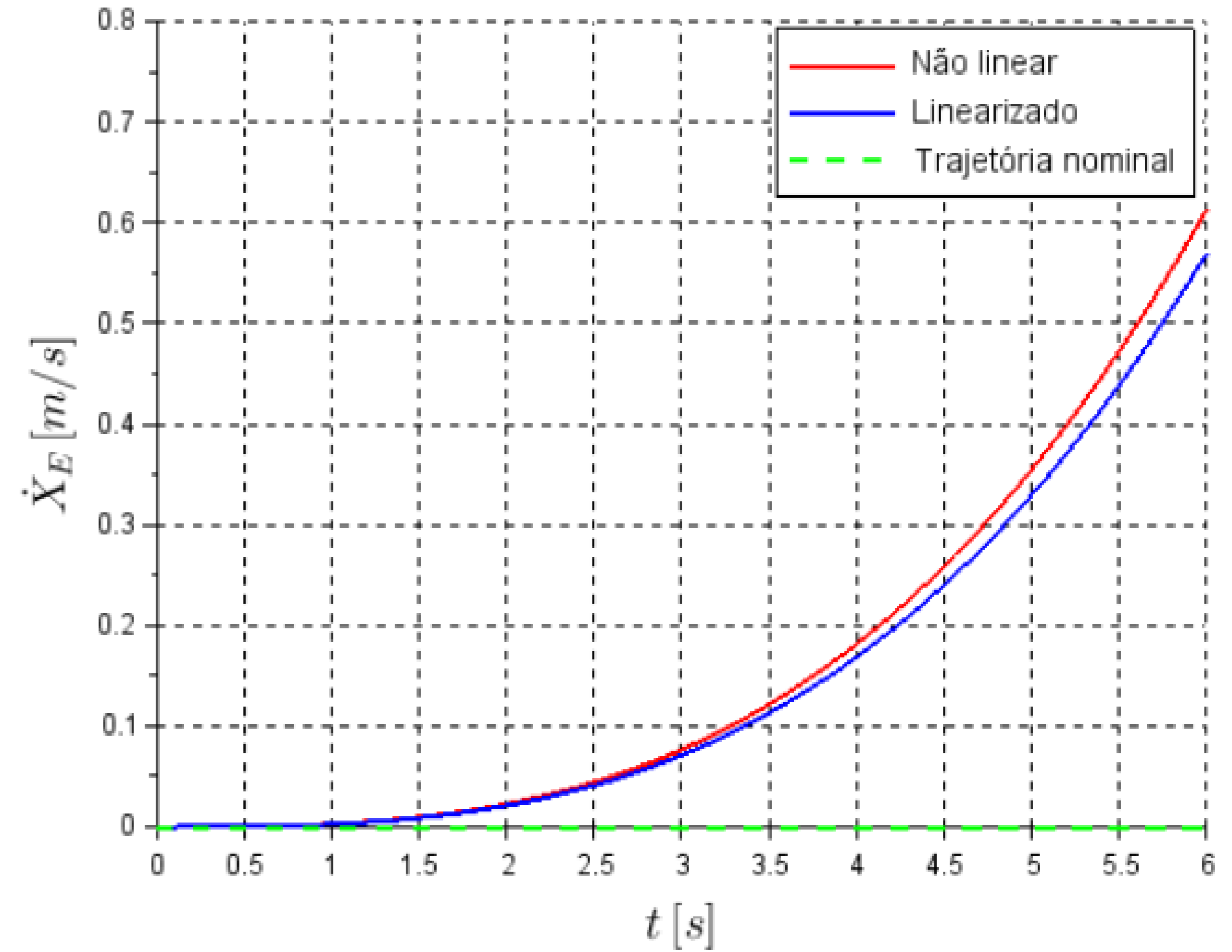
(d) Ângulo de Arfagem

# Cenário 3 – Movimento em X e Z

## Trajétoria (Z – X)

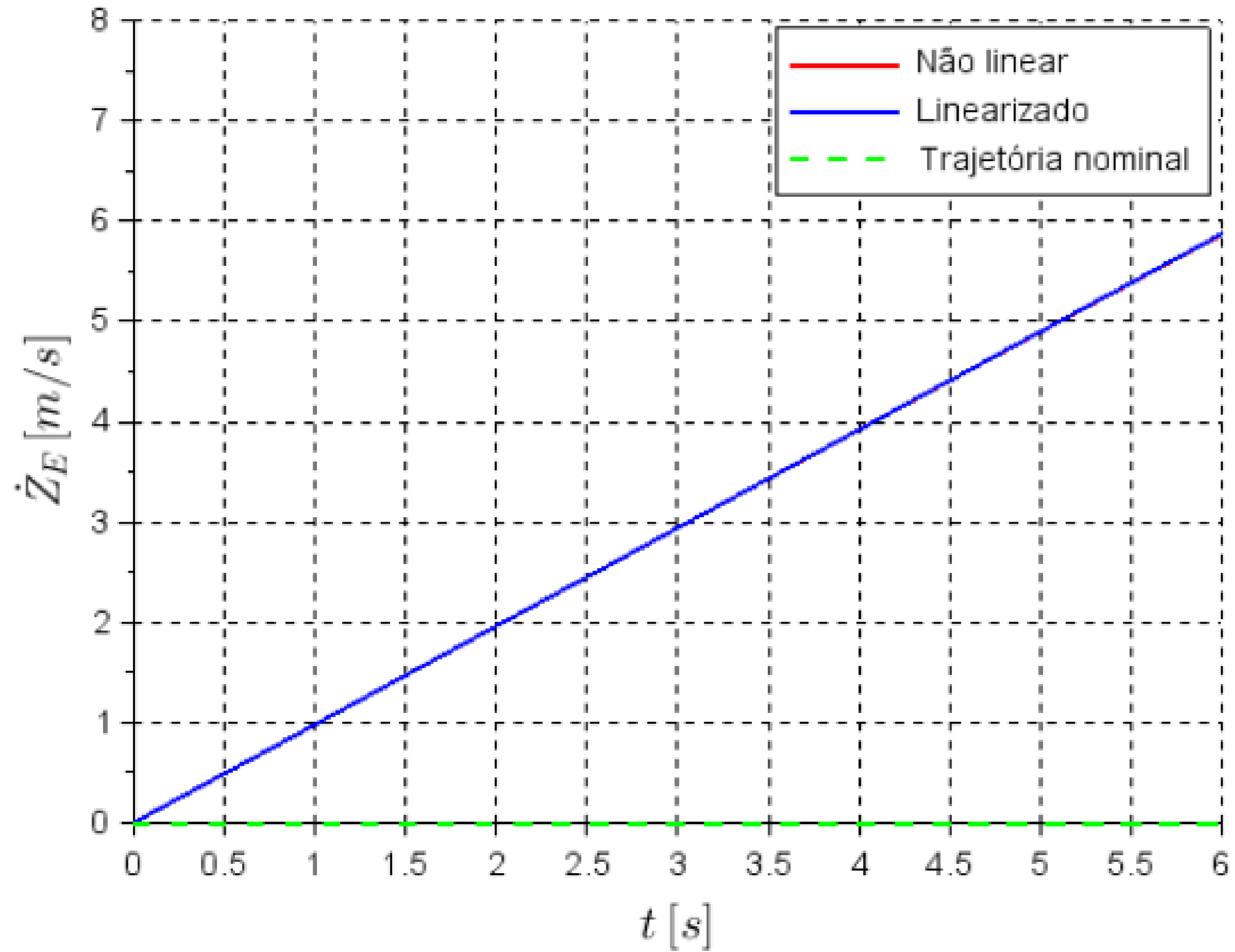


## Velocidade em X

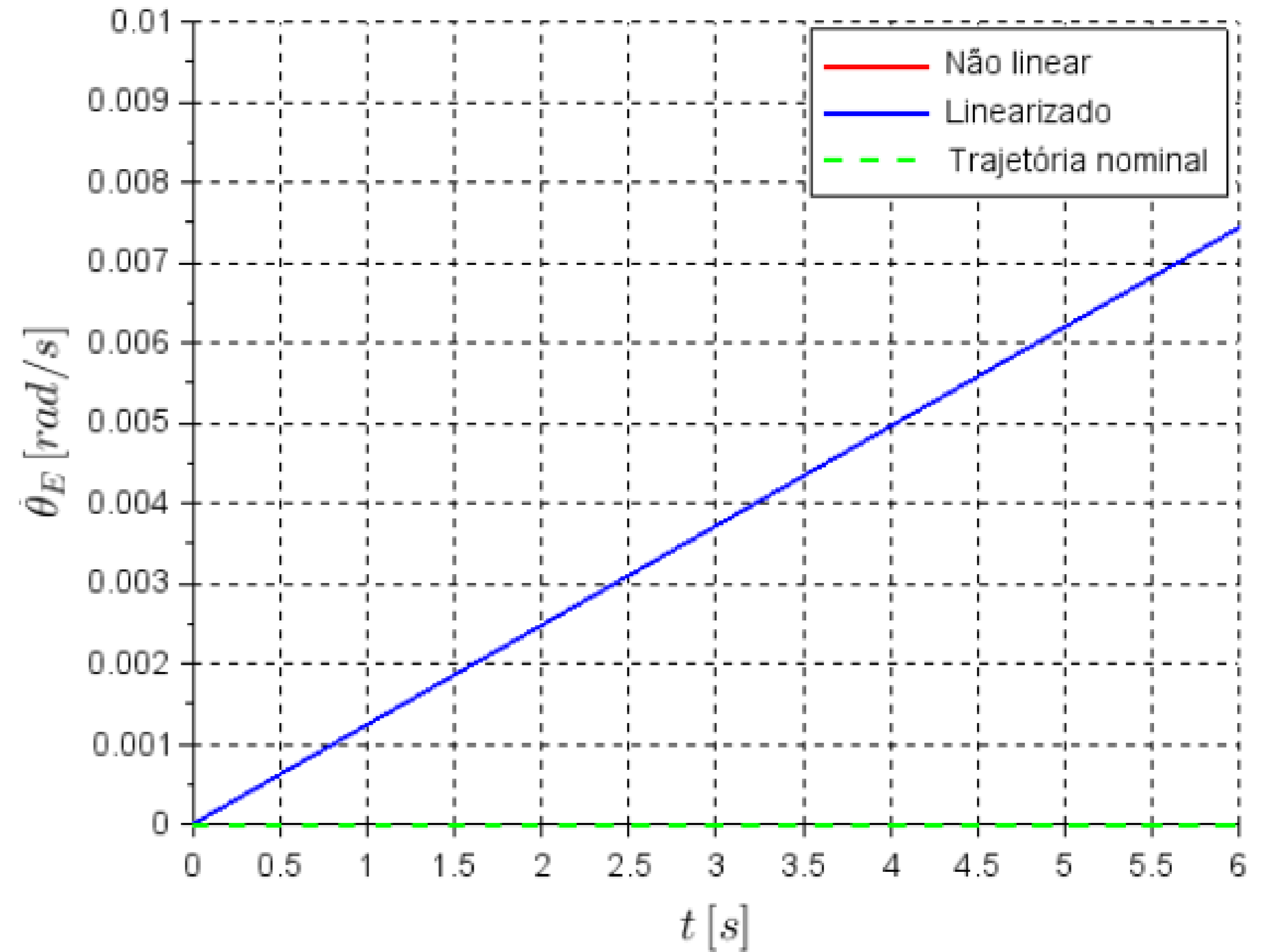


# Cenário 3 – Movimento em X e Z

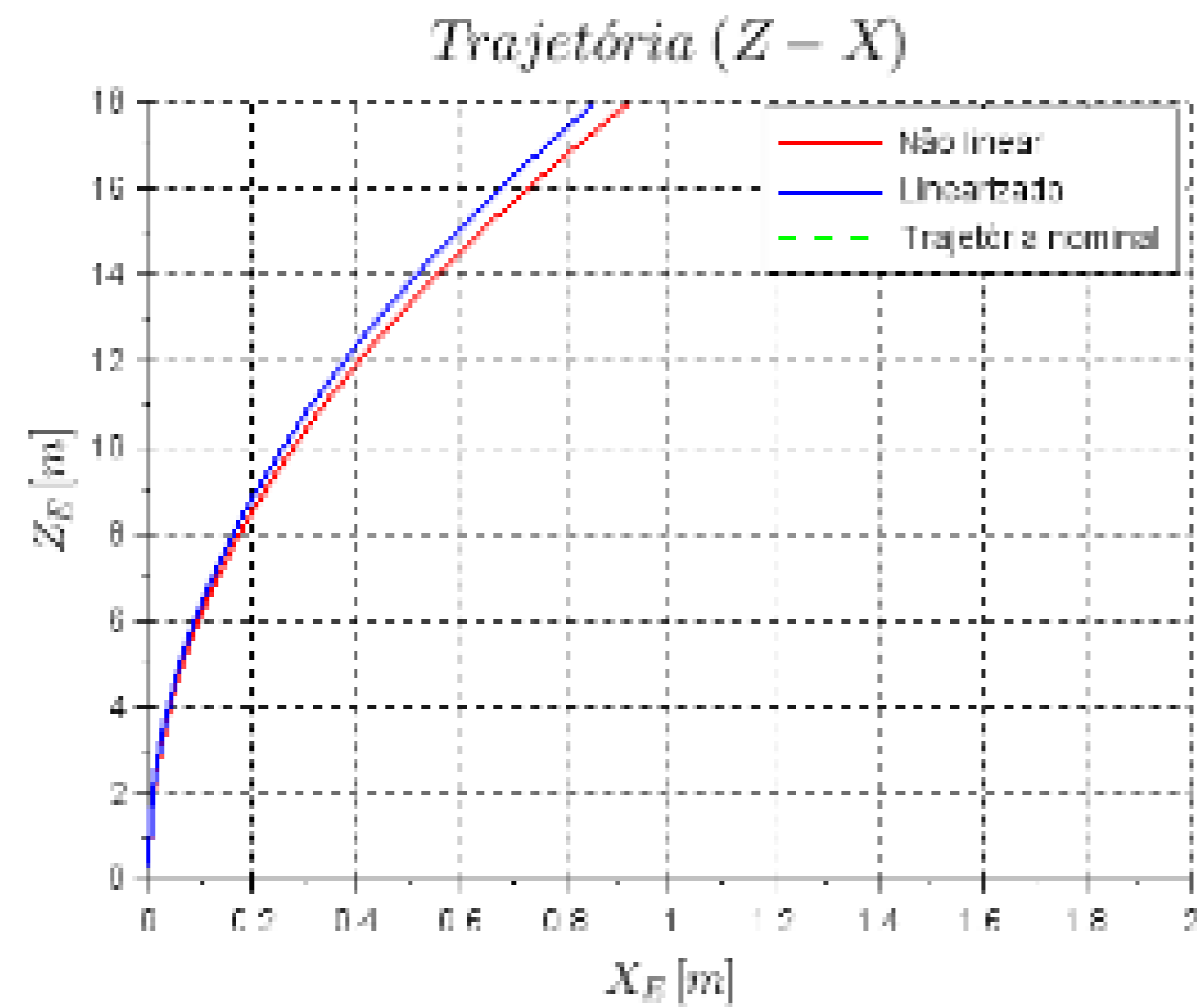
*Velocidade em Z*



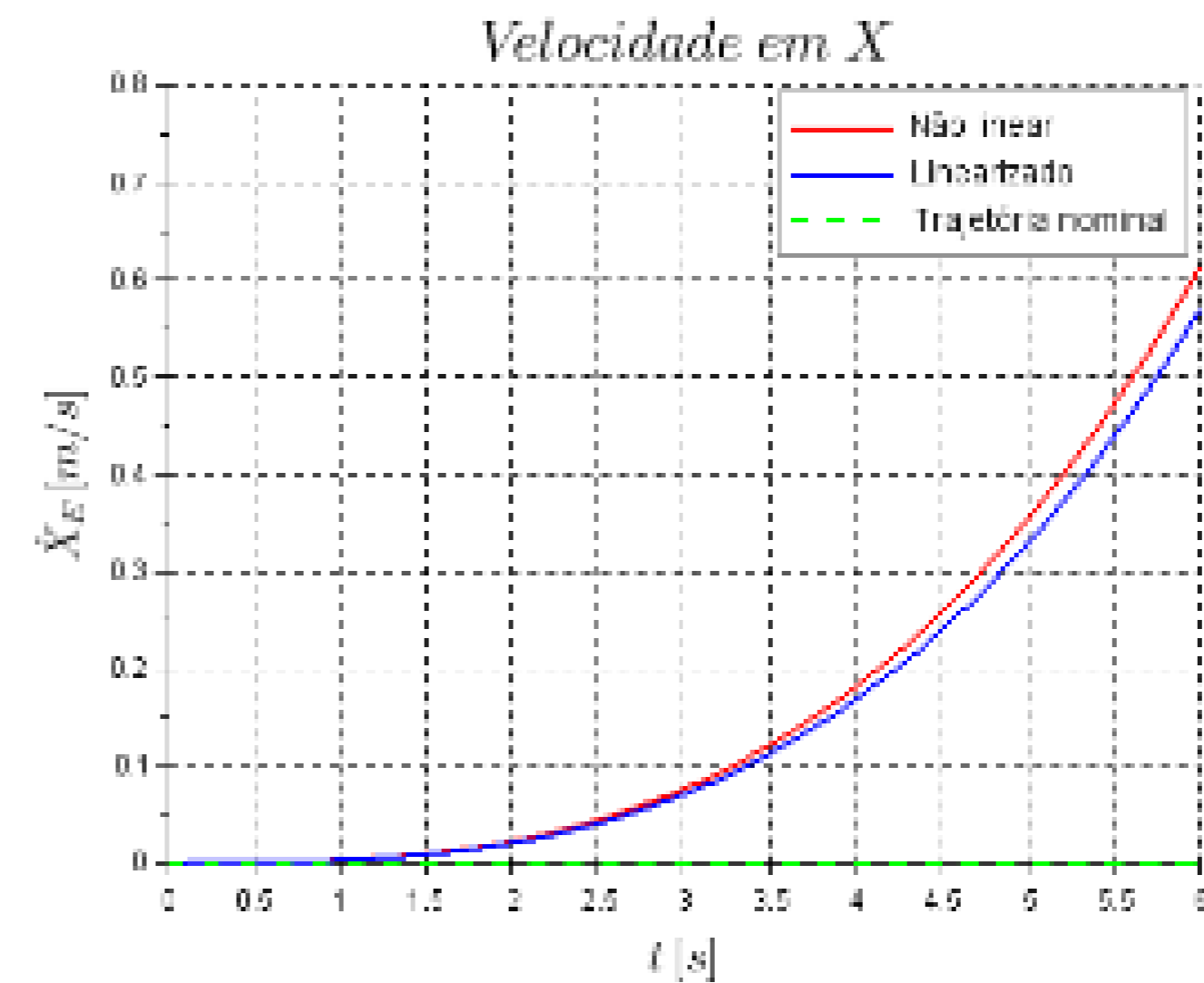
*Velocidade de Arfagem*



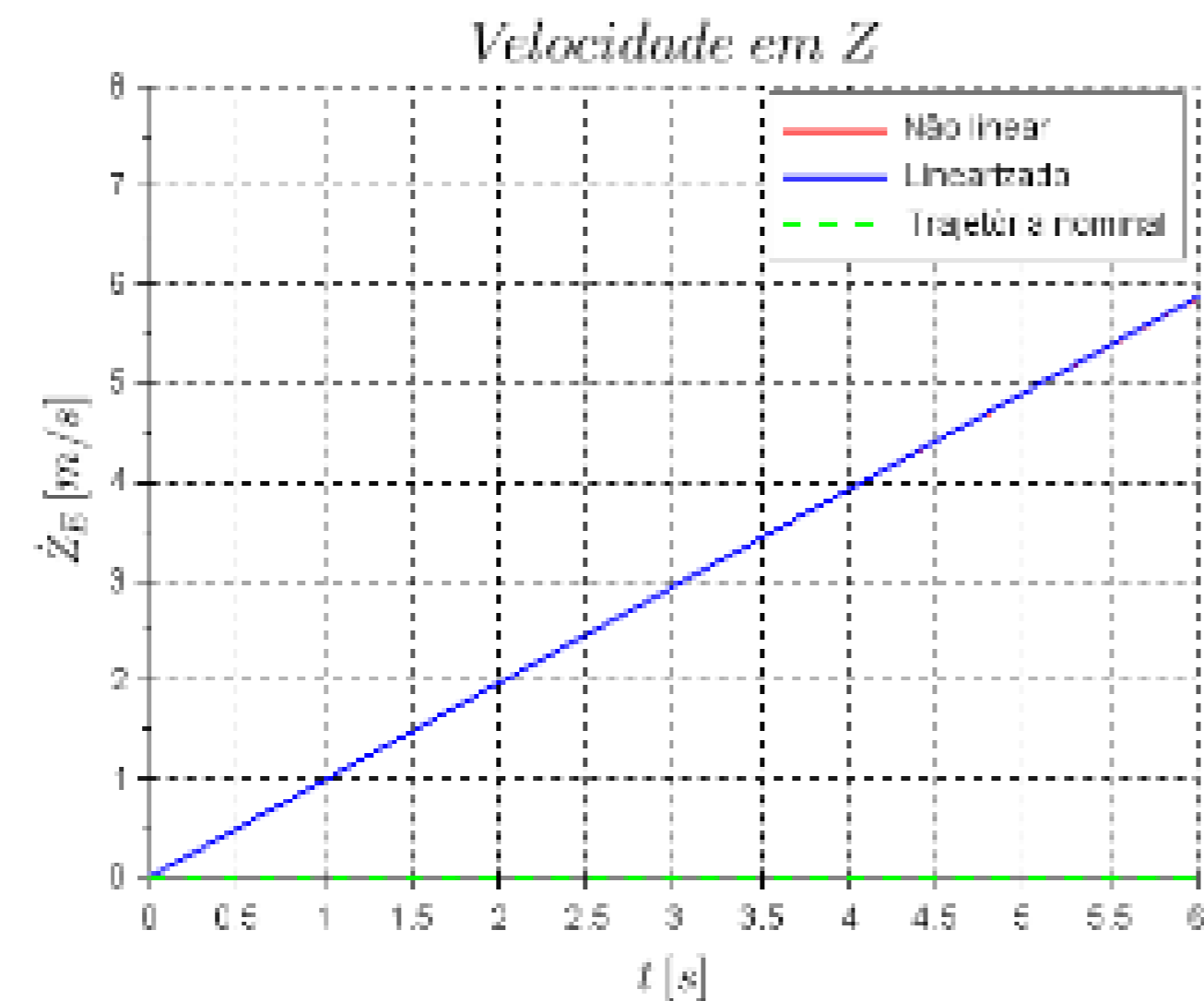
# Cenário 3 – Movimento em X e Z



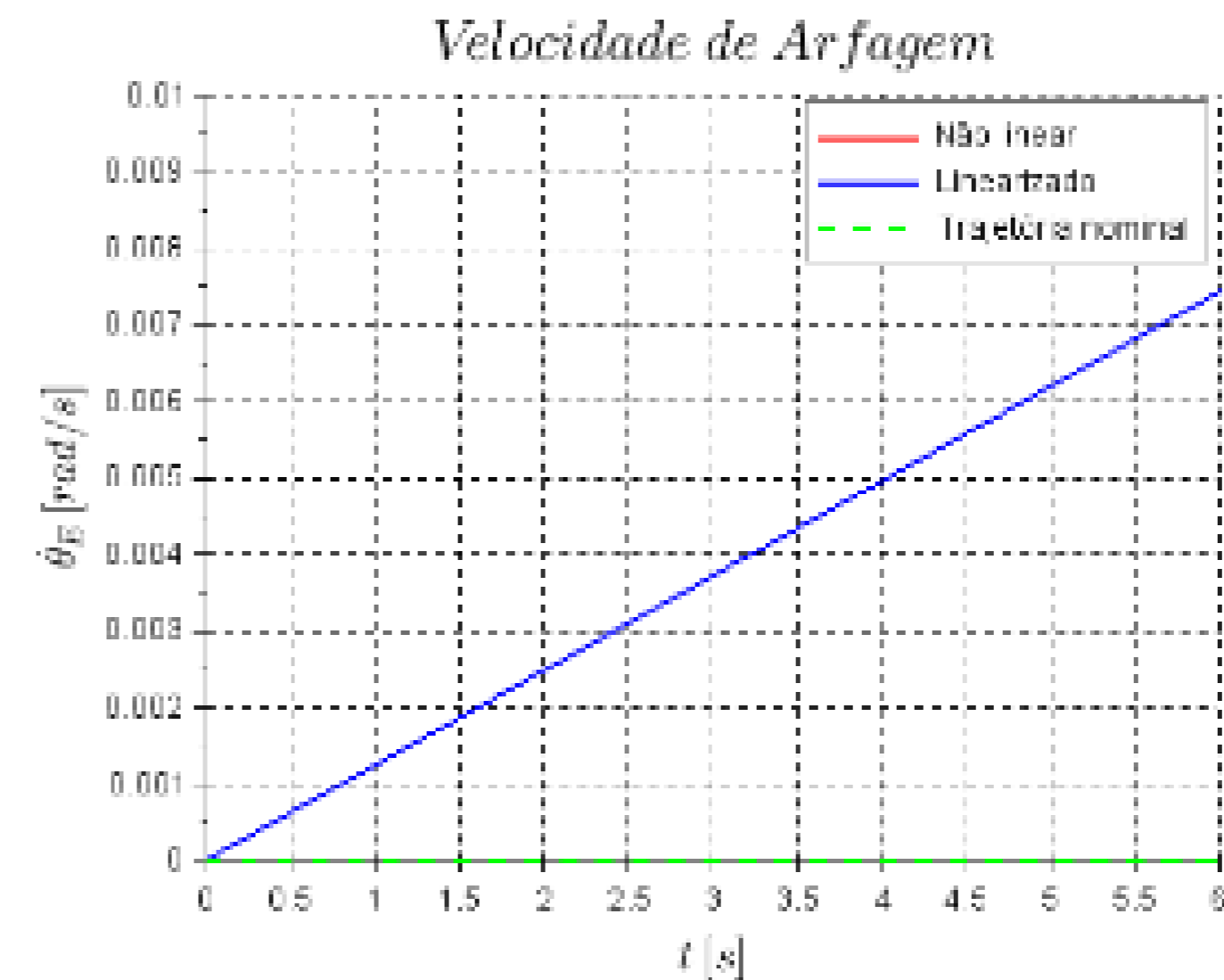
(a) Trajetória em XZ



(b) Velocidade de X



(c) Velocidade em Z



(d) Velocidade de Arfagem



# Estudo de Estabilidade

Definição

$$G = \frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]}\bigg|_{\text{condições iniciais nulas}} = \frac{Y}{U}$$



Definição

Matriz Solvente

$$G = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D \rightarrow G = C\Phi B + D$$
$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

Definição

Matriz Solvente

Análise do Sistema  
estudado

2 entradas:  $u_1$  e  $u_3$   
6 saídas:  $x \dot{x} z \dot{z} \theta \dot{\theta}$

12 funções de transferência

Definição

Matriz Solvente

Análise do Sistema  
estudado

Seis funções  
não nulas

$$G_{12} = x/u_3 = \frac{1.211,1111}{s^4}$$

$$G_{22} = \dot{x}/u_3 = \frac{1.211,1111}{s^3}$$

$$G_{31} = z/u_1 = \frac{1,2195122}{s^2}$$

$$G_{41} = \dot{z}/u_1 = \frac{1,2195122}{s}$$

$$G_{52} = \theta/u_3 = \frac{123,45679}{s^2}$$

$$G_{62} = \dot{\theta}/u_3 = \frac{123,45679}{s}$$

Domínio da Frequência

$$sX = Ax + Bu \rightarrow (sI - A) * X = Bu$$

Domínio da Frequência

$$sX = Ax + Bu \rightarrow (sI - A) * X = Bu$$

$$s = \sigma_i + j\omega_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

Raízes da Função Denominador

Condições de Estabilidade

Condição de Estabilidade	Valores de $s = \sigma_i + j\omega_i$ ( $i = 1, \dots, n$ )
Assintoticamente Estável/ Estável	$\sigma_i < 0$ para $i = 1, \dots, n$
Marginalmente estável ou Marginalmente instável	Pelo menos algum $\sigma_i = 0$ ; Nenhum valor $\sigma_i > 0$ ; Nenhum polo múltiplo no eixo $j\omega$
Instável	Pelo menos algum $\sigma_i > 0$ ou algum polo $\sigma_i = 0$ de ordem múltipla (polo de ordem múltipla no eixo $j\omega$ )

Domínio da Frequência

$$sX = Ax + Bu \rightarrow (sI - A) * X = Bu$$

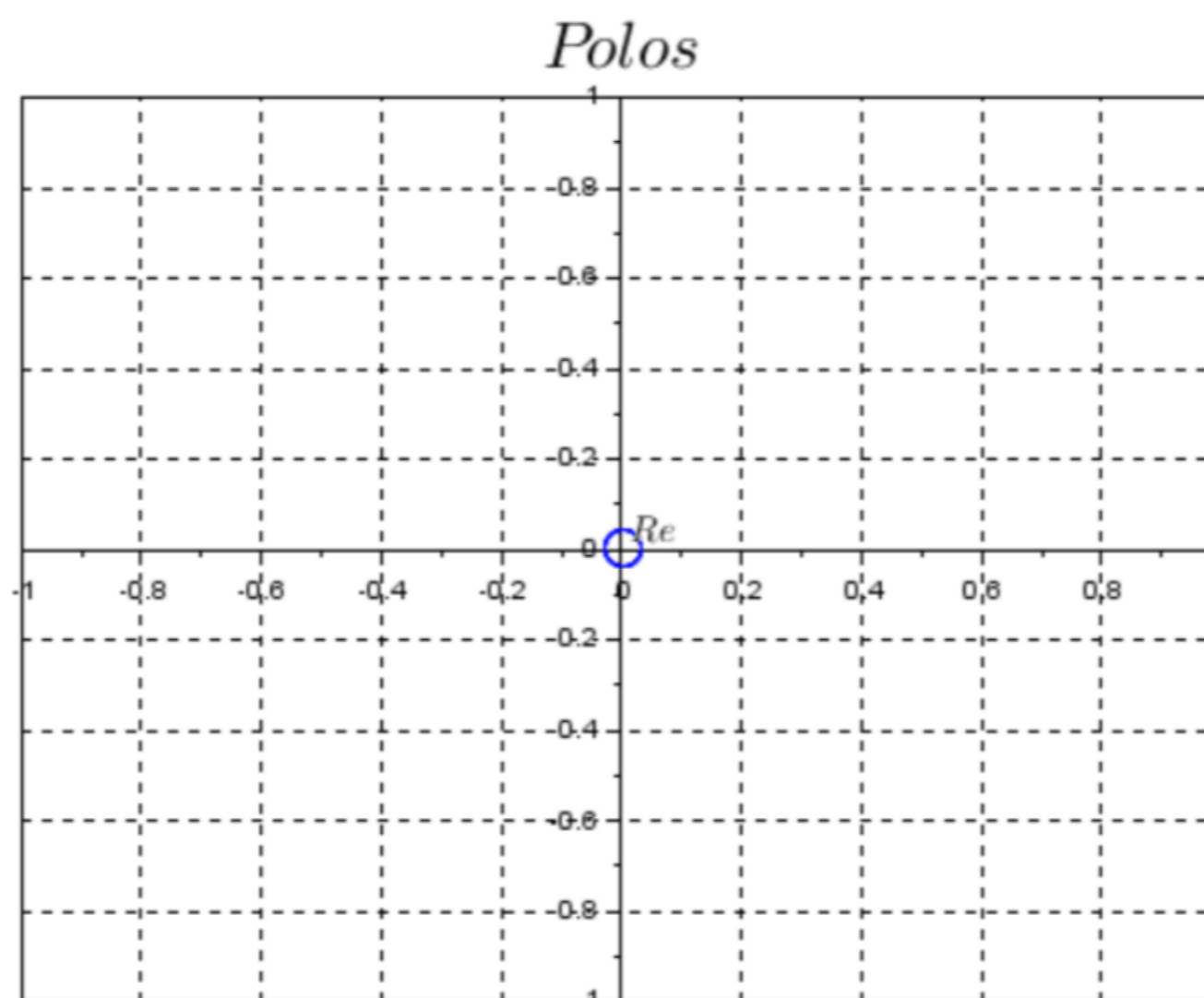
$$s = \sigma_i + j\omega_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

Raízes da Função Denominador

Condições de Estabilidade

Polos do Sistema

Condição do Sistema



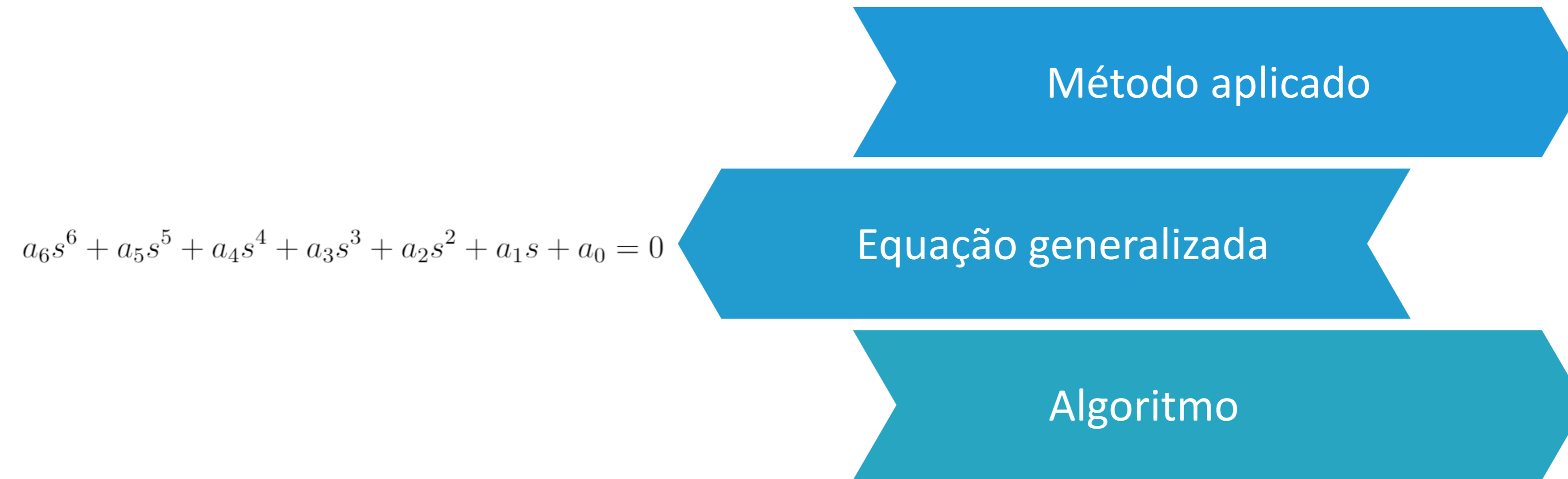
Condição de Estabilidade	Valores de $s = \sigma_i + j\omega_i$ ( $i = 1, \dots, n$ )
Assintoticamente Estável/ Estável	$\sigma_i < 0$ para $i = 1, \dots, n$
Marginalmente estável ou Marginalmente instável	Pelo menos algum $\sigma_i = 0$ ; Nenhum valor $\sigma_i > 0$ ; Nenhum polo múltiplo no eixo $j\omega$
Instável	Pelo menos algum $\sigma_i > 0$ ou algum polo $\sigma_i = 0$ de ordem múltipla (polo de ordem múltipla no eixo $j\omega$ )

- O sistema é instável;
- Era esperado que todos os polos encontrados fossem nulos, pois é algo característico do sistema.



## Método aplicado

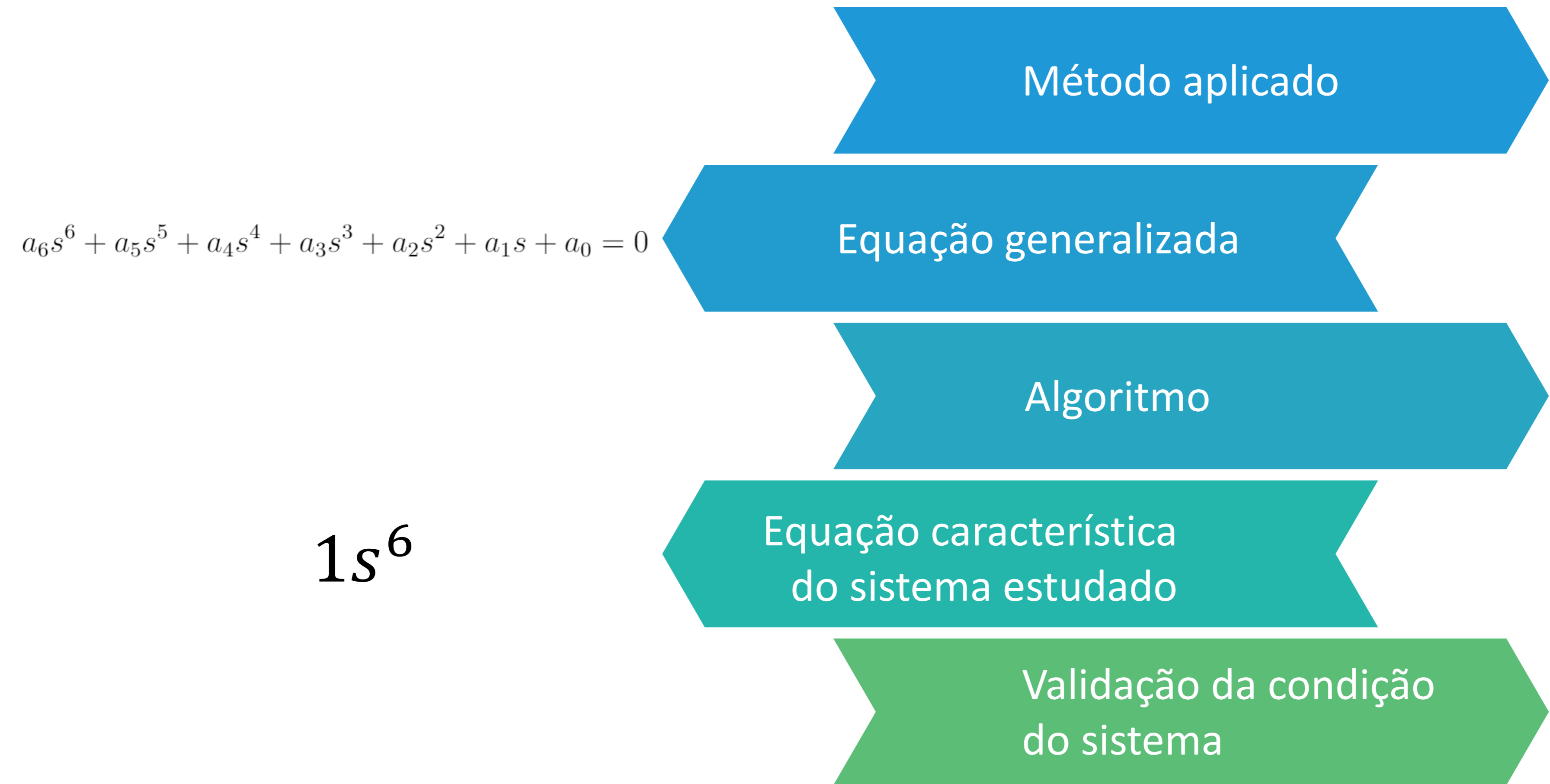
- O critério é adotado em relação à equação característica da função de transferência;
- O polinômio de seu denominador igualado a zero.



- O critério é adotado em relação à equação característica da função de transferência;
- O polinômio de seu denominador igualado a zero.

$a_6$   $a_4$   $a_2$   $a_0$   
 $a_5$   $a_3$   $a_1$   
 $b_1$   $b_2$   $b_3$   
 $c_1$   $c_2$   
 $d_1$   $d_2$   
 $e_1$   
 $f_1$





- O critério é adotado em relação à equação característica da função de transferência;
- O polinômio de seu denominador igualado a zero.

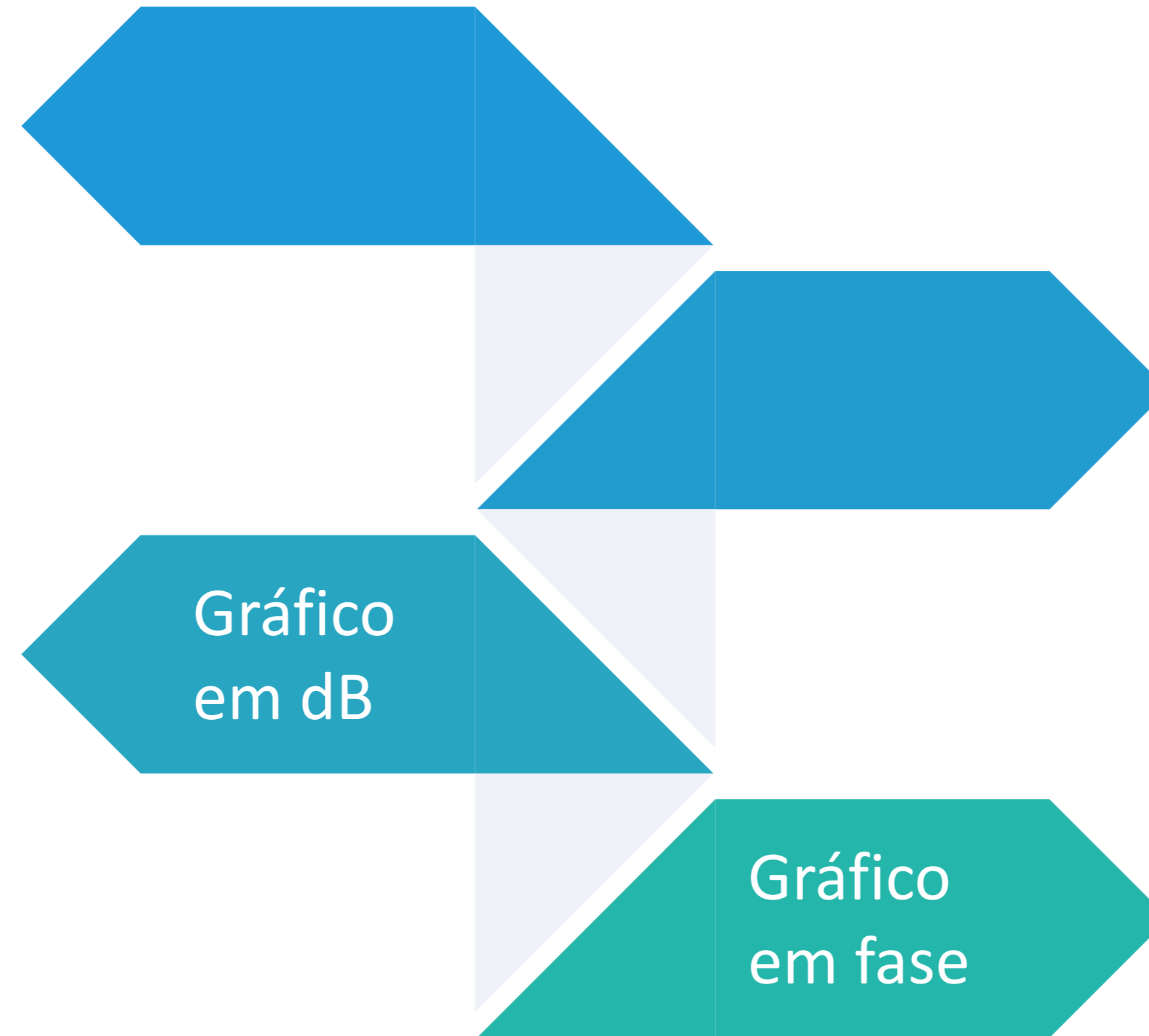
$a_6$   $a_4$   $a_2$   $a_0$   
 $a_5$   $a_3$   $a_1$   
 $b_1$   $b_2$   $b_3$   
 $c_1$   $c_2$   
 $d_1$   $d_2$   
 $e_1$   
 $f_1$

- O sistema é instável;
- É possível perceber isso antes mesmo de montarmos a tabela.

## Diagrama de Bode

É a representação gráfica da resposta em frequência em escala logarítmica.

$$\text{Para } N < 0 \Rightarrow \left. \frac{A_o}{A_i} \right|_{db} = 20 \log \frac{1}{\omega^{-N}} = -20(-N) \log \omega$$

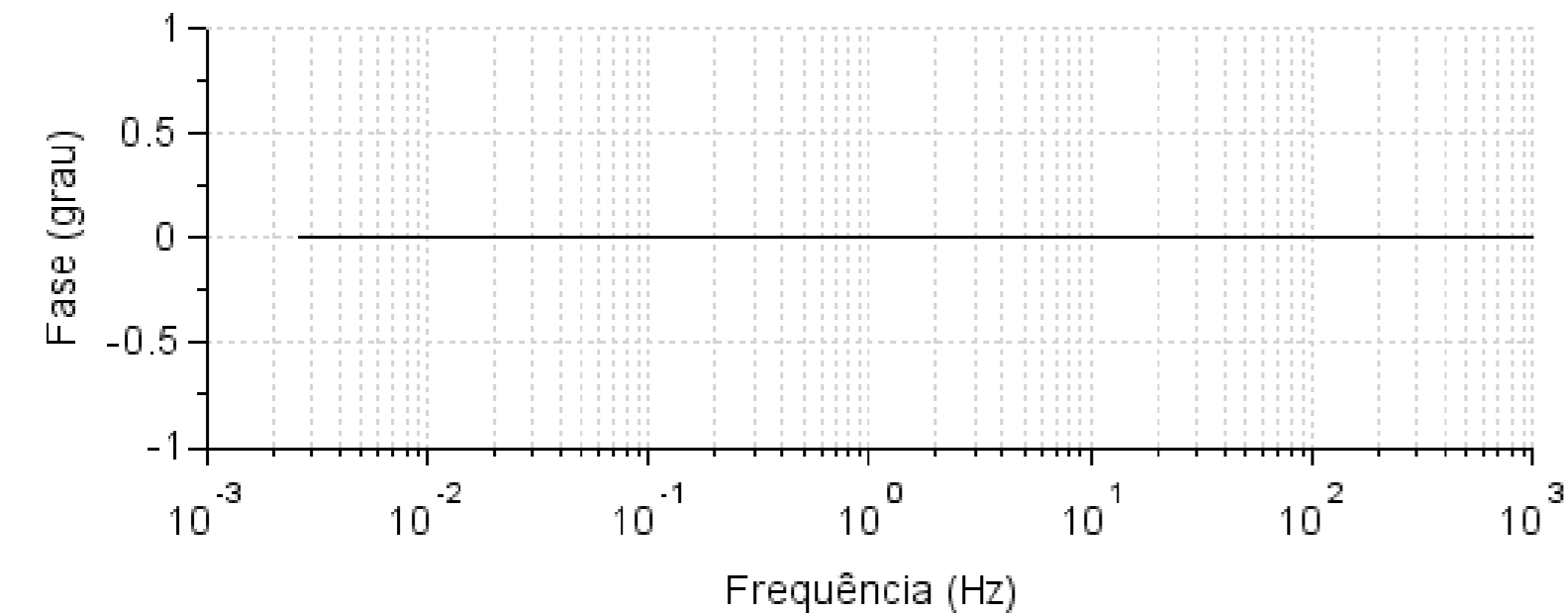
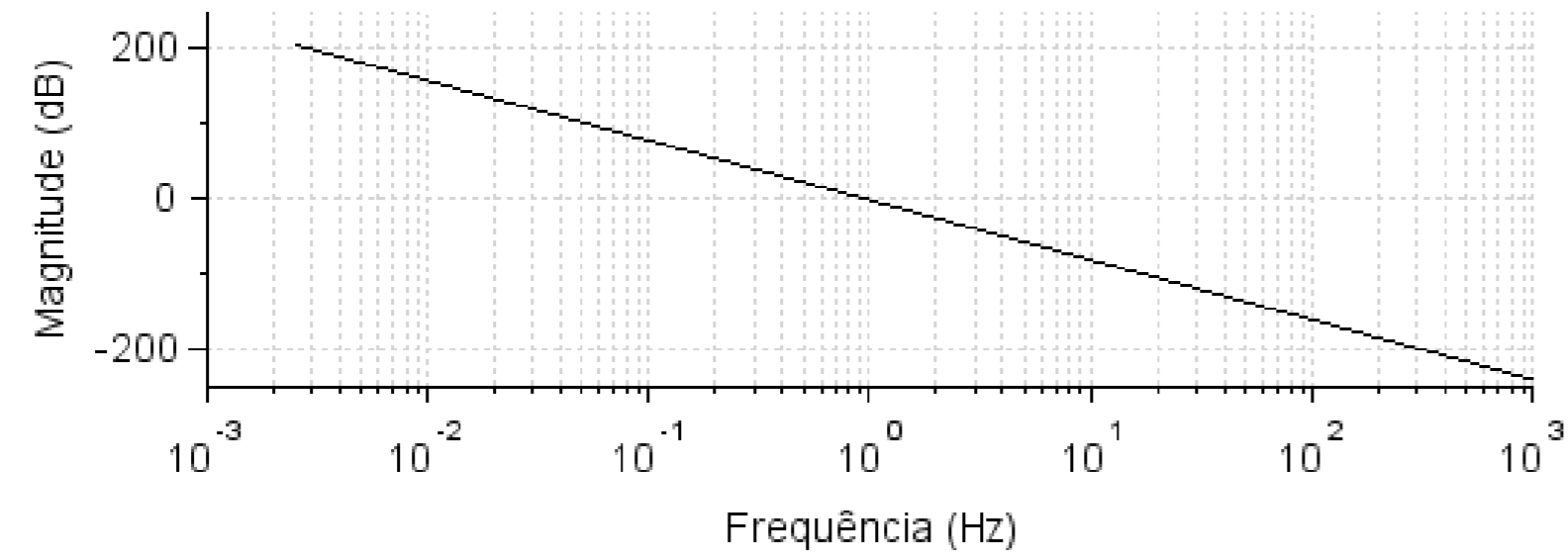


## Modelos lineares

Termo correspondente ao Integrador ou Derivador:  $s^N$

$$\phi = -90^\circ \times (-N), \text{ para } N < 0$$

Diagrama de Bode :  $x/u_3$



Função de Transferência:  $G_{12} = \frac{x}{u_3} = \frac{1.211,1111}{s^4}$

$N = -4$

Inclinação:  $-80 \text{ db/década}$

Fase:  $0^\circ$

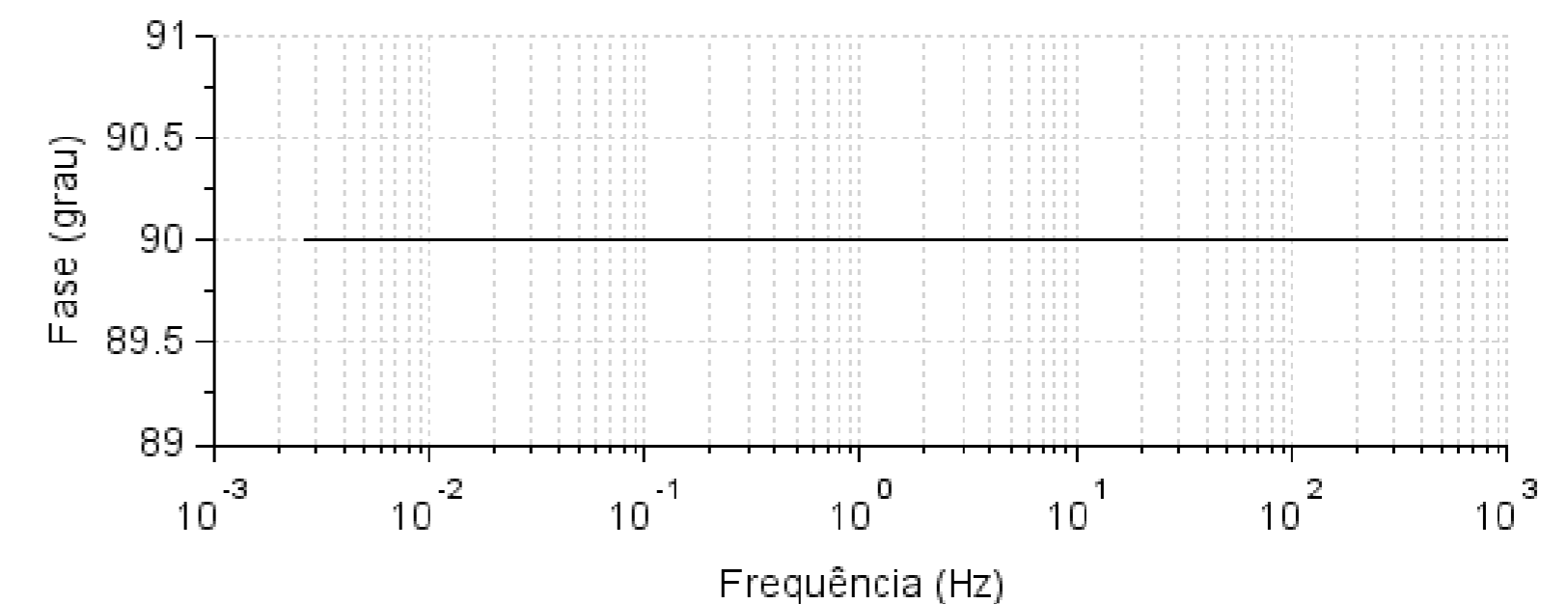
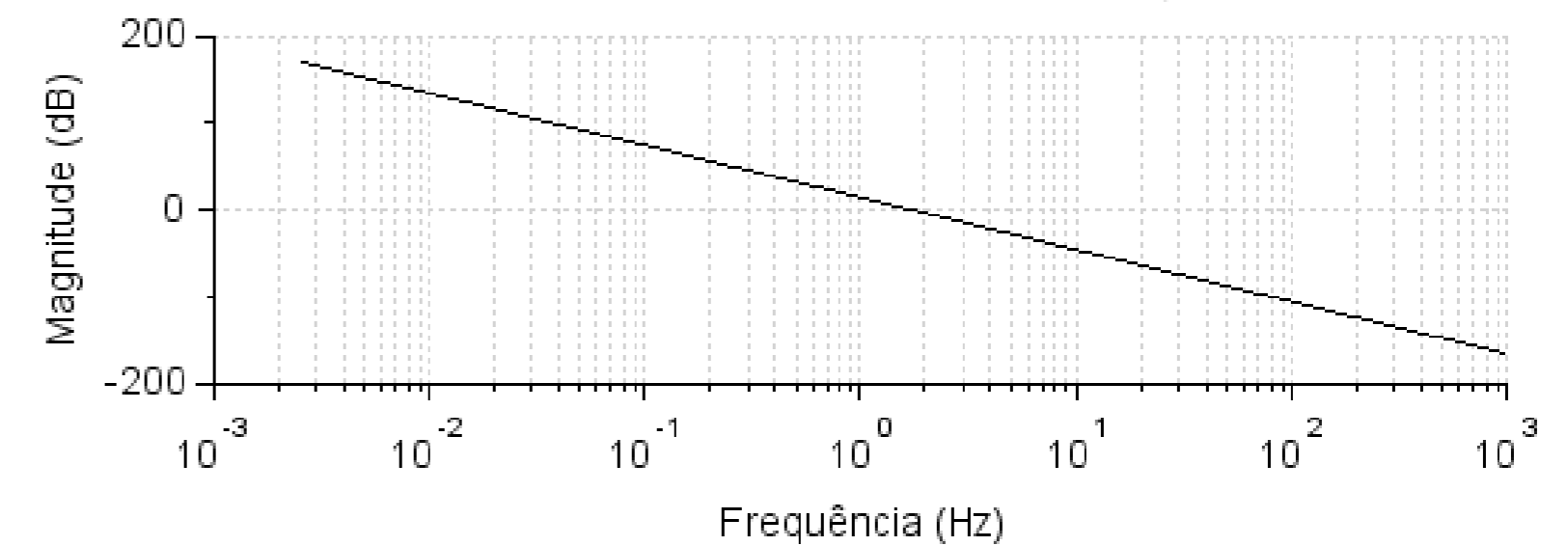
Função de Transferência:  $G_{22} = \frac{\dot{x}}{u_3} = \frac{1.211,1111}{s^3}$

$N = -3$

Inclinação:  $-60 \text{ db/década}$

Fase:  $-90^\circ$

Diagrama de Bode :  $\dot{x}/u_3$



# Resposta ao degrau – Degrau único

Condições de Contorno

$$u_1(t) = \begin{cases} mg & \text{para } t < t_{u1} \\ 1, 1 \cdot mg & \text{para } t > t_{u1} \\ \text{para } t = t_{u1} \text{ a função não é definida} \end{cases}$$

$$x_0 = \dot{x}_0 = z_0 = \dot{z}_0 = \theta_0 = \dot{\theta}_0 = 0$$

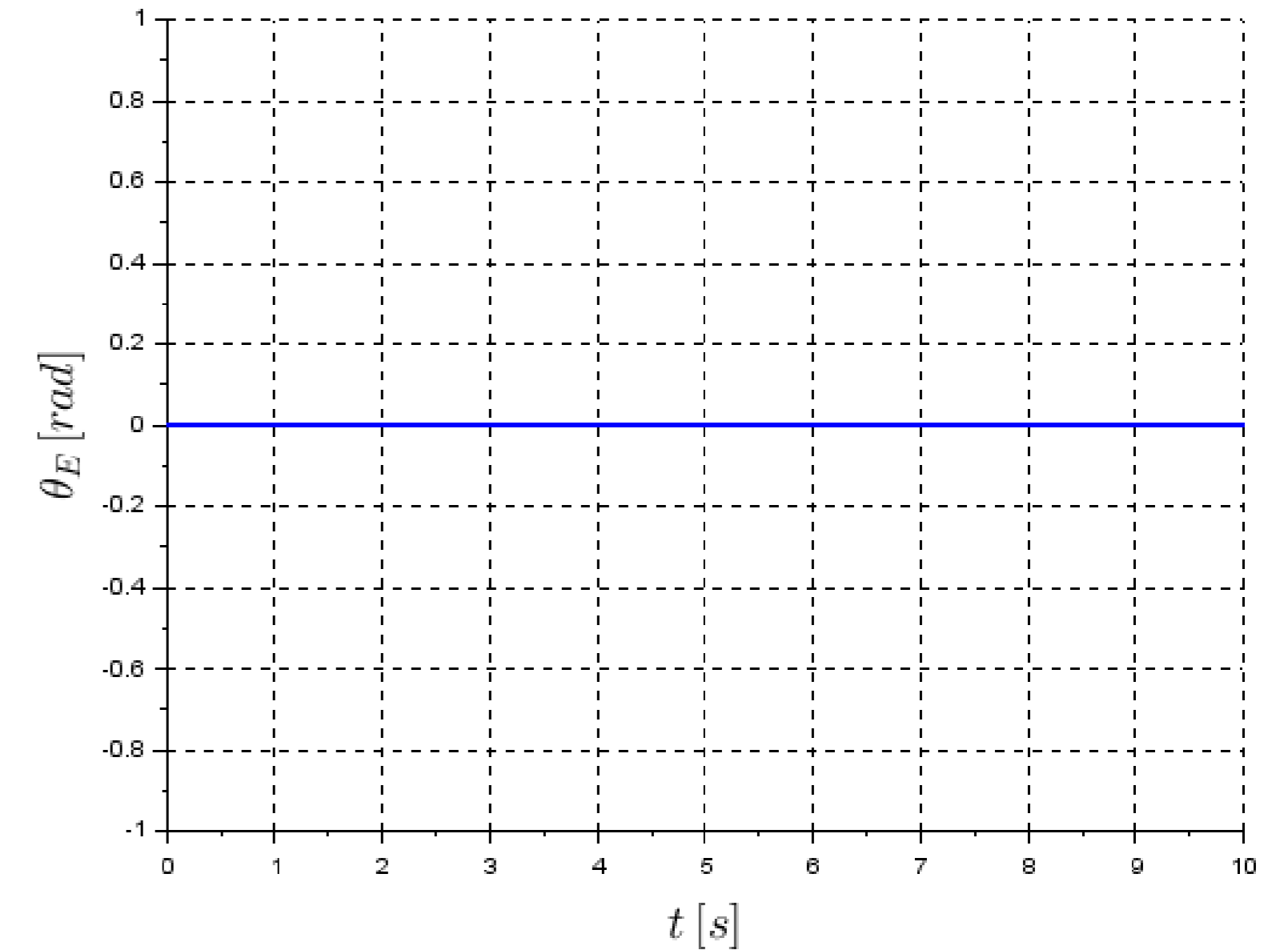
$$t_{u1} = 2 \text{ s.}$$

$$u_3 = 0.$$

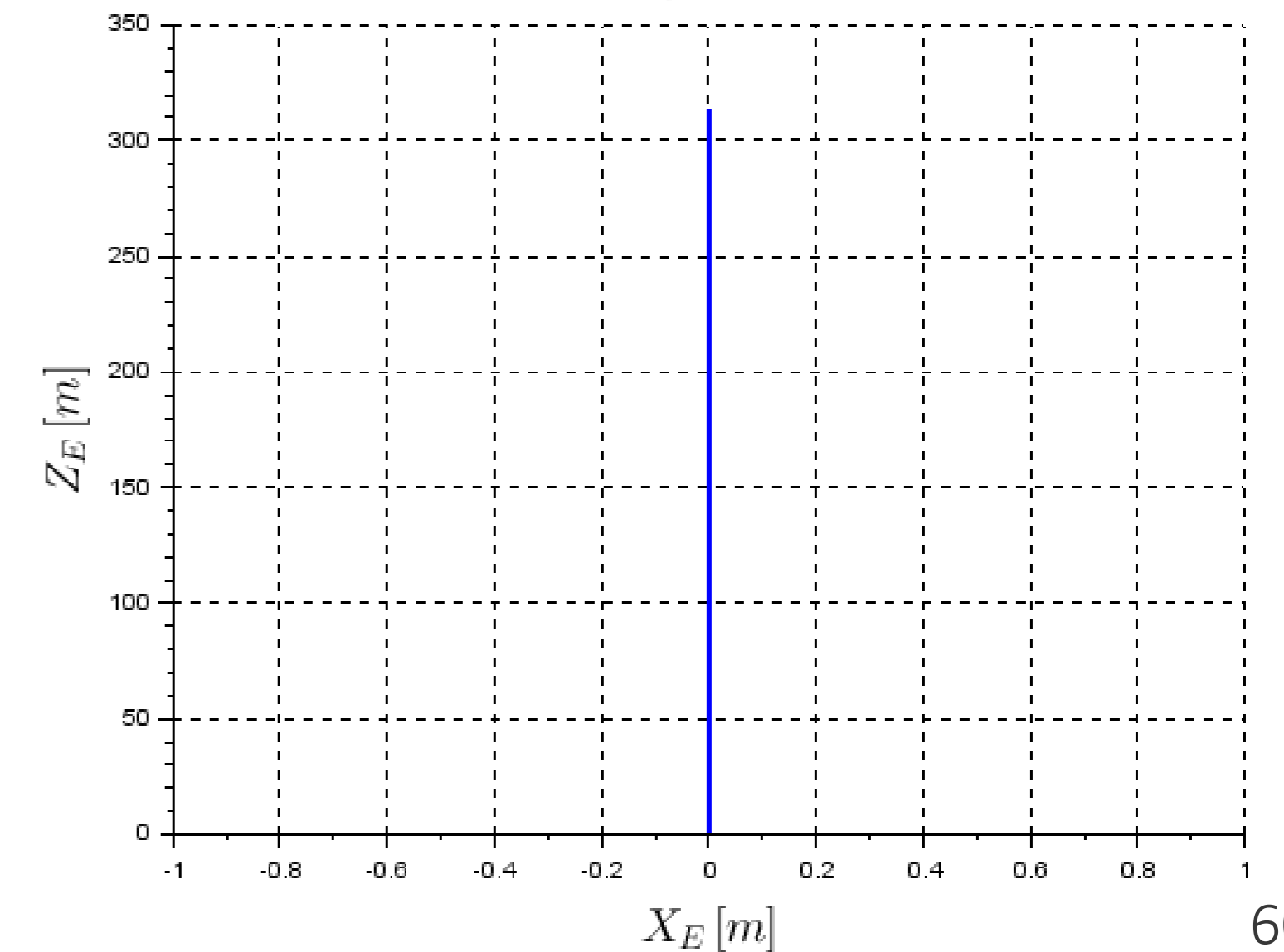
Ganho de altura Z



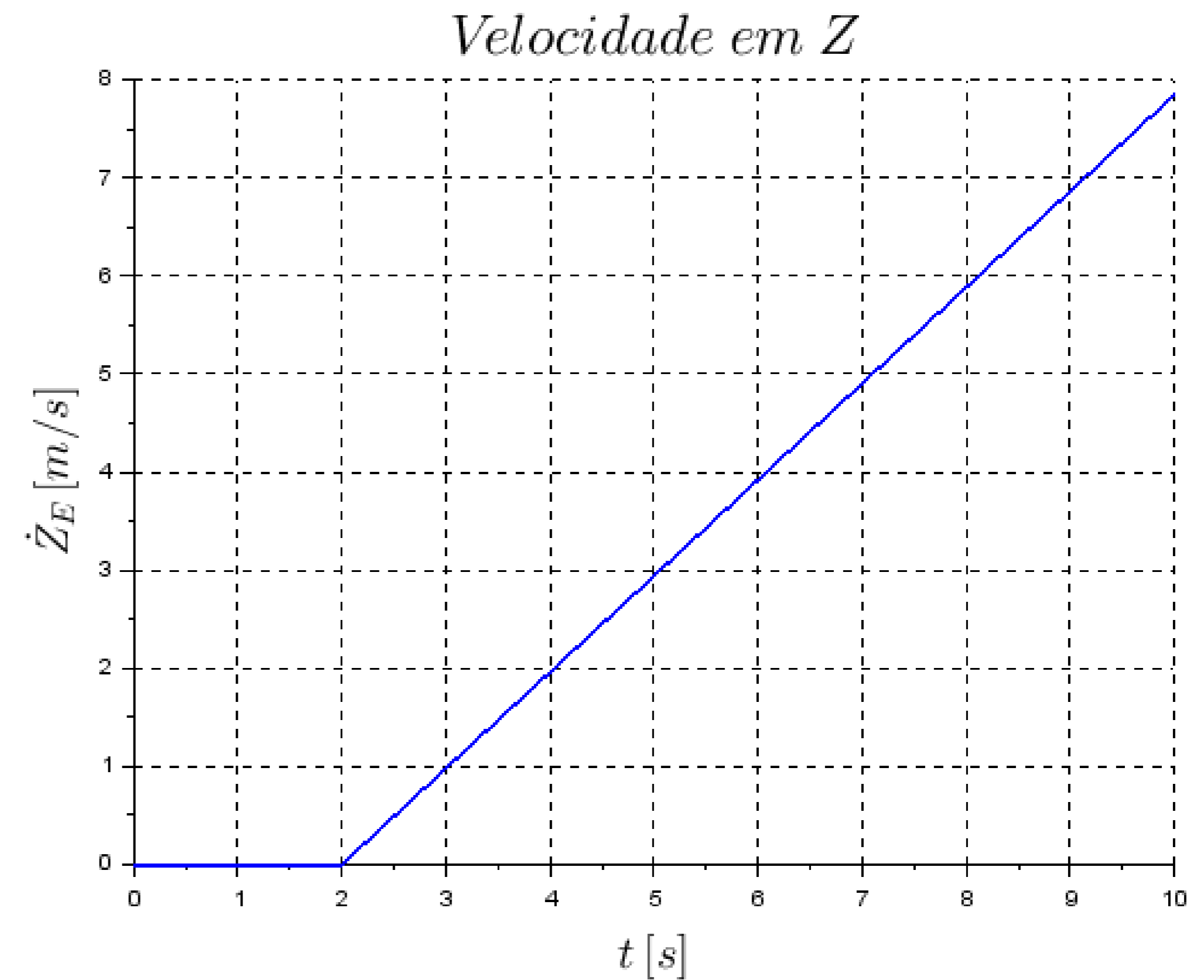
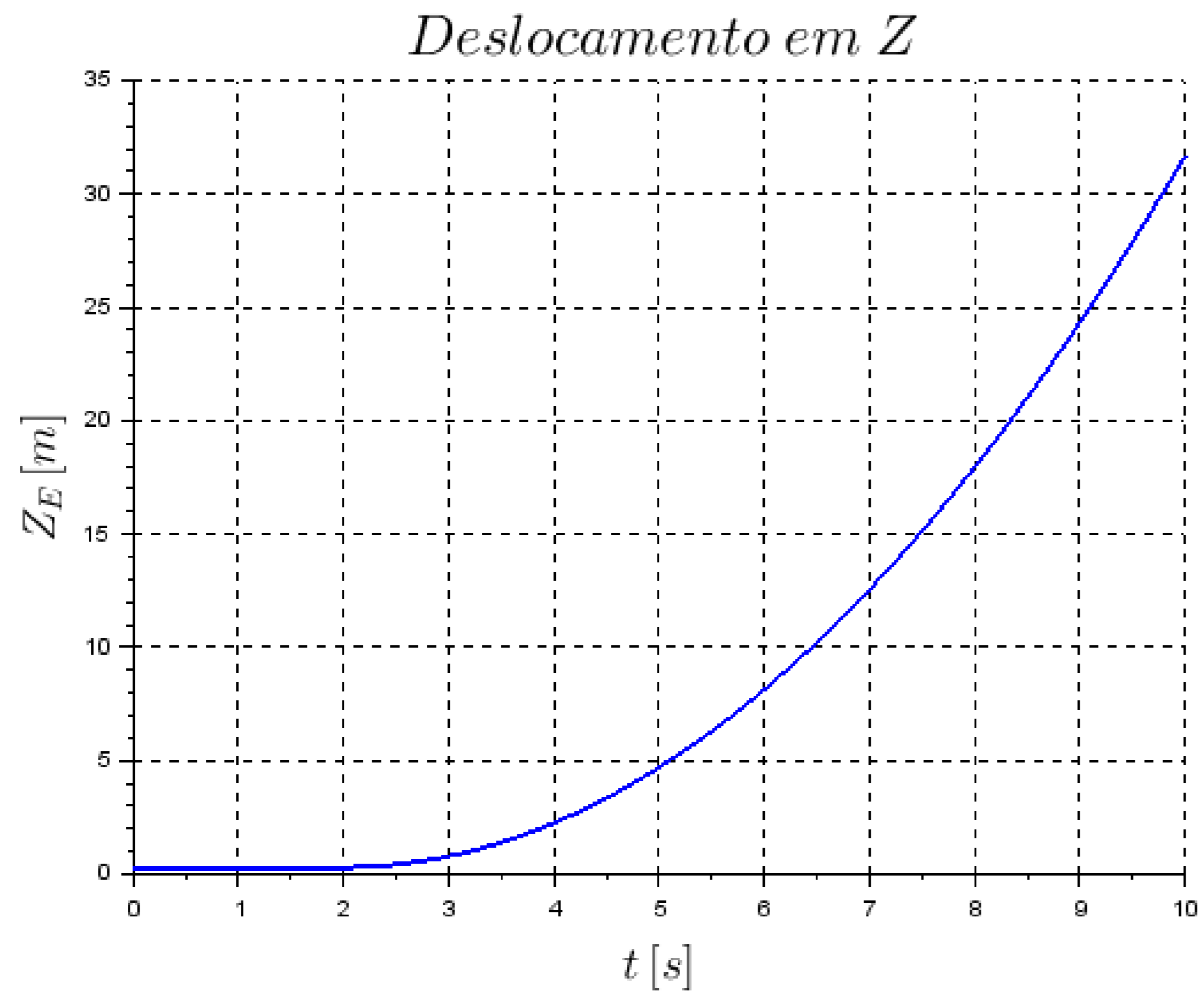
*Arfagem*



*Trajectoria*



# Resposta ao degrau – Degrau único



- Compatível com sistema instável
- Aceleração diferente de zero

# Resposta ao degrau – Degraus múltiplos

Condições de Contorno

$$u_1(t) = \begin{cases} mg & \text{para } t < t_{u_{1a}} \\ 2mg & \text{para } t_{u_{1a}} < t < t_{u_{1b}} \\ -2mg & \text{para } t_{u_{1b}} < t < t_{u_{1c}} \\ 4mg & \text{para } t_{u_{1c}} < t < t_{u_{1d}} \\ 0 & \text{para } t > t_{u_{1d}} \end{cases}$$

para  $t = t_{u_{1a}} = t_{u_{1b}} = t_{u_{1c}} = t_{u_{1d}}$  a função não é definida

$$x_0 = \dot{x}_0 = z_0 = \dot{z}_0 = \theta_0 = \dot{\theta}_0 = 0$$

$$t_{u_{1a}} = 2 \text{ s}, t_{u_{1b}} = 4 \text{ s}, t_{u_{1c}} = 6 \text{ s e } t_{u_{1d}} = 8 \text{ s.}$$

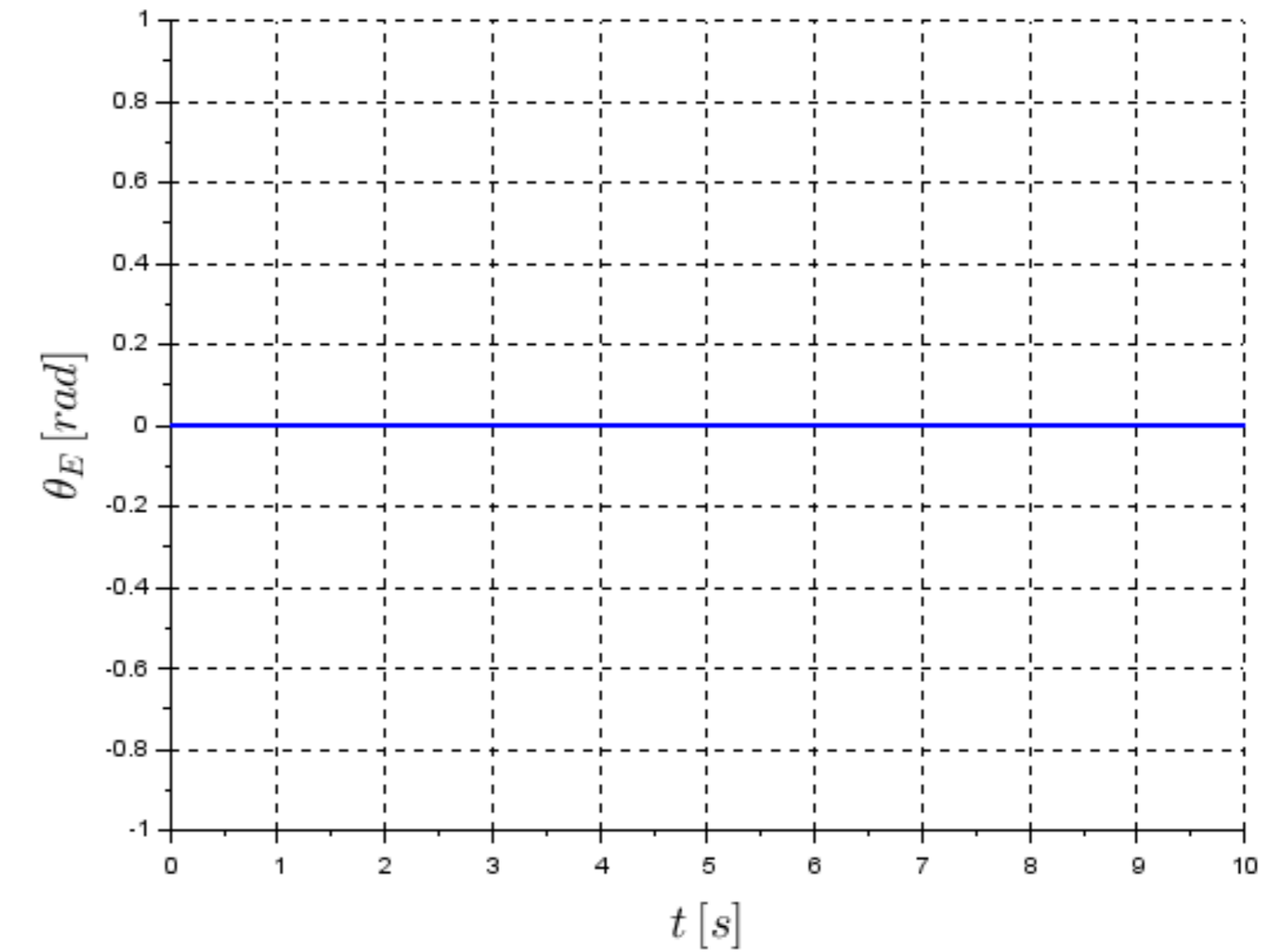
$$u_3 = 0.$$

Uma primeira tentativa  
de controle do veículo

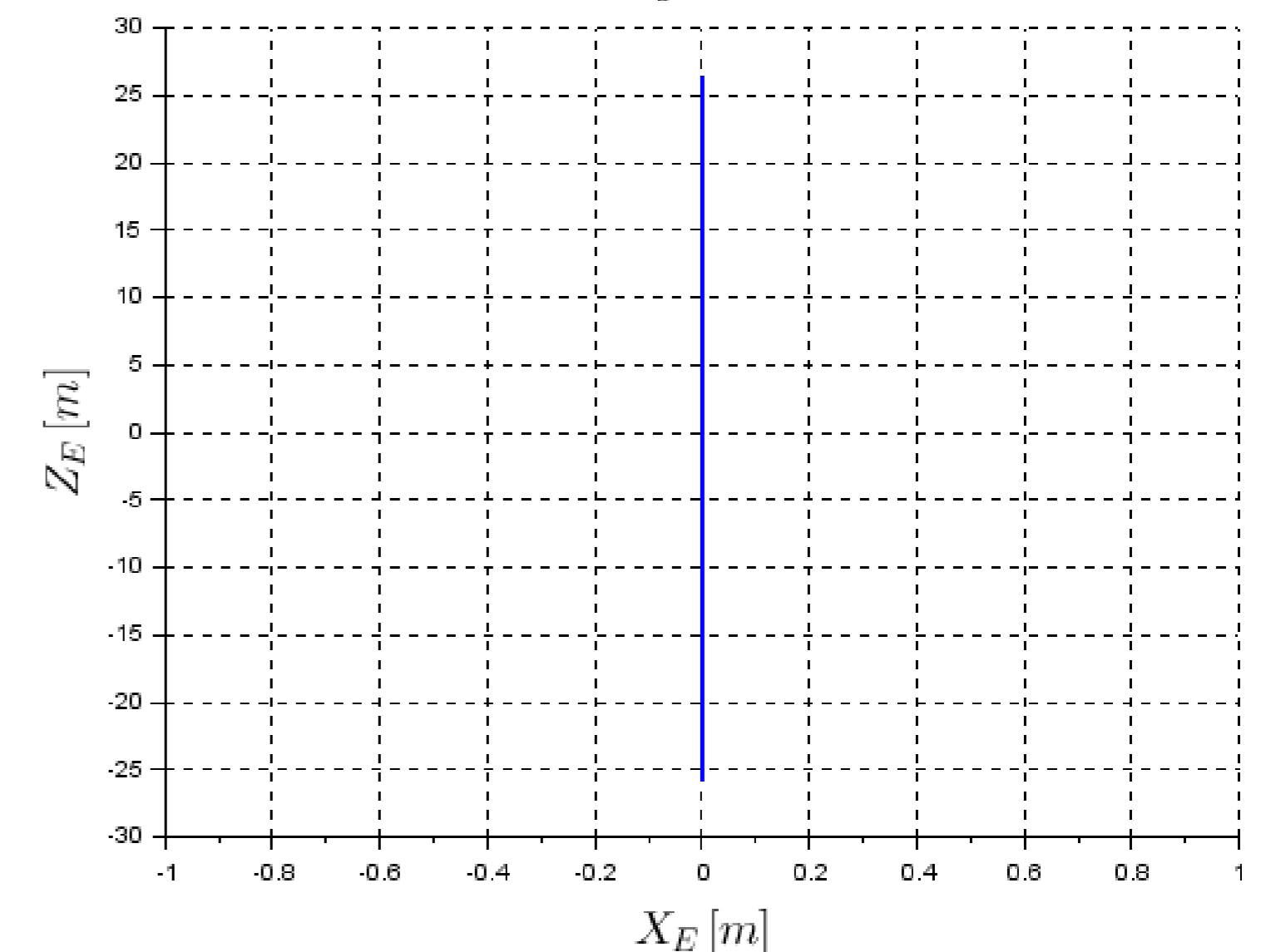
Subida e descida em Z



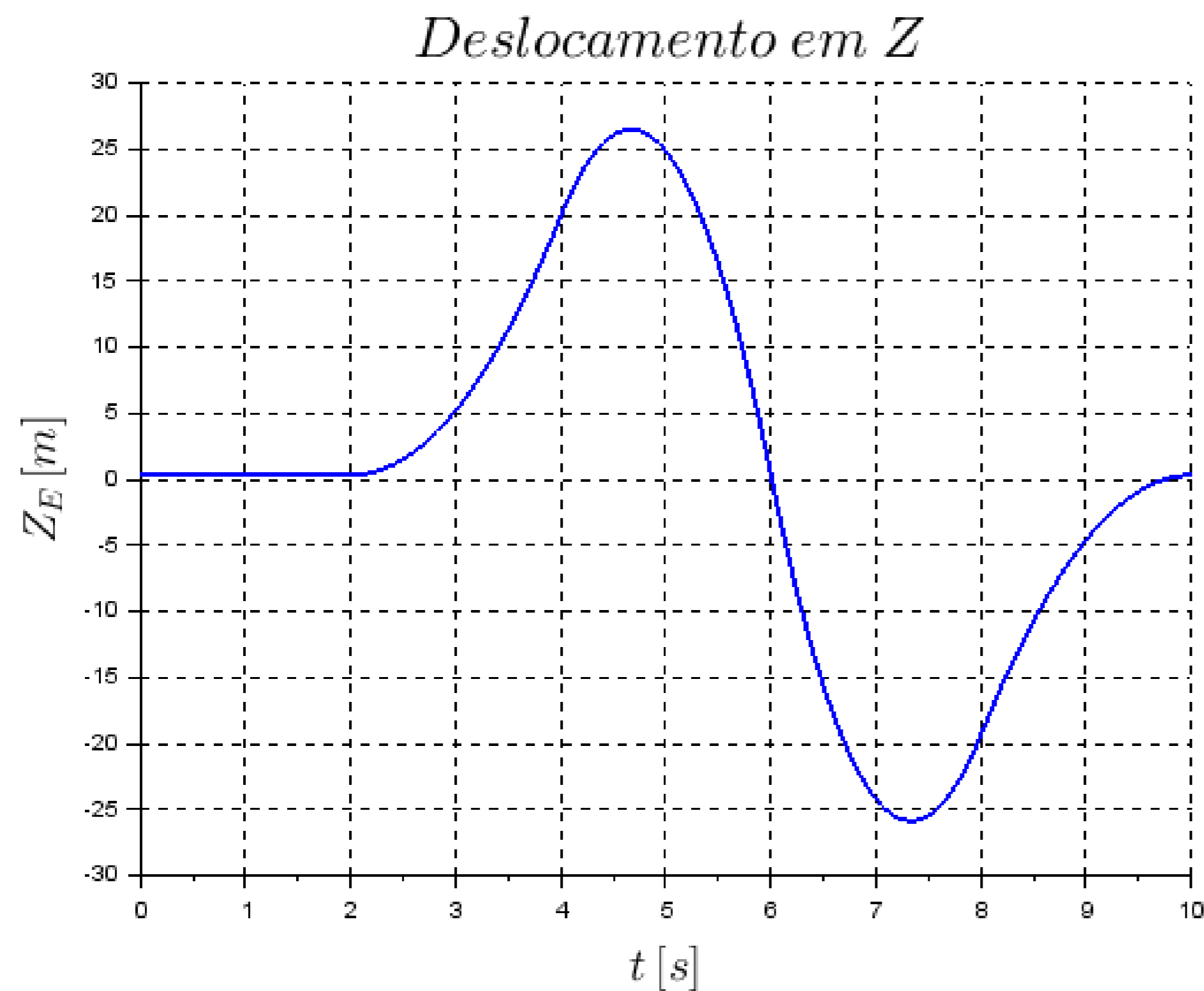
Arfagem



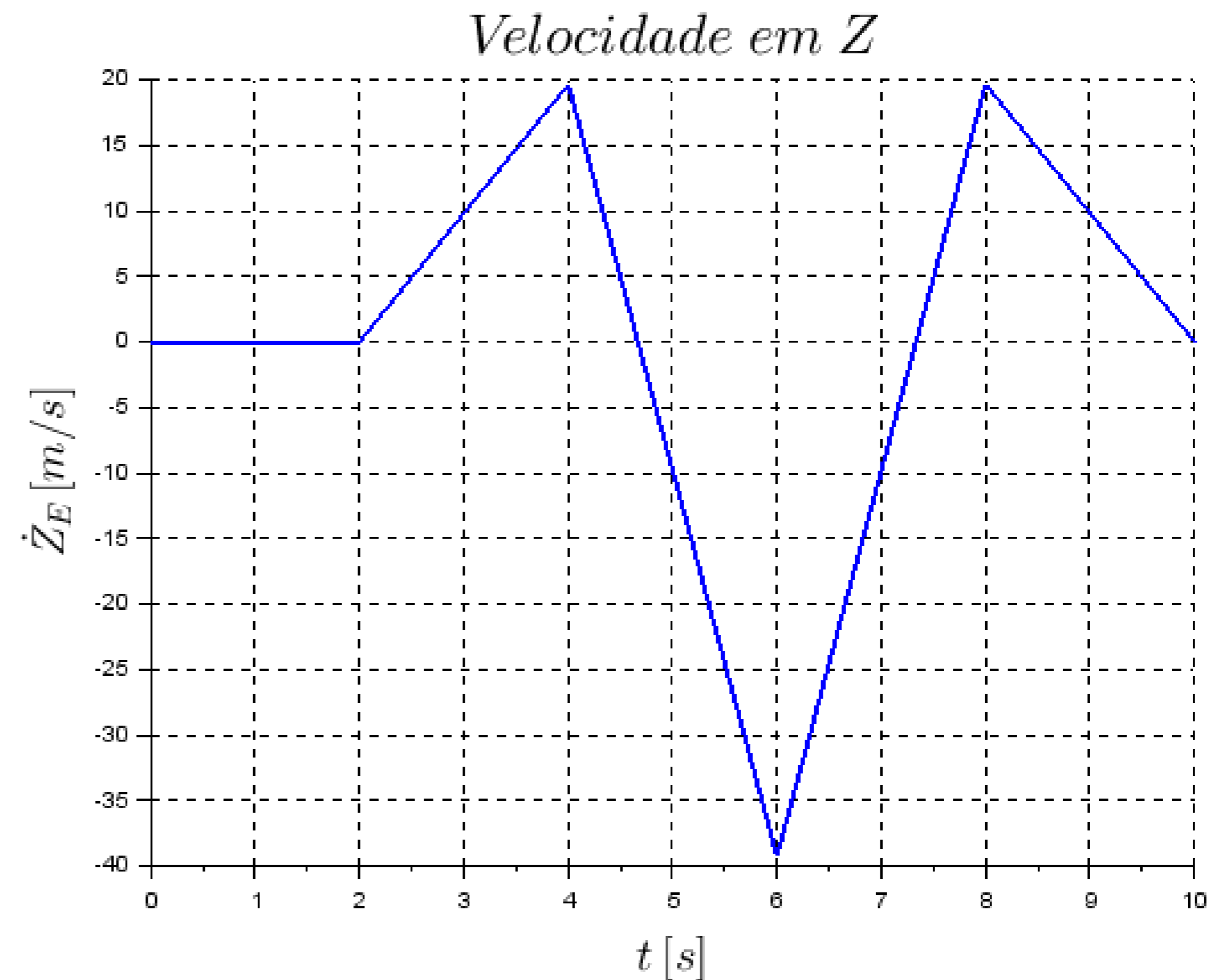
Trajectoria



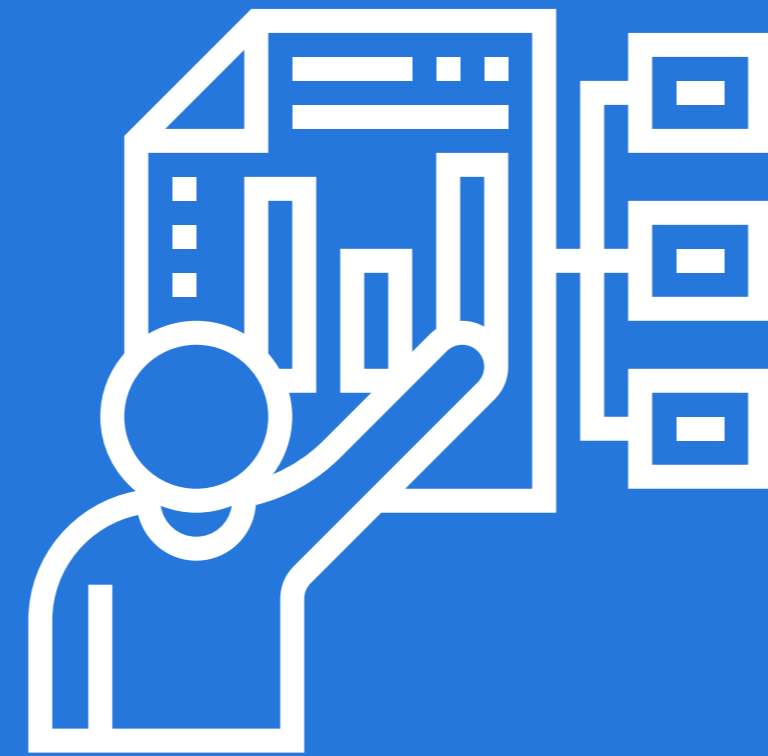
# Resposta ao degrau – Degraus múltiplos



- Inércia: Resposta do deslocamento com a mudança na velocidade não é simultânea
- Referencial como topo de um prédio justifica a altura negativa em Z



- Simetria relacionada a resultante das forças
- $2s - 4s \rightarrow +mg$
- $4s - 6s \rightarrow -3mg$
- $6s - 8s \rightarrow 3mg$
- $8s - 10s \rightarrow -mg$



# Conclusão



- A finalidade foi executar corretamente a modelagem cinemática e dinâmica do movimento de um quadricóptero no plano XZ.
- O foco foi na influência do valor das entradas do sistema considerando sua operação, levando em conta que o sistema não é amortecido.
- Modelagem por Newton-Euler e Lagrange e simplificação para o plano XZ. Simulações demonstraram a instabilidade do sistema.
- No estudo de estabilidade do sistema, os polos encontrados foram nulos, caracterizando um sistema instável. O critério de Routh-Hurwitz também confirmou a instabilidade.
- Os desafios envolvem o sistema possuir diversos graus de liberdade e ser instável, necessitando de controle para melhor compreender suas simulações.
- O que poderia ser feito é um estudo de outros cenários mais complexos.



# Referências Bibliográficas

BOUABDALLAH, S., 2007. **Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying.** Tese de Doutorado, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

CAVALLARO, S. L. H. **Modelagem, Simulação e Controle de um VANT do Tipo Quadricóptero.** Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade de São Paulo, 2019.

COOK, M. V. **Flight Dynamics Principles.** 3a edição. Oxford, UK, Elsevier, 2013.

COSTA, S. **Controle e Simulação de um Quadrirrotor Convencional.** Tese de Mestrado em Engenharia Aeroespacial, Universidade Técnica de Lisboa, 2008.

DA SILVA, A. L. **Voo Autônomo de Veículo Aéreo Não tripulado tipo quadrirrotor.** 2012. 70p. Relatório Final de Pós-Doutorado, Programa de PósGraduação em Engenharia de Telecomunicação e controle – USP, São Paulo, 2012

DOMINGUES, J. M. B. **Quadrotor Prototype.** Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade de Lisboa, 2009

FELÍCIO, L. C. **Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta.** 2a edição, 2010.

GARCIA, C. **Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos.** 1a edição, 1997.

LEISHMAN, J. G. **A History of Helicopter Flight.** s.l. : University of Maryland, 2000. Disponível em: <<http://terpconnect.umd.edu/~leishman/Aero/history.html>>. Acesso em 01 out. 2020.

LIMA, G.V. **Modelagem Dinâmica e Controle para Navegação de um Veículo Aéreo Não Tripulado do tipo Quadricóptero.** Tese de Mestrado em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Uberlândia, 2015.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno.** 5a edição. São Paulo, BR: Pearson, 2011.

OLIVEIRA, A. C. F. **Modelagem Dinâmica e Controle de um Veículo Aéreo Não Tripulado do Tipo Quadrirrotor.** Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do ABC, 2019