

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Modelagem longitudinal em cruzeiro de uma aeronave biplana radiocontrolada

Modelagem de sistemas dinâmicos PME 3380

> Ives C. Vieira - 10355551 Mauricio C. Leiman - 10772571 Vítor Facchini - 10772605 Yago N. Yang - 10772626

Professor: Agenor Fleury e Décio Crisol

São Paulo 2020

Sumário

1	Lista de símbolos					
2	Introdução					
3	Objetivos					
4	Revisão bibliográfica4.1W. F. Phillips: Mechanics of Flight [1]4.2M. Cook: Flight Dynamics Principles [2]4.3W. Cooper: Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads [3]4.4John Anderson Jr.: Fundamentals of Aerodynamics [4]4.5D. E. Hoak: The USAF Stability and Control DATCOM [5]					
5	Moo	delo Físico	11			
6	Mod 6.1 6.2 6.3 6.4 6.5 6.6 6.7 6.8 6.9	delo MatemáticoDefinição dos eixos do problemaVariáveis consideradas na modelagemForças na aeronave6.3.1Força peso6.3.2Forças aerodinâmicas6.3.3Força de tração6.4.1Momentos na aeronave6.4.2Momento da tração6.4.2Momento decorrente da atuação de superfícies de controleHipóteses simplificadorasCondições de trimagemEquações do movimentoLinearização do problemaModelagem aerodinâmica6.9.1Coeficientes aerodinâmicos6.9.3Força e momento resultante na aeronave6.9.4Derivadas com relação à taxa de arfagem6.9.6Derivadas com relação às perturbações das superfícies de controle	12 12 13 14 14 14 15 15 15 15 15 16 17 18 19 22 22 23 24 25 26			
7	Solu 7.1 7.2	ução da modelagem da aeronaveTransformada de Laplace e funções de transferênciaParâmetros numéricos7.2.1Substituição dos valores numéricos no sistema linearizado	27 27 28 29			

PME 3380 Modelagem longitudinal em cruzeiro de uma aeronave biplana radiocontrolada

	7.2.2 Obtenção das funções de transferência						
7.3 Análise de estabilidade, polos e zeros do sistema							
7.3.1 Aplicação do critério de Routh-Hurwitz							
	7.4 Análise de Frequência pelo diagrama de Bode						
		7.4.1	Diagramas de Bode	32			
	7.5	Comp	aração entre o modelo linear e o não linear	33			
		7.5.1	Perturbação do tipo degrau	34			
		7.5.2	Perturbação do tipo rampa	35			
		7.5.3	Perturbação do tipo impulso	37			
8	Con	sidera	ções Finais	39			
9	Apê	endice:	Códigos utilizados na simulação	40			
	9.1	Simula	ação linear	40			
	9.2Simulação não linear469.3Comparação entre simulações não lineares e lineares53						
Re	eferê	ncias I	Bibliográficas	64			

Lista de Figuras

2.1	Aeronaves de 2018 e 2019 da Keep Flying e Keep Flying Jr	8
3.1	Aeronave de 2020 da equipe Keep Flying	9
5.1	Localização das superfícies de comando da aeronave estudada	11
$6.1 \\ 6.2 \\ 6.3 \\ 6.4$	Sistemas de eixos adotado	12 13 14 23
7.1 7.2 7.3	Diagrama de polos e zeros $\dots \dots \dots$	30 32 33
7.4	Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação degrau .	34
7.5	Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação degrau	34
7.6	Rampa utilizada na simulação	35
7.7	Comparação entre o modelo linear e não linear para perturbação rampa	36
7.8	Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação rampa	36
7.9	Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação impulso .	37
7.10	Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação impulso .	37

Lista de Tabelas

6.1	Variáveis consideradas no movimento	13
6.2	Variáveis auxiliares	13
6.3	Hipóteses simplificadoras adotadas	16
6.4	Variáveis de Estado e auxiliares descritas pelo método das pequenas pertubrações	19
6.5	Parâmetros numéricos utilizados	25
6.6	Parâmetros numéricos utilizados	26
7.1	Valores numéricos utilizados	28
7.2	Critério de Routh-Hurwitz	31

1 Lista de símbolos

Símbolo	Significado					
α	Ângulo de ataque					
CG	Centro de gravidade					
C_D	Coeficiente de arrasto					
C_L	Coeficiente de sustentação					
C_m	Coeficiente de momento					
$C_{L_{\alpha}}$	Derivada do coeficiente de sustentação no α					
$C_{D_{\alpha}}$	Derivada do coeficiente de arrasto no α					
$C_{M_{\alpha}}$	Derivada do coeficiente de momento no α					
\bar{c}	Corda média aerodinâmica					
ϕ	Figura 6.1					
θ	Figura 6.1					
ψ	Figura 6.1					
x_f	Figura 6.1					
x_b	Figura 6.1					
y_f	Figura 6.1					
y_b	Figura 6.1					
z_f	Figura 6.1					
z_b	Figura 6.1					
u	Velocidade do avião em relação ao escoamento em \boldsymbol{x}_b					
v	Velocidade do avião em relação ao escoamento em y_b					
w	Velocidade do avião em relação ao escoamento em z_b					
p	Velocidade angular do avião em x_b					
q	Velocidade angular do avião em y_b					
r	Velocidade angular do avião em z_b					
x	Deslocamento do avião em x_f					
y	Deslocamento do avião em y_f					
z	Deslocamento do avião em z_f					
δ_{prof}	Deflexão do profundor					
δ_{ail}	Deflexão do aileron					
δ_{leme}	Deflexão do leme					
Т	Tração					
m	Massa					
g	Aceleração gravitacional					
W	Força peso					
L	Força de sustentação					
D	Força de arrasto					
F_g	Força gravitacional					
ρ	Massa específica do ar					

Símbolo	Significado
\overline{V}	Velocidade de referência do avião
α_{T0}	Ângulo de ataque do motor quando a aeronave possui $\alpha = 0$
F_T	Força de tração
M_T	Momento da tração
h_{motor}	Altura do motor em relação ao solo
h_{CG}	Altura do CG em relação ao solo
z_T	$h_{motor} - h_{CG}$
x_T	Coordenada x do centro de tração da aeronave
F	Força resultante no avião
М	Momento resultante no avião
F_{x_f}	Força resultante no avião em x_f
F_{z_f}	Força resultante no avião em z_f
α_{trim}	Ângulo de ataque de triagem do avião
M_{y_f}	Momento resultante em y_f
Maer	Momento aerodinâmico
C_M	Coeficiente de momento
V_0	Velocidade de referência do avião
C_{L_0}	Coeficiente de sustentação para $\alpha = 0$
C_{D_0}	Coeficiente de arrasto para $\alpha = 0$
C_{M_0}	Coeficiente de momento para $\alpha = 0$
β	Ângulo de derrapagem
C_{θ}	$\cos heta$
C_{ϕ}	$\cos\phi$
C_{ψ}	$\cos\psi$
S_{θ}	$\sin heta$
S_{ϕ}	$\sin\phi$
S_{ψ}	$\sin\psi$
B_0	Variável genérica B na condição de equilíbrio de equilíbrio
B_i	Variável genérica B no instante i
ΔB_i	Variação da variável genérica no instante i
<u> </u>	Derivada da variável genérica B no tempo
V_{wy_f}	Velocidade do vento no eixo y_f
F_{xb_0}	Força em x_b na posição de equilíbrio
F_x	Força resultante em x_b
F_y	Força resultante em y_b
F_z	Força resultante em z_b
M_x	Momento resultante em x_b
M_y	Momento resultante em y_b
M_z	Momento resultante em z_b
W_x	Momento resultante em x_b
W_y	Momento resultante em y_b
W_z	Momento resultante em z_b
\bar{B}_{III}	$\frac{\partial B_b}{\partial B_b}$
ν_{oK}	∂K

	N / T 1 1	1 •/ 1• 1		•	1			1 • 1		1.	1 1
PIVLE 3380	Modelagem	longitudinal	em	cruzeiro	de	nma	aeronave	hinle	ana :	radiocont	rolada
I MIL 00000	mouciagem	iongiuaamai	UIII	CI UZCII O	uc	uma	acronave	orpre	una .	raulocom	Iorada
	()	()									

Símbolo	Significado	
S	Área alar	
S_h Área da empenagem horizontal		
x_1	Distância do CG ao centro aerodinâmico da asa inferior	
x_2	Distância do CG ao centro aerodinâmico da asa superior	
C_{L1}	Coeficiente de sustentação da asa inferior	
C_{L2}	Coeficiente de sustentação da asa superior	
η_h	Fator de eficiencia da cauda	
x_h	Distância do CG ao centro aerodinâmico da cauda	
C_{L_h}	Coeficiente de sustentação da cauda	
I_{yy}	Inércia do avião no eixo y_b	
VLM	Vortex lattice Methode	
DATCOM	Data Compedium	
CFD	Computional Fluid Dynamics	

PME 3380 Modelagem longitudinal em cruzeiro de uma aeronave biplana radiocontrolada

2 Introdução

A Keep Flying é a atual representante de Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP) na competição SAE Brasil Aerodesign, na qual é proposto que cada equipe faça o desenvolvimento de um projeto de uma aeronave cargueira radiocontrolada, a Figura 2.1 mostra alguns dos aviões da equipe Keep Flying. A equipe participa nesta competição em duas frentes: na categoria Micro com a Keep Flying Jr (campeã do torneio de acesso à competição principal em 2017 e décima colocada em sua primeira participação em 2018) e na categoria Regular com a Keep Flying que foi fundada em 2003 e apresenta uma série de títulos e conquistas, como a primeira colocação geral em 2006, a segunda colocação geral em 2008 e 2018, o prêmio Embraer de excelência em projeto em 2018, além do recorde de maior carga transportada obtido em 2009.



Figura 2.1: Aeronaves de 2018 e 2019 da Keep Flying e Keep Flying Jr.

Visando melhorar a qualidade das simulações de voo para agregar qualidade ao projeto de novas aeronaves em geral, além de permitir a simulação de voos sem a necessidade de encontros presenciais (devido à pandemia de CoVid-19 em 2020), inicialmente foi pensada a elaboração da modelagem de um simulador de voo capaz de representar uma aeronave da equipe durante toda a trajetória da categoria Regular.

Entretanto, buscando a simplificação do problema a fim de se manter o trabalho no escopo da disciplina, foi feita a opção pela modelagem longitudinal do avião em cruzeiro, que será descrita ao longo do seguinte relatório.

3 Objetivos

O objetivo do projeto se resume à elaboração de uma modelagem longitudinal que represente a aeronave da equipe Keep Flying de 2020 (Figura 3.1) durante o voo em cruzeiro. Serão apresentados os desenvolvimentos que levam à obtenção das equações diferenciais do movimento, representação no espaço de estados e no domínio da frequência. Além disso, também serão incluídos resultados referentes à simulação destas representações em ambiente computacional adequado, bem como discussões e conclusões sobre estes resultados obtidos.



Figura 3.1: Aeronave de 2020 da equipe Keep Flying

4 Revisão bibliográfica

4.1 W. F. Phillips: Mechanics of Flight [1]

Essa é a principal referência utilizada no desenvolvimento do trabalho, o sistema de eixos utilizado durante a modelagem matemática e a dedução das equações do movimento são baseadas nesta referência. Essa referência também forneceu auxílios matemáticos, como uma matriz de transição que permite facilmente transformar vetores entre os 2 sistemas de eixos utilizados. Optou-se, também, por se basear na modelagem proposta por Phillips pela simplicidade e clareza das explicações.

4.2 M. Cook: Flight Dynamics Principles [2]

Utilizou-se o texto junto com a modelagem proposta por Phillips por apresentar considerações aprofundadas de estabilidade, não tão discutidas na referência anterior. Além de possuir um maior detalhamento na linearização de equações.

4.3 W. Cooper: Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads [3]

O texto foi utilizado na etapa final do projeto, para o cálculo dos fatores de carga da aeronave durante o voo simulado.

4.4 John Anderson Jr.: Fundamentals of Aerodynamics [4]

Essa referência mostra considerações aerodinâmicas relevantes na definição e emprego dos coeficientes aerodinâmicos.

4.5 D. E. Hoak: The USAF Stability and Control DAT-COM [5]

O DATCOM de estabilidade e controle da Força Aérea Americana fornece diferentes métodos e conhecimentos da aeronáutica relativos à dinâmica de aeronaves, obtenção de coeficientes aerodinâmicos e derivadas de estabilidade. Há diversos trabalhos referenciados nele, que são, principalmente, estudos desenvolvidos por engenheiros aeronáuticos da NACA (*National Advisory Committee for Aeronautics*). Nesse DATCOM apresentam-se vários métodos para a determinação de derivadas úteis à modelagem da dinâmica de uma aeronave para casos distintos (subsônico, transônico, asa com ou sem *taper*, enflechamento, altos ângulos de ataque, etc...) e são também apresentadas as suas correlações com dados experimentais. Utilizou-se essa referência pois, em algumas situações, as simplificações realizadas nas modelagens de Cook e Philips não são condizentes com aeronaves radiocontroladas em configurações não convencionais.

5 Modelo Físico

Nas análises apresentadas neste relatório será considerado que todos os componentes da aeronave se comportam como corpos rígidos. Logo, serão desconsideradas quaisquer deformações na estrutura, assim como variações nas propriedades desta.

Assim, destacam-se três superfícies de comando que regem os movimentos da aeronave nos eixos lateral (arfagem), longitudinal (rolagem) e vertical (guinada), sendo estas:

- Profundor: localizado no bordo de fuga da empenagem horizontal, controla a arfagem;
- *Ailerons*: presentes nas extremidades do bordo de fuga da asa inferior, são responsáveis pela rolagem;
- Lemes: contidos nos bordos de fuga das empenagens verticais (que por sua vez estão acopladas às extremidades da empenagem horizontal), controlam a guinada.

A figura 5.1 a seguir ilustra com mais clareza as superfícies e suas posições na aeronave.



Figura 5.1: Localização das superfícies de comando da aeronave estudada

6 Modelo Matemático

Na descrição do modelo matemático da aeronave em cruzeiro, definem-se os eixos de coordenadas adotados, as varíaveis relevantes e suas equações que descrevem o comportamento dinâmico do corpo. Também definem-se as forças e momentos atuantes no problema. Posteriormente, faz-se uso de hipóteses simplificadoras para linearização das equações e descrição em espaço de estados apropriado para simulação.

6.1 Definição dos eixos do problema

Para realizar a modelagem e o estudo do movimento da aeronave, é necessário estabelecer sistemas de coordenadas nos quais as variáveis do movimento serão orientadas e quantificadas. Para problemas de aeronáutica, a literatura [1] sugere a utilização de duas bases vetoriais: uma base fixa na aeronave, com eixos seguindo a simetria do avião, e uma base fixa no espaço, ambas com origem no centro de gravidade do corpo, sendo que no caso da base fixa sua origem é determinada pela posição do CG no instante inicial da simuação.



Figura 6.1: Sistemas de eixos adotado

6.2 Variáveis consideradas na modelagem

Para descrever o comportamento da aeronave em cruzeiro, foram utilizadas 12 váriaveis separadas em 4 grupos principais, conforme a Tabela 6.1:

Tabela 6.1: Variáveis conside	radas no m	ovin	nento
Definição	Símbolo		
Velocidades de Translação	u	V	W
Velocidades de Rotação	р	q	r
Posição da Aeronave	Х	У	\mathbf{Z}
Inclinação da Aeronave	ϕ	θ	ψ

Além disso, foram consideradas 3 variáveis relativas a deflexão das superfícies de controle 1 váriavel relativa à tração do motor.

Tabela	6.2:	Variáveis	auxiliares

Definição	Símbolo
Deflexão do profundor	δ_{prof}
Deflexão do aileron	δ_{ail}
Deflexão do leme	δ_{leme}
Tração Disponível	Т



Figura 6.2: Velocidades lineares e angulares



Figura 6.3: Variáveis auxiliares

6.3 Forças na aeronave

Nesta seção serão definidas as forças atuantes no avião, que serão representadas como a soma das forças aerodinâmicas, gravitacionais e de tração nos eixos x_b , y_b e z_b . Ressalta-se que alguns dos componentes aqui definidos serão descartados na seção 6.9.3, devido à adoção de hipóteses simplificadoras descritas na tabela 6.3.

6.3.1 Força peso

Considera-se que a força peso é constante, e efetua-se a decomposição desta nos eixos pertinentes, definindo-a da seguinte maneira.

$$F_g = W \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix}, \text{ com } W = mg$$
(6.1)

6.3.2 Forças aerodinâmicas

As forças aerodinâmicas que atuam na aeronave são o arrasto e a sustentação. Definese que o arrasto será representado da seguinte maneira.

$$D = \frac{1}{2}\rho SC_D V^2 \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \\ 0 \\ -\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$
(6.2)

Já para a sustentação, determina-se o formato abaixo.

$$L = \frac{1}{2}\rho SC_L V^2 \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ 0 \\ -\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$
(6.3)

6.3.3 Força de tração

A força de tração é definida como:

$$F_T = T \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{T0}) \\ 0 \\ -\sin(\alpha_{T0}) \end{bmatrix}$$
(6.4)

6.4 Momentos na aeronave

Finalizada a definição das forças que atuam na aeronave, deve-se então efetuar o mesmo procedimento para os momentos, utilizando-se a mesma convenção.

6.4.1 Momento da tração

O momento gerado pela força de tração pode ser determinado através da seguinte equação

$$M_T = T \left[(h_{motor} - h_{CG}) \cos(\alpha_{T0}) + x_T \sin(\alpha_{T0}) \right]$$
(6.5)

6.4.2 Momento decorrente da atuação de superfícies de controle

O momento definido nesta subseção não representa apenas o efeito da atuação dos profundores, já que o C_M empregado engloba também o momento oriundo das forças aerodinâmicas, calculado em torno do CG.

$$M_{aer} = \frac{1}{2}\rho V^2 S \bar{c} C_m \tag{6.6}$$

6.5 Hipóteses simplificadoras

Para simplificar a solução do problema são adotadas diversas hipóteses simplificadoras, as quais são apresentadas e justificadas na Tabela 6.3 abaixo.

Hipótese	Justificativa			
<u>_</u>	Estrutura da aeronave apresenta alta			
Componenti do	rigidez, possibilitando desprezar efeitos			
Corpo rigido	aeroelásticos e variações no			
	comportamento aerodinâmico			
Comandos instantâneos	Atraso desprezível entre o momento do			
Comandos instantaneos	inpute a atuação de superfícies de controle			
$C_L, C_D \in C_M$ independem	Regime de operação subsônico a			
do número de <i>Mach</i>	baixos valores de Reynolds			
Movimento longitudinal pode ser	Coeficientes de acoplamento podem ser			
analicado indopondontemonto	desprezados em voo nivelado, segundo a			
analisado independentemente	literatura empregada			
Comportamento aerodinâmico	Aproximação razoável para baixos			
linear	ângulos de ataque (aeronave longe do $stall$)			
Derivadas de estabilidade e das	Literatura utilizada considera desprezível			
perturbações são independente				
$I_{xy} \; \mathrm{e} \; I_{yz} = 0$	A aeronave é simétrica em relação ao plano oxz			
$I_{xz}=0$	Magnitude desprezível			
Downwash dosprozíval	Efeito de difícil implementação na modelagem			
	proposta			
Força de tração paralela ao eixo x_b	Posicionamento do motor			
Motor não gera torque em torno do eixo x_b	Magnitude desprezível			
Curva do tração do motor podo sor	Representação considerada aceitável após			
ropresentada por uma equação de 2º grau	realização de ensaios de tração com o motor			
representada por una equação de 20 grad	em túnel de vento			

Tabela 6.3: Hipóteses simplificadoras adotadas

6.6 Condições de trimagem

A condição inicial adotada para a modelagem proposta é a de uma aeronave trimada, ou seja, em equilíbrio. Assim, temos que:

$$\sum F = 0 \tag{6.7}$$

$$\sum M = 0 \tag{6.8}$$

Dadas as hipóteses simplificadoras da tabela 6.3, podemos considerar apenas as forças nos eixos x_f e z_f e os momentos em y_f . Chegamos então às seguintes equações no equilíbrio:

$$\sum F_{x_f} = T \cos \alpha_{trim} - D = 0 \tag{6.9}$$

$$\sum F_{z_f} = L - W + T \sin \alpha_{trim} = 0 \tag{6.10}$$

$$\sum M_{y_f} = M_{aer} - M_T = 0 \tag{6.11}$$

Podemos reescrevê-las a fim de se obter expressões para os coeficientes de sustentação, arrasto e momento.

$$T\cos\alpha_{trim} - D = 0 \to T\cos\alpha_{trim} - \frac{1}{2}\rho SC_D V_0^2 = 0 \to C_D = \frac{T\cos\alpha_{trim}}{\frac{1}{2}\rho SV_0^2}$$
(6.12)

$$L - W + T\sin\alpha_{trim} = 0 \to T\sin\alpha_{trim} - W + \frac{1}{2}\rho SC_L V_0^2 = 0 \to C_L = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho SV_0^2} - \frac{T\sin\alpha_{trim}}{\frac{1}{2}\rho SV_0^2} \quad (6.13)$$

$$M_{aer} - M_T = 0 \to \frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c}C_M - T(h_{motor} - h_{CG}) = 0 \to C_M = \frac{T(h_{motor} - h_{CG})}{\frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c}}$$
(6.14)

Os coeficientes podem ser expandidos em série de Taylor, a fim de se iniciar o processo de linearização.

$$C_L = C_{L_0} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{prof}} \delta_{prof} + \frac{\partial C_L}{\partial q} q$$
(6.15)

$$C_D = C_{D_0} + \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{prof}} \delta_{prof}$$
(6.16)

$$C_M = C_{M_0} + \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{prof}} \delta_{prof} + \frac{\partial C_M}{\partial q} q$$
(6.17)

Efetuando aproximações para ângulos pequenos (visto que α é baixo para a etapa de voo analisada) e subtituições para adequar as equações à condição de trimagem, chegamos finalmente às seguintes expressões linearizadas:

$$C_{L_0} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha_{trim} + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{prof}} \delta_{prof_{trim}} + \frac{\partial C_L}{\partial q} q_{trim} - \frac{W}{\frac{1}{2}\rho SV_0^2} + \frac{T\alpha_{trim}}{\frac{1}{2}\rho SV_0^2} = 0$$
(6.18)

$$C_{D_0} + \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \alpha_{trim} + \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{prof}} \delta_{prof_{trim}} - \frac{T}{\frac{1}{2}\rho S V_0^2} = 0$$
(6.19)

$$C_{M_0} + \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{prof}} \delta_{prof_{trim}} + \frac{\partial C_M}{\partial q} q_{trim} - \frac{T(h_{motor} - h_{CG})}{\frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c}} = 0$$
(6.20)

A definição da condição inicial é definida pelas quatro incógnitas do sistema formado pelas equações acima $(T, \alpha_{trim}, \delta_{prof_{trim}} e q_{trim})$ e pela entrada V_0 . Ressalta-se que os valores das incógnitas são definidos não só pela solução da equação, mas também por limites físicos ($\alpha_{trim} < \alpha_{estol}$, por exemplo).

6.7 Equações do movimento

Assumindo um instante de tempo inicial na qual são conhecidas todas as váriaveis de estado descritas na seção 6.2, pode-se determinar a velocidade e os ângulos aerodinâmicos para as componentes translacionais da velocidade:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \tag{6.21}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{w}{u}\right) \tag{6.22}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) \tag{6.23}$$

Com base nisso, segundo [1], pode-se determinar as forças e momentos aerodinâmicos atuantes na aeronave em cada instante de tempo, e então escrever as derivadas de estado utilizando a segunda lei de Newton atrelada a uma formulação pelos ângulos de Euler, conforme sistema de eixos apresentado na Seção 6.1.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \frac{g}{W} \begin{bmatrix} F_{xb} \\ F_{yb} \\ F_{zb} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} -S_{\theta} \\ S_{\phi}C_{\theta} \\ C_{\phi}C_{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rv - uw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix}$$
(6.24)

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx_b} & 0 & -I_{xz_b} \\ 0 & I_{yy_b} & 0 \\ -I_{zx_b} & 0 & I_{zz_b} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_{x_b} + (I_{yy_b} - I_{zz_b})qr + I_{xz_b}pq \\ M_{y_b} + (I_{zz_b} - I_{xx_b})pr + I_{xz_b}(r^2 - p^2) \\ M_{z_b} + (I_{xx_b} - I_{yy_b})pq - I_{xz_b}qr \end{bmatrix}$$
(6.25)

$$\begin{bmatrix} \dot{x_f} \\ \dot{y_f} \\ \dot{z_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\theta}C_{\psi} & S_{\phi}S_{\theta}C_{\psi} - C_{\phi}S_{\psi} & C_{\phi}S_{\theta}C_{\psi} + S_{\phi}S_{\psi} \\ C_{\theta}S_{\psi} & S_{\phi}S_{\theta}S_{\psi} + C_{\phi}C_{\psi} & C_{\phi}S_{\theta}S_{\psi} + S_{\phi}C_{\psi} \\ -S_{\theta} & S_{\phi}C_{\theta} & C_{\phi}C_{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$
(6.26)

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_{\phi}S_{\theta}}{C_{\theta}} & \frac{C_{\phi}S_{\theta}}{C_{\theta}} \\ 0 & C_{\phi} & -S_{\phi} \\ 0 & \frac{S_{\phi}}{C_{\theta}} & \frac{C_{\phi}}{C_{\theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$
(6.27)

6.8 Linearização do problema

As equações matriciais apresentadas na seção anterior são não lineares, de modo que a obtenção de uma solução análitica é extremamente custosa ou mesmo impossível. Como forma de contornar o problema, escolhe-se pela linearização destas em torno de um ponto de interesse da análise. Para tanto, foi aplicado a teoria das pequenas perturbações, na qual descreve-se cada variável de interesse como o seu respectivo valor no estado de equílibrio acrescido de um termo de perturbação:

$$B_i = B_{i_0} + \Delta B_i \tag{6.28}$$

Considerando como estado equilíbrio o voo de cruzeiro, isto é, aeronave nivelada com velocidade constante no eixo x ("para frente") e rotações nulas. Como em cruzeiro a somatória das forças e momentos aerodinâmicos é igual a zero, tem-se:

$$u_0 = V_0$$
 (6.29)

$$x_0 = (V_{wx_f} + V_0 cos\theta_0)t (6.30)$$

$$y_0 = V_{wy_f} t \tag{6.31}$$

$$z_0 = (V_{wz_f} + V_0 sen\theta_0)t (6.32)$$

$$F_{xb_0} = -W_{xb_0} \tag{6.33}$$

$$F_{zb_0} = -W_{zb_0} \tag{6.34}$$

$$v_0 = w_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = \psi_0 = F_{yb_0} = W_{yb_00} = M_0 = 0$$
(6.35)

Utilizando os valores recém-determinados no estado de equilíbrio, pode-se escrever as variáveis na abordagem de pequenas perturbações como:

Tabela 6.4: Variáveis de Estado e auxiliares descritas pelo método das pequenas pertubrações

Eixo X	Eixo Y	Eixo Z
$u = V_0 + \Delta u$	$v = \Delta v$	$w = \Delta w$
$p = \Delta p$	$q = \Delta q$	$r = \Delta r$
$x_f = (V_{wx_f} + V_0 \cos\theta_0)t + \Delta x_f$	$y_f = V_{wy_f}t + \Delta y_f$	$z_f = (V_{wz_f} + V_0 sen\theta_0)t + \Delta z_f$
$\phi = \Delta \phi$	$ heta = heta_0 + \Delta heta$	$\psi = \Delta \psi$
$F_{xb} = -W_{xb_0} + \Delta F_{xb}$	$F_{yb} = \Delta F_{yb}$	$F_{zb} = -W_{zb_0} + \Delta F_{zb}$
$W_{yb} = W_{xb_0} + \Delta W_{xb}$	$W_{yb} = \Delta W_{yb}$	$W_{zb} = W_{zb_0} + \Delta W_{zb}$
$M_{xb} = \Delta M_{xb}$	$M_{yb} = \Delta M_{yb}$	$M_{zb} = \Delta M_{zb}$
Aileron	Profundor	Leme
$\delta_{ail} = \delta_{ail0} + \Delta \delta_{ail}$	$\delta_{prof} = \delta_{prof0} + \Delta \delta_{prof}$	$\delta_{leme} = \delta_{leme0} + \Delta \delta_{leme}$

Com base na Seção 6.7 e na Tabela 6.4, pode-se escrever a Segunda Lei de Newton na forma matricial para as derivadas de perturbação translacionais e rotacionais, assumindo que, por serem pequenas, o produto entre perturbações $\Delta v_i \Delta v_j$ pode ser negligenciado. Dessa forma, obtém-se a Equação 6.36:

$$\begin{bmatrix} \frac{W}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{W}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{W}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{v} \\ \Delta \dot{\psi} \\ \Delta \dot{p} \\ \Delta \dot{q} \\ \Delta \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta F_x + \Delta_{W_x} \\ \Delta F_y + \Delta_{W_y} - \Delta r V_0 \frac{W}{g} \\ \Delta F_z + \Delta_{W_z} + \Delta q V_0 \frac{W}{g} \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \end{bmatrix}$$
(6.36)

As forças e momentos aerodinâmicos são funções das velocidades lineares e angulares, da aceleração translacional e da deflexão das superfícies de comando. Aplicando a mesma hipótese de pequenas perturbações, pode-se escrevê-las matricialmente como:

- Forças Aerodinâmicas

$$\begin{bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial u} & \frac{\partial F_x}{\partial v} & \frac{\partial F_x}{\partial w} \\ \frac{\partial F_y}{\partial u} & \frac{\partial F_y}{\partial w} & \frac{\partial F_y}{\partial w} \\ \frac{\partial F_z}{\partial u} & \frac{\partial F_z}{\partial v} & \frac{\partial F_z}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial p} & \frac{\partial F_x}{\partial q} & \frac{\partial F_x}{\partial r} \\ \frac{\partial F_y}{\partial p} & \frac{\partial F_y}{\partial q} & \frac{\partial F_y}{\partial r} \\ \frac{\partial F_z}{\partial q} & \frac{\partial F_z}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{bmatrix} +$$
(6.37)
$$\frac{\partial F_x}{\partial u} \frac{\partial F_x}{\partial v} \frac{\partial F_x}{\partial v} \frac{\partial F_x}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{v} \\ \Delta \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \delta_{ail}} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_{prof}} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \delta_{ail}} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_{prof}} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \delta_{ail}} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_{prof}} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_{ail} \\ \Delta \delta_{prof} \\ \Delta \delta_r \end{bmatrix}$$

- Momentos Aerodinâmicos

$$\begin{bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial u} & \frac{\partial M_x}{\partial v} & \frac{\partial M_x}{\partial w} \\ \frac{\partial M_y}{\partial u} & \frac{\partial M_y}{\partial w} & \frac{\partial M_y}{\partial w} \\ \frac{\partial M_z}{\partial u} & \frac{\partial M_z}{\partial v} & \frac{\partial M_z}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial p} & \frac{\partial M_x}{\partial q} & \frac{\partial M_x}{\partial r} \\ \frac{\partial M_y}{\partial p} & \frac{\partial M_y}{\partial q} & \frac{\partial M_z}{\partial r} \\ \frac{\partial M_z}{\partial p} & \frac{\partial M_z}{\partial q} & \frac{\partial M_z}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{bmatrix} +$$
(6.38)
$$\frac{\frac{\partial M_x}{\partial \dot{u}}}{\frac{\partial M_z}{\partial \dot{u}}} \frac{\frac{\partial M_x}{\partial \dot{w}}}{\frac{\partial \dot{w}}{\partial \dot{v}}} \begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{v} \\ \Delta \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial \delta_{ail}} & \frac{\partial M_x}{\partial \delta_{prof}} & \frac{\partial M_x}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \delta_{ail}} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta_{prof}} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial M_z}{\partial \delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_{ail} \\ \Delta \delta_{prof} \\ \Delta \delta_r \end{bmatrix}$$

Ao assumir a hipótese de pequenas pertubações, bem como ao se desprezar o *Downwash*, podese desprezar algumas das derivadas parciais presentes na descrição das forças e momentos em função das acelerações translacionais:

$$\frac{\partial F_y}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial F_x}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial F_y}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial F_z}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial F_y}{\partial \dot{w}} = 0$$
(6.39)

$$\frac{\partial M_x}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial M_z}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial M_x}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial M_y}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial M_z}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial M_z}{\partial \dot{w}} = \frac{\partial M_z}{\partial \dot{w}} = 0$$
(6.40)

Outras derivadas parciais podem ser desprezadas em virtude da condição de simetria do problema, assumindo o estado de equilíbrio da aeronave anteriormente exposto, uma vez que todas as derivadas são calculadas em relação a esse estado. Dessa forma:

$$\frac{\partial F_x}{\partial v} = \frac{\partial F_y}{\partial u} = \frac{\partial F_y}{\partial w} = \frac{\partial F_z}{\partial v} = 0$$
(6.41)

$$\frac{\partial M_x}{\partial u} = \frac{\partial M_x}{\partial w} = \frac{\partial M_y}{\partial v} = \frac{\partial M_z}{\partial u} = \frac{\partial M_z}{\partial w} = 0$$
(6.42)

$$\frac{\partial F_x}{\partial p} = \frac{\partial F_x}{\partial r} = \frac{\partial F_y}{\partial q} = \frac{\partial F_z}{\partial p} = \frac{\partial F_z}{\partial r} = 0$$
(6.43)

$$\frac{\partial M_x}{\partial q} = \frac{\partial M_y}{\partial p} = \frac{\partial M_y}{\partial r} = \frac{\partial M_z}{\partial q} = 0 \tag{6.44}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial \delta_a il} = \frac{\partial F_x}{\partial \delta_r} = \frac{\partial F_y}{\partial \delta_{prof}} = \frac{\partial F_z}{\partial \delta_a il} = \frac{\partial F_z}{\partial \delta_r} = 0$$
(6.45)

$$\frac{\partial F_y}{\partial \delta_{prof}} = \frac{\partial F_y}{\partial \delta_a il} = \frac{\partial F_y}{\partial \delta_r} = \frac{\partial F_y}{\partial \delta_{prof}} = 0$$
(6.46)

Considerando agora a descrição da força peso da aeronave, cuja direção varia em função dos ângulos de Euler, pode-se escrevê-la matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} -sen\theta \\ sen\phi cos\theta \\ cos\phi cos\theta \end{bmatrix}$$
(6.47)

Assumindo então a condição de equilíbrio e a abordagem por pequenas perturbações, pode-se determinar a componente perturbada do peso nas três direções do espaço:

$$\begin{bmatrix} \Delta W_x \\ \Delta W_y \\ \Delta W_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_x}{\partial \phi} & \frac{\partial W_x}{\partial \theta} & \frac{\partial W_x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial W_y}{\partial \phi} & \frac{\partial W_y}{\partial \theta} & \frac{\partial W_y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial W_z}{\partial \phi} & \frac{\partial W_z}{\partial \theta} & \frac{\partial W_z}{\partial \psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -W \cos\theta_0 & 0 \\ W \cos\theta_0 & 0 & 0 \\ 0 & -W \sin\theta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{bmatrix}$$
(6.48)

Assumindo então aproximações para pequenos ângulos para o processo de linearização:

$$sin\phi \cong \Delta\phi, sin\theta \cong sen\theta_0 + cos\theta_0\Delta\theta, sin\psi \cong \Delta\psi$$
 (6.49)

$$\cos\phi \cong 1, \cos\theta \cong \cos\theta_0 - \sin\theta_0 \Delta\theta, \cos\psi \cong 1 \tag{6.50}$$

E substituindo-as nas expressões anteriormente obtidas, pode-se finalmente representar as equações do movimento longitudinal do avião em cruzeiro linearizadas e na forma matricial da maneira apresentada abaixo (note que a notação do tipo \bar{F}_{ij} indica $\frac{\partial F_i}{\partial j}$).

$$\begin{bmatrix} \frac{W}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{W}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{x}_{f} \\ \Delta \dot{z}_{f} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{xu} & \bar{F}_{xw} & \bar{F}_{xq} & 0 & 0 & -W \cos \theta_{0} \\ \bar{F}_{zu} & \bar{F}_{zw} & \bar{F}_{zq} + \frac{WV_{0}}{g} & 0 & 0 & -W \sin \theta_{0} \\ \bar{K}_{yu} & \bar{M}_{yw} & \bar{M}_{yq} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_{0} & \sin \theta_{0} & 0 & 0 & 0 & -V_{0} \sin \theta_{0} \\ -\sin \theta_{0} & \cos \theta_{0} & 0 & 0 & 0 & -V_{0} \cos \theta_{0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta x_{f} \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}_{x\delta_{prof}} \\ \bar{K}_{z\delta_{prof}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \delta_{prof} \quad (6.51)$$

6.9 Modelagem aerodinâmica

Nesta seção será abordada a obtenção das derivadas aerodinâmicas relevantes aos equacionamentos matemáticos apresentados nas seções anteriores, tomando como principal referência os desenvolvimentos feitos por [1]), já introduzido na seção de revisão bibliográfica.

6.9.1 Coeficientes aerodinâmicos

O conhecimento do comportamento dos coeficientes aerodinâmicos para simulação da modelagem abordada neste relatório é de extrema importância, principalmente no que tange aos coeficientes de arrasto (C_D) , de sustentação (C_L) e de momento (C_M) .

Estes últimos coeficientes são dependentes de alguns outros parâmetros, dentre eles o número de Reynolds (Re), a taxa de arfagem, a deflexão das superfícies de comando, o ângulo de ataque (α) e o número de Mach. Entretanto, como será abordada uma aeronave não supersônica, com velocidade máxima de 23 m/s (fornecido pela equipe Keep Flying), pode-se desprezar a influência do número de Mach e adotar comportamento constante no intervalo de Reynolds a ser considerado.

Assim, pode-se dizer que os coeficientes buscados dependem somente da deflexão das superfícies de comando, da taxa de arfagem e do ângulo de ataque. Com isto, pode-se obter os valores numéricos dos coeficientes necessários através de alguns métodos, como o CFD, o VLM e por meio de ensaios em túneis de vento; métodos estes utilizados para a obtenção dos coeficientes a serem empregados na modelagem em desenvolvimento, além de métodos análiticos para a obtenção de derivadas destes coeficientes.

6.9.2 Cálculos iniciais

Antes de prosseguir com a modelagem da aeronave, é fundamental obter algumas relações entre variáveis que serão utilizadas durante os cálculos:

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{u}{v} = \cos \alpha \approx 1 \tag{6.52}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{-\sin \alpha}{v} \approx 0 \tag{6.53}$$

$$\frac{\partial v}{\partial W} = \frac{W}{v} = \sin \alpha \approx 0 \tag{6.54}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial W} = \frac{\cos \alpha}{v} \approx \frac{1}{v} \tag{6.55}$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial u} = \frac{\partial C_D}{\partial v} = 0 \tag{6.56}$$



Figura 6.4: Diagrama de corpo livre da aeronave

6.9.3 Força e momento resultante na aeronave

Com as forças definidas nas Seções 6.3 e 6.4, os ângulos obtidos na Seção 6.9.2 e aplicando as hipóteses simplificadoras descritas na Seção 6.3, é possível desenvolver as expressões da forças e momentos resultantes na aeronave.

• Força resultante em x_b :

$$F_x = \frac{1}{2}\rho V^2 S[C_L \sin(\alpha) - C_D \cos(\alpha)] + T \cos(\alpha_{T0}) - W \sin(\theta)$$
$$F_x = \frac{1}{2}\rho V^2 S[C_L \sin(\alpha) - C_D \cos(\alpha)] + T - W \sin(\theta)$$
(6.57)

• Força resultante em y_b :

$$F_y = 0 \tag{6.58}$$

• Força resultante em z_b :

$$F_z = \frac{1}{2}\rho V^2 S[-C_L \cos(\alpha) - C_D \sin(\alpha)] - T \sin(\alpha_{T0}) + W \cos(\phi) \cos(\theta)$$
$$F_z = \frac{1}{2}\rho V^2 S[-C_L \cos(\alpha) - C_D \sin(\alpha)] + W \cos(\phi) \cos(\theta)$$
(6.59)

• Momento resultante em x_b :

$$M_x = 0 \tag{6.60}$$

• Momento resultante em y_b :

$$M_{y} = \frac{1}{2}\rho V^{2}S\bar{c}C_{m} + T[z_{T}\cos(\alpha_{T0}) + x_{T}\sin(\alpha_{T0})]$$
$$M_{y} = \frac{1}{2}\rho V^{2}S\bar{c}C_{m} + Tz_{T}$$
(6.61)

• Momento resultante em z_b :

$$M_z = 0 \tag{6.62}$$

6.9.4 Derivadas Devido a Perturbações de Velocidade

Obteve-se as derivadas de estabilidade por meio da diferenciação das forças e momentos resultantes em relação a $u \in w.$

$$\bar{F}_{xu} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{2} \rho V^2 S[C_L \sin(\alpha) - C_D \cos(\alpha)] + \frac{\partial}{\partial u} T - \frac{\partial}{\partial u} W \sin(\theta)$$

Sendo:

$$A = \frac{\partial}{\partial u} V^2 [C_L \sin(\alpha) - C_D \cos(\alpha)]$$

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial V^2}{\partial u} (C_L \sin \alpha - C_D \cos \alpha) + V^2 \left(\frac{\partial C_L}{\partial u} \sin \alpha + C_L \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial C_D}{\partial u} \cos \alpha + C_D \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)$$
$$\frac{\partial A}{\partial u} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 \frac{\partial C_D}{\partial V} - \rho S V C_D$$
$$\bar{F}_{xu} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 \frac{\partial C_D}{\partial V} - \rho S V C_D + \frac{\partial T}{\partial u}$$
$$\frac{\partial C_D}{\partial V} = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} \rho S V^2 \frac{\partial C_D}{\partial V} = 0$$
$$\bar{F}_{xu} = -\rho S V C_D + \frac{\partial T}{\partial u}$$
(6.63)

 $\label{eq:Realizando-se} Realizando-se o mesmo procedimento para as demais derivadas, obteve-se os resultados da Tabela 6.5.$

$0 \in [a \ 0.0.1 \ a]$	amentos numericos utiliza	
Derivada	Expressão	
\bar{F}_{xu}	$- ho SVC_D + rac{\partial T}{\partial u}$	
\bar{F}_{zu}	$-\rho SVC_L$	
\bar{M}_{yu}	$ ho VSar{c}C_M + rac{\partial T}{\partial V}z_T$	
$ar{F}_{xw}$	$\frac{1}{2}\rho SV\left(C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha}\right)$	
\bar{F}_{zw}	$\frac{1}{2}\rho SV\left(-C_D - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right)$	
\bar{M}_{yw}	$rac{1}{2} ho SVar{c}rac{\partial C_M}{\partial lpha}$	

Tabela 6.5: Parâmetros numéricos utilizados

6.9.5 Derivadas com relação à taxa de arfagem

Começando pela derivada com relação à força F_x , que ocorre pela variação de arrasto visto a mudança de incidência das asas e da cauda, verifica-se que, segundo (Phillips, 2010), essa derivada pode ser desprezada visto que o ganho de arrasto é um efeito pequeno, assim:

$$\frac{\partial F_x}{\partial q} = \bar{F}_{xq} = -\frac{1}{2}\rho V^2 S \frac{\partial C_D}{\partial q} = 0$$
(6.64)

Para as demais derivadas, será calculada a contribuição da cauda e de cada uma das asas separadamente, considerando a distância do CG ao centro aerodinâmico de cada superfície sustentadora. Na descrição matemática será utilizado o subscrito 1 para dados referentes à asa inferior e 2 para a asa superior. Assim, para a força F_z , tem-se a seguinte definição para a derivada.

$$\frac{\partial F_z}{\partial q} = \bar{F}_{zq} = \frac{1}{2}\rho V \left(Sx_1 \frac{\partial C_{L1}}{\partial \alpha} + Sx_2 \frac{\partial C_{L2}}{\partial \alpha} + \eta_h S_h x_h \frac{\partial C_{Lh}}{\partial \alpha} \right)$$
(6.65)

Para o momento M_y tem-se a seguinte expressão.

$$\frac{\partial M_y}{\partial q} = \bar{M}_{yq} = -\frac{1}{2}\rho V \left(S x_1^2 \frac{\partial C_{L1}}{\partial \alpha} + S x_2^2 \frac{\partial C_{L2}}{\partial \alpha} + \eta_h S_h x_h^2 \frac{\partial C_{Lh}}{\partial \alpha} \right)$$
(6.66)

6.9.6 Derivadas com relação às perturbações das superfícies de controle

Para as perturbações em função das superfícies de controle, obteve-se as derivadas seguindo o mesmo procedimento realizado nas Seções anteriores. Os resultados obtidos estão na Tabela 6.6.

Derivada	Expressao
$\bar{F}_{x\delta_{prof}}$	$-\frac{1}{2}\rho SV\frac{\partial C_D}{\partial \delta_{prof}}$
$\bar{F}_{z\delta_{prof}}$	$-\frac{1}{2}\rho SV \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{prof}}$
$\bar{M}_{y\delta_{prof}}$	$\frac{1}{2}\rho SV\bar{c}\frac{\partial C_L}{\partial \delta_{prof}}$

Tabela 6.6: Parâme	tros numéricos	utilizados
Derivada	Expressão	

7 Solução da modelagem da aeronave

7.1 Transformada de Laplace e funções de transferência

Para a obtenção das funções de transferência relacionadas às variáveis consideradas nas equações linearizadas representativas do sistema estudado, é primeiramente necessário a aplicação da transformada de Laplace. De maneira geral, um sistema na forma de espaço de estados pode ser representado na forma indicada a seguir $(A,B,C \in D$ são matrizes, p(t) é o vetor das variáveis de estado estudadas, u(t) é o vetor de entradas e y(t) é o vetor das saídas).

$$\dot{p}(t) = Ap(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cp(t) + Du(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace já assumindo condições iniciais nulas, obtém-se o seguinte resultado.

$$sP(s) = AP(s) + BU(s) \tag{7.1}$$

$$Y(s) = CP(s) + DU(s) \tag{7.2}$$

As funções de transferência podem ser obtidas observando-se a função que relaciona a entrada U(s) com a saída do sistema Y(s). Primeiramente altera-se levemente a equação 7.1 como feito logo a seguir.

$$sP(s) - AP(s) = BU(s) \Rightarrow (sI - A)P(s) = BU(s) \Rightarrow P(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$
(7.3)

Substituindo o resultado mais à direita da equação 7.3 na equação 7.2 obtém-se a seguinte expressão.

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$
(7.4)

Logo, dos desenvolvimentos anteriores, pode-se concluir que as funções de transferências G(s) são dadas da maneira abaixo.

$$G(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]$$
(7.5)

Impondo que a saída do sistema Y(s) represente cada uma das variáveis de estado, pode-se simplificar a expressão dada por 7.5, já que dessa forma a matriz C será uma matriz do tipo identidade e D será uma matriz nula.

$$G(s) = (sI - A)^{-1}B (7.6)$$

Utilizando a definição do sistema de equações linearizadas na forma matricial definida na seção 6.8, pode-se chegar às funções de transferência para a modelagem abordada neste relatório na forma literal. Mais adiante na seção 7.2.2 serão apresentadas as funções de transferência já com os valores numéricos substituídos.

Note ainda que o termo $(sI - A)^{-1}$ da equação 7.6 tem uma representação própria, como pode ser observado abaixo.

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{|sI - A|} = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$
(7.7)

Da equação 7.7 é possível obter a equação característica a partir da qual se pode obter os polos do sistema resolvendo-se a seguinte equação a seguir.

$$\det(sI - A) = 0 \tag{7.8}$$

É importante ressaltar que a equação característica do sistema estará presente nos denominadores de todas as funções de transferência das variáveis a serem estudadas, sendo portanto comum a todas estas funções.

7.2Parâmetros numéricos

Na tabela 7.1 encontram-se os valores númericos - fornecidos pela Keep Flying - a serem empregados na modelagem do sistema desenvolvido ao longo do relatório.

Tabela 7.1: Valores numéricos utilizados			
Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
m	20 kg	C_{L_0}	0,4900
g	$9,8100 \text{ m/s}^2$	$C_{L_{max}}$	1,4700
ρ	$1,1062 \text{ kg/m}^3$	$C_{L_{\alpha}}$	3,9400
S	$3,2000 \text{ m}^2$	$C_{Lh_{\alpha}}$	0,3110
V	$15,7500 { m m/s}$	$C_{L1_{\alpha}}$	1,9108
\bar{c}	0,2340 m	$C_{L2_{\alpha}}$	1,7226
x_{CG}	$0,1509 {\rm m}$	$C_{L_{\delta_{prof}}}$	-0,3538
x_1	-0,0059 m	C_{L_q}	0,0380
x_2	-0,1242 m	C_{D_0}	0,0600
x_h	-0,2561 m	$C_{D_{\alpha}}$	0,2180
z_{motor}	0,4438 m	$C_{D_{\delta_{prof}}}$	-0,0080
z_{CG}	0,4384 m	C_{D_q}	0,0049
S_h	$0,3387 \text{ m}^2$	C_{M_0}	0,0600
I_{yy}	$1,3600 \text{ kg.m}^2$	$C_{M_{\alpha}}$	-0,3846
η_h	1	$C_{M_{\delta_{prof}}}$	0,3470
$\frac{\partial T}{\partial V}$	-1,7464 kg/s	C_{M_q}	-0,0187

Tabala 7.1. Valence com (circa cotilizad

É importante ressaltar que η_h tem valor igual a 1 devido ao fato de os coeficientes aerodinâmicos serem obtidos através de um VLM que já considera a interferência das asas na empenagem horizontal no cálculo dos coeficientes aerodinâmicos.

7.2.1 Substituição dos valores numéricos no sistema linearizado

Com a substituição dos parâmetros numéricos apresentados na tabela 7.1 nas matrizes do sistema linearizado (equação 6.51) é possível obter-se o seguinte sistema de equações diferenciais do movimento na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{q} \\ \Delta \dot{x}_{f} \\ \Delta \dot{x}_{f} \\ \Delta \dot{z}_{f} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2534 & 0,3190 & -0,3257 & 0 & 0 & -9,8099 \\ -1,2457 & -5,5746 & 15,4243 & 0 & 0 & -0,0409 \\ 0,0070 & -1,8447 & -0,5903 & 0 & 0 & 0,0656 \\ 1,0000 & 0,0042 & 0 & 0 & 0 & -0,0656 \\ -0,0042 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 & -15,7499 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta x_{f} \\ \Delta z_{f} \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1756 \\ 7,7668 \\ -26,2133 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \delta_{prof}$$

$$(7.9)$$

7.2.2 Obtenção das funções de transferência

A partir das matrizes sistema linearizado já com os valores numéricos definidos, é possível empregar a fórmula apresentada na equação 7.5 para obter-se as funções de transferência relativas as variáveis estudadas. Entretanto, com o auxílio da função ss2tf é possível obter as funções de transferência requeridas de forma direta. Dessa forma, tem-se as seguintes funções de transferência apresentadas logo a seguir.

• Para a variável
$$u: G_u(s) = \frac{0.2s^5 + 12.1s^4 + 187.5s^3 + 1574.4s^2}{s^6 + 6.4183s^5 + 33.7051s^4 + 8.9966s^3 + 22.9044s^2}$$

• Para a variável w:
$$G_w(s) = \frac{7,8s^5 - 398s^4 - 110,9s^3 - 319,5s^2}{s^6 + 6,4183s^5 + 33,7051s^4 + 8,9966s^3 + 22,9044s^2}$$

• Para a variável q: $G_q(s) = \frac{-26,2s^5 - 167,1s^4 - 50,6s^3}{s^6 + 6,4183s^5 + 33,7051s^4 + 8,9966s^3 + 22,9044s^2}$

• Para a variável
$$x_f$$
: $G_{x_f}(s) = \frac{0.2s^4 + 12.2s^3 + 198s^2 + 1576.4s}{s^6 + 6.4183s^5 + 33.7051s^4 + 8.9966s^3 + 22.9044s^2}$

• Para a variável
$$z_f$$
: $G_{z_f}(s) = \frac{7,8s^4 + 14,8s^3 + 2520s^2 + 471,5s}{s^6 + 6,4183s^5 + 33,7051s^4 + 8,9966s^3 + 22,9044s^2}$

• Para a variável θ : $G_{\theta}(s) = \frac{-26,2s^4 - 167,1s^3 - 50,6s^2}{s^6 + 6,4183s^5 + 33,7051s^4 + 8,9966s^3 + 22,9044s^2}$

7.3 Análise de estabilidade, polos e zeros do sistema

Para analisar a estabilidade do sistema, deve-se encontrar, a partir da função de transferência determinada anteriormente, os zeros e polos do sistema. Para a função de transferência em questão, obteve-se a Figura 7.1.

Primeiramente, a análise dos polos indica que o sistema é marginalmente estável, uma vez que não há polos com componente real positiva e há polos com componente real nula.



Figura 7.1: Diagrama de polos e zeros

Passando para a análise dos zeros, primeiramente serão tecidos comentários sobre a função de transferência da variável u. Nota-se que esta possui zeros em -42,935, -8,7825 - 10,306i, 0 e -8,7825 + 10,306i. Quando se compara estes zeros com os polos dominantes do sistema que são -3,13905 - 4,71755i e -3,13905 + 4,71755i pode-se perceber que os zeros relacionados à variável u, excetuando-se o zero nulo, são zeros rápidos estáveis e não interferem na resposta do sistema.

Com relação à variável w, os zeros são -0.146304 - 0.881352i, -0.146304 + 0.881352i(zeros lentos e estáveis, e que portanto geram sobressinal), 0, e 51,3182 (zero rápido, porém instável por ter parte real positiva, logo levando o sistema a um *undershoot*).

Já para a variável q, tem-se que os zeros da função de transferência são -6,05912, -0,318742 e 0. O primeiro se trata de um zero rápido e estável que não interfere na resposta do sistema e o segundo é um zero lento e estável que gera sobressinal.

Ademais, para a variável x_f , os zeros da função de transferência se dão em -41,8414, -9,57929 - 9,8293i, -9,57929 + 9,8293i e 0. Todos os três primeiros zeros listados neste caso são zeros rápidos e não interferem no sistema.

Para a função de transferência referente à variável z_f os zeros são -0.855074 - 17.9451i, -0.855074 + 17.9451i, $-0.187289 \in 0$. Neste caso, todos os três primeiros zeros apresentados são zeros lentos e estáveis, gerando sobressinal.

Por fim, em relação à variável θ , os zeros da correspondente função de transferência são $-6,05912, 0,318742 \in 0$. O primeiro valor é um zero rápido e sem interferência no sistema e o segundo se trata de um zero lento, porém estável, o que implica que este induz um sobressinal.

7.3.1 Aplicação do critério de Routh-Hurwitz

Uma outra forma de analisar a estabilidade do sistema é através do método de Routh-Hurwitz. Nessa abordagem, não é necessário calcular os polos da equação característica do sistema, uma vez que a análise é feita através da disposição dos coeficientes da equação no que se chama de Arranjo de Routh.As sucessivas linhas desse arranjo são determinadas por relações entre os termos anteriores, de modo que a última linha contenha apenas um elemento. Para o sistema analisando, obteve-se:

Tabela 7.2: Critério de Routh-Hurwitz				
Coeficientes				
1	33,7051	22,9044	0	
6,4183	$8,\!9966$	0	0	
32,30	$22,\!90$	0	0	
4,45	0	0	0	
22,90	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
	$ \begin{array}{c} 1 \\ 6,4183 \\ 32,30 \\ 4,45 \\ 22,90 \\ 0 \\ 0 \end{array} $	$\begin{array}{c cccc} \text{La 7.2: Critério de }\\\hline & \textbf{Coeficien}\\\hline 1 & 33,7051\\\hline 6,4183 & 8,9966\\\hline 32,30 & 22,90\\\hline 4,45 & 0\\\hline 22,90 & 0\\\hline 0 & 0\\\hline 0 & 0\\\hline 0 & 0\\\hline \end{array}$	$\begin{tarred} 1 a 7.2: Critério de Routh-Hu \\ \hline $Coeficientes$ \\ \hline 1 33,7051 22,9044 \\ 6,4183 8,9966 0 \\ 32,30 22,90 0 \\ 4,45 0 0 \\ 22,90 0 0 \\ 0 0 0 \\ 0 0 0 \\ 0 0 0 \\ \hline 0 0 0 \\ 0 0 0 \\ \hline 0 0 \\ \hline 0 0 \\ \hline 0 0 0 \\ \hline 0 0 \\ \hline 0 0 0 \\ \hline 0 0 \\ \hline \ \ 0 0 \\ \hline \ \ 0 0 \\ \hline \ \ \ 0 0 \\ \hline \ \ \ \ 0 0 \\ \hline \ \ \ \$	

Nota-se que a equação característica do sistema (denominadores das funções de transferência) apresenta dois coeficientes nulos, o que indica que o sistema pode ser marginalmente estável. Logo cabe construir a tabela 7.3.1 correspondente à aplicação do critério de *Routh-Hurwitz*. Nesta tabela é possível notar que a primeira coluna apresenta zeros. Se fizermos a substituição do primeiro zero presente na primeira coluna por uma pequena constante arbitrária e continuarmos o processo, ainda terá-se no fim um zero na primeira coluna (que também pode ser substituído por outra constante). No entanto, a conclusão mais importante à qual se chega sobre a tabela 7.3.1 da maneira em que esta se encontra exibida, é o fato de aparecer uma linha inteira de zeros e não haver mudança de sinal na primeira coluna, o que indica que o sistema é, de fato, marginalmente estável.

7.4 Análise de Frequência pelo diagrama de Bode

O diagrama de Bode é mais uma ferramenta que permite analisar a dinâmica do sistema e obter informações a respeito da sua estabilidade e do seu amortecimento. Para tanto, há o enfoque no espaço de frequências do problema submetido a uma entrada senoidal. Para esta tarefa, foi utilizado o comando *bode* já presente na documentação do MATLAB, que retorna, para cada varíavel de estado, um gráfico relativo ao ganho e outro relativo à fase.

7.4.1 Diagramas de Bode



Figura 7.2: Diagrama de Bode na variável q

Verificou-se pelo formato dos picos no gráfico do ganho um amortecimento para curto período superior ao para o efeito de fugoide. Já quanto à fase verificou-se que não houve mudança de fase, assim existe controlabilidade do comando de entrada.



Figura 7.3: Diagrama de Bode na variável θ

Analisando a fase do diagrama, é possível verificar uma iminente inversão de fase, o que pode ser justificado pela alta complexidade do projeto e pelas aeronaves do Aerodesign se encontrarem em seu limite operacional, operando com pequenas margens de segurança.

7.5 Comparação entre o modelo linear e o não linear

Visando compreender melhor a dinâmica do problema analisado, foram realizadas análises a respeito do comportamento da aeronave em cruzeiro quando submetida a três tipos de perturbações do profundor: Impulso, Degrau e Rampa. Foram considerados um modelo linear e um modelo não linear de modo a possibilitar uma posterior comparação dos resultados encontrados e uma avaliação da linearização empregada.



7.5.1 Perturbação do tipo degrau

Figura 7.4: Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação degrau



Figura 7.5: Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação degrau

Analisando as respostas dos modelos linear e não-linear para uma excitação degrau, nota-se que a abordagem não-linear apresenta, em geral, um maior amortecimento, de modo que se verifica estabilidade no sistema não-linear, algo já esperado. Nota-se ainda que, embora no decorrer da simulação as repostas dos modelos tenham divergido significativamente, nos instantes iniciais, onde as perturbações ainda eram pequenas, ambas as abordagens acusavam valores muito próximos.

7.5.2 Perturbação do tipo rampa



Figura 7.6: Rampa utilizada na simulação



Figura 7.7: Comparação entre o modelo linear e não linear para perturbação rampa



Figura 7.8: Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação rampa

Novamente, constata-se que a abordagem não-linear apresenta, em geral, um maior amortecimento, verificando as afirmações feitas anteriormente para o caso de excitação degrau. No entanto, nota-se que a velocidade vertical da aeronave w apresenta bastante discrepância entre as abordagens devido ao fato da excitação rampa consistir em uma atuação abrupta e contínua do profundor com uma deflexão significativa (8°) , promovendo um momento de arfagem ininterrupto na aeronave a partir do instante inicial da simulação.

7.5.3 Perturbação do tipo impulso



Figura 7.9: Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação impulso



Figura 7.10: Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação impulso

PME 3380 Modelagem longitudinal em cruzeiro de uma aeronave biplana radiocontrolada

Por fim, na excitação por impulso, nota-se que a solução não linear apresenta um caráter oscilatório periódico no domínio do tempo para as varíaveis q e θ , mas com uma amplitude muito pequena, assim a aproximação linear foi capaz de representar a não linear. A velocidade vertical w da aeronave possui uma discrepância inicial crescente entre as duas abordagens;no entanto, retornam a convergir nos instantes finais da simulação, uma vez que no caso da entrada por impulso a excitação é significativa porém de curta duração, sendo interrompida ainda nos primeiros instantes de simulação.

8 Considerações Finais

Ao final do projeto foi possível determinar através de técnicas de linearização, análise de estabilidade e análise de frequências, o comportamento dinâmico longitudinal de uma aeronave radiocontrolada em voo de cruzeiro. Além disso, pode-se observar uma boa adequação geral entre a abordagem linearizada descrita na bibliografia de referência e a não-linear para os instantes iniciais das simulações numéricas.

9 Apêndice: Códigos utilizados na simulação

9.1 Simulação linear

```
function Main modelagem
1
 % Versao: Matlab 2020a
2
  % Disciplina: PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinamicos
3
  % Autores:
  % Ives C. Vieira - 10355551
5
  % Mauricio C. Leiman - 10772571
6
  % Vitor Facchini - 10772605
7
  \% Yago N. Yang -10772626
8
9
  % Essa rotina realizara a simulacao linear da aeronave, alem disso
10
     plotara
  % os diagramas de Bode, polos e zeros e obtera a funcao de
11
     transferencia.
  % Ela tambem calcula uma solucao linear, entretanto os diferentes
12
     casos
  % foram simulados na rotina "compara.m"
13
  % O equacionamento esta descritos no relatorio entregue.
14
  close all
15
16
  %% Valores
17
  % Constantes
18
  rho = 1.1062;
19
  g = 9.81;
20
  % Parametros Geometricos
21
 m = 20;
22
 W = m * g;
23
  Iyy = 1.36;
24
  z_{motor} = 0.4438;
25
  z cg = 0.4384;
26
  S = 3.2;
27
  Sh = 0.3387;
28
  mac = 0.234;
29
  x1 = -0.0059;
30
  x2 = -0.1242;
31
  xh = -0.2561;
32
  xCG = 0.1509;
33
34
  % Coeficientes Aerodinamicos
35
  dT = -1.7464;
36
 eta = 1;
37
```

```
CL0 = 0.49;
38
  CD0 = 0.06;
39
  CM0 = 0.06;
40
  CL alpha = 3.94;
41
  CD alpha = 0.2180;
42
  CM alpha = -0.3846;
43
  CL def = -0.3538;
44
  CD def = -0.008;
45
  CM def = -0.3470;
46
  CL alpha 1 = 1.9108;
47
  CL alpha 2 = 1.7226;
48
  CL alpha h = 0.3110;
49
50
  % Condicao de trimagem
51
  % Velocidade Inicial
52
  V = 15.75;
53
54
  % Chute Inicial
55
  x0 = [0;0;60];
56
  rvs = 0.5 * rho * V^2 * S;
57
58
  % Equacoes do Movimento
59
  fun = @(x) [ (CL0+CL alpha*x(1)+CL def*x(2)) + x(3)*sin(x(1))/rvs
60
       W/rvs;
       \mathbf{x}(3) \ast \mathbf{cos}(\mathbf{x}(1)) - (CD0+CD \quad alpha \ast \mathbf{x}(1)+CD \quad def \ast \mathbf{x}(2));
61
       (CM0+CM alpha*x(1)+CM def*x(2)) - (z motor-z cg)*x(3)/(rvs*mac)
62
           ];
63
  % Variaveis Trimadas
64
   options = optimoptions('fsolve', 'Display', 'off');
65
  y = fsolve(fun, x0, options);
66
  alpha trim = y(1); def trim = y(2); T trim = y(3);
67
68
  % Estados no sistema de eixos fixo no aviao %
69
  Vu = V * \cos(alpha trim);
70
  Vv = 0;
71
  Vw = V * sin (alpha trim);
72
  \% vet estados =
73
  %
              Vu Vw q xf zf theta
74
                               alpha trim]';
  y \text{ trim} = [Vu Vw 0 0 0]
75
76
  % Derivadas de estabilidade
77
  % Coeficientes aerodinamicos
78
  CL = CL0 + CL alpha*alpha trim + CL def*def trim;
79
  CD = CD0 + CD alpha*alpha trim + CD def*def trim;
80
```

```
CM = CM0 + CM_alpha*alpha_trim + CM_def*def_trim;
81
82
   % Forca peso
83
   Wf = [0 \ 0 \ W];
84
   Wb = body(y_trim, Wf);
85
   Xg = Wb(1);
86
   Zg = Wb(3);
87
88
   % Derivadas
89
   Fxu = -rho * S * V * CD + dT;
90
   Fzu = -rho * S * V * CL;
91
   Myu = rho *S*mac*V*CM + dT*(-z motor+z cg);
92
   Fxw = 0.5 * rho * S * V * (CL - CD alpha);
93
   Fzw = 0.5*rho*S*V*(-CD - CL_alpha);
94
   Myw = 0.5 * rho * S * V * mac * CM alpha;
95
   Fxq = 0;
96
   Fzq = 0.5*rho*V*(S*x1*CL_alpha_1 + S*x2*CL_alpha_2 + eta*Sh*xh*)
97
       CL alpha h);
   Myq = -0.5*rho*V*(S*x1^2*CL alpha 1 + S*x2^2*CL alpha 2 + eta*Sh*xh
98
       ^2*CL alpha h);;
   Fxd = -0.5*rho*S*V^2*CD def;
99
   Fzd = -0.5*rho*S*V^2*CL def;
100
   Myd = 0.5*rho*S*V^2*mac*CM def;
101
102
103
   %% Parametros
104
   % Matrizes do Sistema
105
   Inv = inv (W/g \ 0 \ 0 \ 0 \ 0
106
        0 \text{ W/g} 0 0 0 0
107
        0 0 Iyy 0 0 0
108
        0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0
109
        0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0
110
        0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1;
111
112
   A = [Fxu Fxw Fzq 0 0 -W*\cos(alpha_trim)]
113
   Fzu Fzw Fzq+W*V/g 0 0 -W*sin(alpha_trim)
114
   Myu Myw Myq 0 0 0
115
   \cos(\text{alpha trim}) \sin(\text{alpha trim}) = 0 = 0 - V * \sin(\text{alpha trim})
116
   -\sin(alpha_trim) \cos(alpha_trim) 0 0 0 -V*\cos(alpha_trim)
117
   0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ ];
118
119
   B = [Fxd]
120
        Fzd
121
        Myd
122
        0
123
```

0

```
0];
125
126
   A = Inv *A;
127
   B = Inv *B;
128
129
   \% C = zeros(2,4);
130
   \% \ \mathrm{C}(1 \ ,:) \ = \ \mathrm{rad2deg}\left( \begin{bmatrix} 0 & 1/\mathrm{V0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \ ; \ \ \mathrm{C}(2 \ ,:) \ = \ \mathrm{A}(2 \ ,:) \ / \ \mathrm{g} \ ;
131
   C = eve(6);
132
   D = zeros(6, 1);
133
134
   % Obtencao da Funcao de transferencia e diagrama de Polos e zeros
135
    [autoval, autovet] = eig(A);
136
    [numerador, denominador] = ss2tf(A, B, C, D, 1);
137
    [\text{zer}, \text{pol}, ~] = ss2zp(A, B, C, D, 1);
138
139
    figure
140
    plot(real(pol), imag(pol), 'kx', 'MarkerSize', 20, 'LineWidth', 1.5)
141
    hold on
142
    plot (real (zer), imag(zer), 'ro', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 1.5)
143
    xlabel('Eixo real');
144
    ylabel ('Eixo imaginario')
145
    legend('Polos', 'Zeros')
146
    grid on;
147
148
   % Espaco de Estados
149
    sys = ss(A, B, C, D);
150
151
   % Diagrama de Bode
152
   H1=tf(numerador(1,:),denominador);
153
   H2=tf(numerador(2,:),denominador);
154
   H3=tf(numerador(3,:),denominador);
155
   H4=tf(numerador(4,:),denominador);
156
   H5=tf(numerador(5,:),denominador);
157
   H6=tf(numerador(6,:),denominador);
158
159
    figure
160
    bode(H1)
161
    grid on
162
    title ('Diagrama de Bode para a variavel u')
163
164
    figure
165
    bode(H2)
166
    grid on
167
    title ('Diagrama de Bode para a variavel w')
168
```

```
figure
170
   bode(H3)
171
   grid on
172
   title ('Diagrama de Bode para a variavel q')
173
174
   figure
175
   bode(H6)
176
   grid on
177
   title ('Diagrama de Bode para a variavel \theta')
178
179
   % Parametros da Simulacao
180
   step = 0.005;
181
   tempo final = 10;
182
   t = 0: step: tempo final;
183
   vet temp = t;
184
   n = length(t);
185
   u = zeros(1,n);
186
   u(1,:) = deg2rad(0);
187
188
   y \ 0 = zeros(6,1);
189
   def = rad2deg(u);
190
191
   %% Solucao do sistema
192
   % Solucao do Sistema por ODE
193
   fun = @(t,x) odefun linear(t,x,A,B,u,vet temp);
194
195
   [t\_tot, y\_tot] = ode45(fun, t, y 0);
196
197
   % Plots
198
   u=y tot(:,1);
199
   w=y_tot(:,2);
200
   q=y_tot(:,3);
201
   x=y_tot(:,4);
202
   z=y_tot(:,5);
203
   alfa = rad2deg(y_tot(:,6));
204
   t=t tot;
205
206
   figure
207
   subplot(2,1,1)
208
   plot(t,u,'LineWidth',2)
209
   xlabel('Tempo [s]')
210
   ylabel ('u [m/s]')
211
   grid on
212
   subplot(2,1,2)
213
```

```
plot(t,w,'LineWidth',2)
214
   xlabel('Tempo [s]')
215
   ylabel ('w [m/s]')
216
   grid on
217
218
   figure
219
   subplot(2,1,1)
220
   plot(t,x,'LineWidth',2)
221
   xlabel('Tempo [s]')
222
   ylabel('x [m]')
223
   grid on
224
   subplot (2, 1, 2)
225
   plot(t,z,'LineWidth',2)
226
   xlabel('Tempo [s]')
227
   ylabel('z [s]')
228
   grid on
229
230
   figure
231
   subplot (2, 1, 1)
232
   plot(t, alfa, 'LineWidth', 2)
233
   xlabel('Tempo [s]')
234
   ylabel('\alpha [graus]')
235
   grid on
236
   subplot(2,1,2)
237
   plot(t,q,'LineWidth',2)
238
   xlabel('Tempo [s]')
239
   ylabel('q [graus/s]')
240
   grid on
241
242
   figure
243
   plot(t,def, 'LineWidth',2)
244
   xlabel('Tempo [s]')
245
   ylabel('\delta_{prof} [graus]')
246
   grid on
247
   end
248
249
   function x ponto = odefun linear(t, x, A, B, u, vet temp)
250
   [~, instante] = min(abs(vet temp-t));
251
   u t = u(:, instante);
252
   x ponto = A*x + B*u t;
253
   end
254
255
   function Vb = body(y, V)
256
   % Essa funcao transforma um vetor da base fixa no solo em uma na
257
       base fixa
```

```
% no aviao (body), pode ser linha ou coluna.
258
   \% y eh o vetor de estados no instante, pode ser linha ou coluna,
259
       apenas
   % importam os angulos de Euler
260
   % V eh o vetor a ser transformado
261
262
   [1, ~] = size(V);
263
   vet col=false;
264
   if l==3
265
        vet\_col = true;
266
        V = V';
267
   end
268
   M = [\cos(y(6)) * \cos(0), \cos(y(6)) * \sin(0), -\sin(y(6));
269
        \sin(0) \ *\sin(y(6)) \ *\cos(0) \ - \ \cos(0) \ *\sin(0) \ , \ \sin(0) \ *\sin(y(6)) \ *
270
            \sin(0) + \cos(0) + \cos(0), \sin(0) + \cos(y(6));
        \cos(0) * \sin(y(6)) * \cos(0) + \sin(0) * \sin(0), \cos(0) * \sin(y(6)) *
271
            \sin(0) - \sin(0) + \cos(0), \cos(0) + \cos(y(6))];
   Vb = (M*V') ';
272
   if vet col
273
        Vb = Vb';
274
   end
275
   end
276
```

9.2 Simulação não linear

```
function Main modelagem nl
1
  % Versao: Matlab 2020a
2
  % Disciplina: PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinamicos
3
  % Autores:
4
  % Ives C. Vieira - 10355551
\mathbf{5}
  % Mauricio C. Leiman - 10772571
6
  % Vitor Facchini - 10772605
7
  % Yago N. Yang - 10772626
8
9
  \% Essa rotina realizara a simulacao nao linear da aeronave e
10
     calculara
  % uma solucao linear, entretanto os diferentes casos foram simulados
11
      na rotina "compara.m"
  \% O equacionamento esta descritos no relatorio entregue.
12
  close all
13
14
  %% Valores
15
  % Constantes
16
  rho = 1.1062;
17
```

```
g = 9.81;
18
19
  % Geometricos
20
  m = 20;
^{21}
  W = m * g;
22
  Iyy = 1.36;
23
  z motor = 0.4438;
24
  z_cg = 0.4384;
25
  S = 3.2;
26
  Sh = 0.3387;
27
  mac = 0.234;
28
  x1 = -0.0059;
29
  x2 = -0.1242;
30
  xh = -0.2561;
31
  xCG = 0.1509;
32
33
  % Aerodinamicos
34
  dT = -1.7464;
35
  eta = 1;
36
  CL0 = 0.49;
37
  CD0 = 0.06;
38
  CM0 = 0.06;
39
  CL alpha = 3.94;
40
  CD_alpha = 0.2180;
41
  CM alpha = -0.3846;
42
  CL def = -0.3538;
43
  CD def = -0.008;
44
  CM def = -0.3470;
45
  CL alpha 1 = 1.9108;
46
  CL_alpha_2 = 1.7226;
47
  CL alpha h = 0.3110;
48
49
  % Condicao de trimagem
50
  % Velocidade Inicial
51
  V = 15.75;
52
53
  % Chute Inicial
54
  % alfa def T
55
  x0 = [0;0;60];
56
   rvs = 0.5 * rho * V^2 * S;
57
58
  % Equacoes do Movimento
59
  fun2 = @(x) [ (CL0+CL_alpha*x(1)+CL_def*x(2)) + x(3)*sin(x(1))/rvs
60
     -W/rvs;
       x(3) * \cos(x(1)) - (CD0+CD alpha * x(1)+CD def * x(2));
61
```

```
(CM0+CM_alpha*x(1)+CM_def*x(2)) - (z_motor-z_cg)*x(3)/(rvs*mac)
62
           ];
63
   % Variaveis Trimadas
64
   options = optimoptions('fsolve', 'Display', 'off');
65
   y = fsolve(fun2, x0, options);
66
   alpha trim = y(1);
67
   def trim = y(2);
68
   T trim = y(3);
69
70
  % Estados no sistema de eixos fixo no aviao
71
   Vu = V * \cos(alpha trim);
72
   Vv = 0;
73
   Vw = V*sin(alpha trim);
74
   \% vet estados =
75
   %
              Vu Vw q xf zf theta
76
   y trim = [Vu Vw 0 0 0 alpha_trim];
77
78
   % Parametros da Simulacao
79
   step = 0.001;
80
   tempo final = 10;
81
   t = 0:step:tempo final;
82
   vet temp = t;
83
   n = length(t);
84
   u = zeros(1,n);
85
   u(1,:) = def trim + deg2rad(0); \% = def do prof durante a simulação
86
      , mudar!
87
   y_0 = y_trim;
88
   def = rad2deg(u);
89
90
   %% Solucao do sistema
91
   % Solucao do Sistema por ODE
92
   fun2 = @(t,y) odefun_nlinear(t, y, u, vet temp, T trim);
93
94
   [t\_tot, y\_tot] = ode45(fun2, t, y\_0);
95
96
   % Plots
97
   u=y_tot(:,1);
98
   w=y_tot(:,2);
99
   q=y_tot(:,3);
100
   x=y_tot(:,4);
101
   z=y_tot(:,5);
102
   alfa = rad2deg(y tot(:,6));
103
  t=t tot;
104
```

```
figure
106
   subplot(2,1,1)
107
   plot(t,u-y_0(1), 'LineWidth', 2)
108
   xlabel('Tempo [s]')
109
   ylabel ('u [m/s]')
110
   grid on
111
   subplot(2,1,2)
112
   plot(t,w-y_0(2), 'LineWidth', 2)
113
   xlabel('Tempo [s]')
114
   ylabel('w [m/s]')
115
   grid on
116
117
   figure
118
   subplot (2, 1, 1)
119
   plot(t, x-y_0(4), 'LineWidth', 2)
120
   xlabel('Tempo [s]')
121
   ylabel('x [m]')
122
   grid on
123
   subplot (2,1,2)
124
   plot(t, z-y_0(5), 'LineWidth', 2)
125
   xlabel('Tempo [s]')
126
   ylabel('z [s]')
127
   grid on
128
129
   figure
130
   subplot(2,1,1)
131
   plot(t,alfa-alpha_trim,'LineWidth',2)
132
   xlabel('Tempo [s]')
133
   ylabel('\alpha [graus]')
134
   grid on
135
   subplot (2, 1, 2)
136
   plot(t,q-y_0(3), 'LineWidth', 2)
137
   xlabel('Tempo [s]')
138
   ylabel('q [graus/s]')
139
   grid on
140
141
   figure
142
   plot(t,def, 'LineWidth',2)
143
   xlabel('Tempo [s]')
144
   ylabel('\delta_{prof} [graus]')
145
   grid on
146
   end
147
148
   function yp = odefun \ nlinear(t, y, u, vet \ temp, T \ trim)
149
```

```
%% Valores
150
   % Constantes
151
   rho = 1.1062;
152
   g = 9.81;
153
154
   % Geometricos
155
   m = 20;
156
  W = m * g;
157
   z motor = 0.4438;
158
   z_cg = 0.4384;
159
   S = 3.2;
160
   Sh = 0.3387;
161
   mac = 0.234;
162
   x1 = -0.0059;
163
   x2 = -0.1242;
164
   xh = -0.2561;
165
   xCG = 0.1509;
166
   Iner = [0.36 \ 0 \ 0.0071]
167
        0 \ 1.36 \ 0
168
        0.0071 \ 0 \ 0.46];
169
   Ixxb = Iner(1,1);
170
   Iyyb = Iner(2,2);
171
   Izzb = Iner(3,3);
172
   Ixzb = Iner(1,3);
173
174
   % Aerodinamicos
175
   dT = -1.7464;
176
   eta = 1;
177
   CL0 = 0.49;
178
   CD0 = 0.06;
179
   CM0 = 0.06;
180
   CL alpha = 3.94;
181
   CD alpha = 0.2180;
182
   CM alpha = -0.3846;
183
   CL_def = -0.3538;
184
   CD_def = -0.008;
185
   CM def = -0.3470;
186
   CL alpha 1 = 1.9108;
187
   CL alpha_2 = 1.7226;
188
   CL alpha h = 0.3110;
189
   % CD q = -0.967254726639372;
190
   \% CL_q = 6.92457150620892;
191
   % CM q = -1.38513754053762;
192
   CD q = 0.0049;
193
  CL_q = .0380;
194
```

```
CM_q = -0.0187;
195
196
   % Acha def no instante
197
   [~, instante] = min(abs(vet temp-t));
198
    def = u(:, instante);
199
200
   %% Estados
201
   \% vet estados =
202
   % Vu Vw q xf zf theta
203
        = y(1);
   u
204
   V
        = 0;
205
        = y(2);
   W
206
        = 0;
   р
207
        = y(3);
   q
208
        = 0;
   r
209
   phi = 0;
210
   the = y(6);
211
    psi = 0;
212
213
   \mathbf{V} = [\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{w}];
214
    if u = 0
215
         alpha = 0;
216
    else
217
         alpha = atan(w/u);
218
   end
219
   T = T \operatorname{trim};
220
221
   % Forcas e momentos
222
   V0=(u*u + v*v + w*w)^{0.5};
223
224
   CL = CL0 + CL alpha*the + CL def*def + CL q*q;
225
   CD = CD0 + CD alpha*the + CD def*def + CD q*q;
226
   CM = CM0 + CM alpha*the + CM_def*def + CM_q*q;
227
    rsv = 0.5 * rho * S * V0^2;
228
229
   F = [rsv*(CL*sin(alpha) - CD*cos(alpha)) * T*cos(alpha) - W*sin(the)]
230
         0,...
         rsv*(-CL*cos(alpha) - CD*sin(alpha)) + W*cos(phi)*cos(the)];
231
   M = \begin{bmatrix} 0 & rsv * mac * CM + T * (z_cg - z_motor) & 0 \end{bmatrix};
232
233
   %% Derivadas do vetor de estados
234
   % Aceleracoes lineares
235
   up = F(1)/m + r*v - q*w;
236
   vp = 0;
237
   wp = F(3)/m + q*u - p*v;
238
```

```
239
    % Aceleracoes angulares
240
    aang = (Iner^-1)*[
241
           M(1) + (Iyyb - Izzb) *q*r + Ixzb*p*q;
242
           M(2) + (Izzb - Ixxb) * p * r + Ixzb * (r^2-p^2);
243
           M(3) + (Ixxb - Iyyb)*p*q - Ixzb*q*r];
244
    pp = 0;
245
    qp = aang(2);
246
    rp = 0;
247
248
    % Velocidades em relacao ao solo
249
    vf = |
250
          \cos(\text{the}) * \cos(\text{psi}), \sin(\text{phi}) * \sin(\text{the}) * \cos(\text{psi}) - \cos(\text{phi}) * \sin(\text{psi})
251
              ), \cos(\text{phi})*\sin(\text{the})*\cos(\text{psi}) + \sin(\text{phi})*\sin(\text{psi});
          \cos(\text{the}) * \sin(\text{psi}), \sin(\text{phi}) * \sin(\text{the}) * \sin(\text{psi}) + \cos(\text{phi}) * \cos(\text{psi})
252
              ), \cos(\text{phi}) * \sin(\text{the}) * \sin(\text{psi}) - \sin(\text{phi}) * \cos(\text{psi});
         -\sin(\text{the}), \sin(\text{phi}) * \cos(\text{the}), \cos(\text{phi}) * \cos(\text{the}) ] * V;
253
    xp = vf(1);
254
    yp = 0;
255
    zp = vf(3);
256
257
    % Variacao dos angulos de Euler
258
    dang = [1, \sin(\text{phi}) * \sin(\text{the}) / \cos(\text{the}), \cos(\text{phi}) * \sin(\text{the}) / \cos(\text{the});
259
          0, \cos(\text{phi}), -\sin(\text{phi});
260
          0, \sin(\text{phi})/\cos(\text{the}), \cos(\text{phi})/\cos(\text{the}) | * [p;q;r];
261
    phip = 0;
262
    thep = dang(2);
263
    psip = 0;
264
265
    % Resultado
266
    yp = [up; wp; qp; xp; zp; thep];
267
268
    end
269
270
    function Vb = body(y, V)
271
    \% Essa funcao transforma um vetor da base fixa no solo em uma na
272
        base fixa
    % no aviao (body), pode ser linha ou coluna.
273
    \% y eh o vetor de estados no instante, pode ser linha ou coluna,
274
        apenas
    % importam os angulos de Euler
275
    % V eh o vetor a ser transformado
276
277
    [1, ~] = size(V);
278
    vet col=false;
279
```

```
if l==3
280
         vet\_col = true;
281
        V = V';
282
   end
283
   M = [\cos(y(6)) + \cos(0), \cos(y(6)) + \sin(0), -\sin(y(6));
284
         \sin(0) + \sin(y(6)) + \cos(0) - \cos(0) + \sin(0), \sin(0) + \sin(y(6)) + \sin(y(6))
285
            \sin(0) + \cos(0) + \cos(0), \sin(0) + \cos(y(6));
         \cos(0) \ *\sin(y(6)) \ *\cos(0) \ + \ \sin(0) \ *\sin(0), \ \cos(0) \ *\sin(y(6)) \ *
286
            \sin(0) - \sin(0) + \cos(0), \cos(0) + \cos(y(6));
   Vb = (M*V') ';
287
    if vet col
288
        Vb = Vb';
289
   end
290
   end
291
```

Comparação entre simulações não lineares e lineares 9.3

```
function compara
  % Versao: Matlab 2020a
2
  \% Disciplina: PME3380 — Modelagem de Sistemas Dinamicos
3
4
  % Autores:
  % Ives C. Vieira - 10355551
5
  % Mauricio C. Leiman - 10772571
6
  % Vitor Facchini - 10772605
7
  % Yago N. Yang - 10772626
8
9
  % Essa rotina permite simular a modelagem linear e a nao linear,
10
     comentando
  % e descomentando as primeiras linhas, fazendo assim, a 'habilitacao
11
     'e
  % 'desativação' de cada uma das condições: degrau, rampa e impulso.
12
13
  % A modelagem esta descrita no relatorio entregue e esta rotina usa
14
  % exatamente o mesmo equacionamento das duas anteriores, ela apenas
15
     nao
  % plota graficos intermediarios.
16
  close all
17
18
  %% Valores
19
20
  tempo final = 16;
21
  step = 0.005;
22
  t = 0: step: tempo final;
23
  vet\_temp = t;
24
```

```
n = length(t);
25
  u = zeros(1, n);
26
  % Degrau
27
  \% funcao deflexao = 8;
28
29
  % Rampa
30
  \% funcao_deflexao = zeros(1,n);
31
  \% trampa=2;
32
  % funcao deflexao = \min(\operatorname{ones}(1,n) * 8, 8 * t);
33
34
  % Impulso
35
  funcao deflexao = ones(1,n);
36
   funcao deflexao(1,100) = -8;
37
38
  u(1,:) = deg2rad(funcao deflexao); \% = deflexao do prof durante a
39
      simulacao, mudar!
40
  % Constantes
41
  rho = 1.1062;
42
  g = 9.81;
43
  % Geometricos
44
  m = 20;
45
  W = m * g;
46
  Iyy = 1.36;
47
  z motor = 0.4438;
48
  z cg = 0.4384;
49
  S = 3.2;
50
  Sh = 0.3387;
51
  mac = 0.234;
52
  x1 = -0.0059;
53
  x2 = -0.1242;
54
  xh = -0.2561;
55
  xCG = 0.1509;
56
57
  % Aerodinamicos
58
  dT = -1.7464;
59
  eta = 1;
60
  CL0 = 0.49;
61
  CD0 = 0.06;
62
  CM0 = 0.06;
63
  CL alpha = 3.94;
64
  CD_alpha = 0.2180;
65
  CM alpha = -0.3846;
66
  CL def = -0.3538;
67
  CD def = -0.008;
68
```

```
CM_def = -0.3470;
69
   CL_alpha_1 = 1.9108;
70
   CL alpha 2 = 1.7226;
71
   CL alpha h = 0.3110;
72
73
   % Condicao de trimagem
74
   % Velocidade Inicial
75
   V = 15.75;
76
77
   % Chute Inicial
78
   % alfa def T
79
   x0 = [0;0;60];
80
   rvs = 0.5 * rho * V^2 * S;
81
82
   % Equacoes do Movimento
83
   fun = @(x) [ (CL0+CL alpha*x(1)+CL def*x(2)) + x(3)*sin(x(1))/rvs
84
       W/rvs;
       x(3) * \cos(x(1)) - (CD0+CD alpha * x(1)+CD def * x(2));
85
        (CM0+CM alpha*x(1)+CM def*x(2)) - (z motor-z cg)*x(3)/(rvs*mac)
86
           ];
87
   % Variaveis Trimadas
88
   options = optimoptions('fsolve', 'Display', 'off');
89
   y = fsolve(fun, x0, options);
90
   alpha trim = y(1); def trim = y(2); T trim = y(3);
91
92
   % Estados no sistema de eixos fixo no aviao
93
   Vu = V * \cos(alpha trim);
94
   Vv = 0;
95
   Vw = V*sin(alpha trim);
96
   \% vet estados =
97
   %
              Vu Vw q xf zf theta
98
                              alpha trim]';
   y \text{ trim} = |Vu Vw 0 0 0|
99
100
   % Derivadas de estabilidade
101
   % Coeficientes aerodinamicos
102
   CL = CL0 + CL alpha*alpha trim + CL def*def trim;
103
   CD = CD0 + CD alpha*alpha trim + CD def*def trim;
104
   CM = CM0 + CM alpha*alpha trim + CM def*def trim;
105
106
   % Forca peso
107
   Wf = [0 \ 0 \ W];
108
   Wb = body(y_trim, Wf);
109
   Xg = Wb(1);
110
   Zg = Wb(3);
111
```

```
% Derivadas
113
   Fxu = -rho * S * V * CD + dT;
114
   Fzu = -rho *S*V*CL;
115
   Myu = rho*S*mac*V*CM + dT*(-z_motor+z cg);
116
   Fxw = 0.5 * rho * S * V * (CL - CD alpha);
117
   Fzw = 0.5 * rho * S * V * (-CD - CL alpha);
118
   Myw = 0.5 * rho * S * V * mac * CM alpha;
119
   Fxq = 0;
120
   Fzq = 0.5*rho*V*(S*x1*CL_alpha_1 + S*x2*CL_alpha_2 + eta*Sh*xh*
121
       CL alpha h);
   Myq = -0.5*rho*V*(S*x1^2*CL alpha 1 + S*x2^2*CL alpha 2 + eta*Sh*xh
122
       ^2*CL alpha h);;
   Fxd = -0.5*rho*S*V^2*CD def;
123
   Fzd = -0.5*rho*S*V^2*CL def;
124
   Myd = 0.5 * rho * S * V^2 * mac * CM def;
125
126
127
   %% Parametros
128
   % Matrizes do Sistema
129
   Inv = inv (W/g \ 0 \ 0 \ 0 \ 0
130
        0 \text{ W/g} 0 0 0 0
131
        0 0 Iyy 0 0 0
132
        0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0
133
        0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0
134
        0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1;
135
136
   A = [Fxu Fxw Fzq 0 0 -W*\cos(alpha_trim)]
137
   Fzu Fzw Fzq+W*V/g 0 0 -W*sin(alpha trim)
138
   Myu Myw Myq 0 0 0
139
   \cos(\text{alpha trim}) \sin(\text{alpha trim}) = 0 = 0 - V \cdot \sin(\text{alpha trim})
140
   -\sin(alpha trim) \cos(alpha trim) 0 0 0 -V \cos(alpha trim)
141
   0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ |;
142
143
   B = [Fxd]
144
        Fzd
145
        Myd
146
        0
147
        0
148
        0];
149
150
   A = Inv *A;
151
   B = Inv *B;
152
153
   \% C = z eros(2, 4);
154
```

```
% C(1,:) = rad2deg([0 \ 1/V0 \ 0 \ 0]); C(2,:) = A(2,:)/g;
155
   C = eye(6);
156
   D = zeros(6, 1);
157
158
   % Parametros da Simulacao
159
   y \ 0 = zeros(6,1);
160
   def = rad2deg(u);
161
162
   %% Solucao do sistema
163
   % Solucao do Sistema por ODE
164
   fun = @(t,x) odefun linear(t,x,A,B,u,vet temp);
165
166
   [t\_tot, y\_tot] = ode45(fun, t, y\_0);
167
168
   % Plots
169
   ulin=y_tot(:,1);
170
   wlin=y_tot(:,2);
171
   qlin=y tot(:,3);
172
   xlin=y_tot(:,4);
173
   zlin=y_tot(:,5);
174
   thelin=rad2deg(y_tot(:,6));
175
   tlin=t_tot;
176
177
178
   %% Solucao nao linear
179
   %
180
   %
181
   %
182
  %
183
184
   %% Valores
185
   % Constantes
186
   rho = 1.1062;
187
   g = 9.81;
188
189
   % Geometricos
190
```

```
m = 20;
191
   W = m * g;
192
   Iyy = 1.36;
193
   z motor = 0.4438;
194
   z cg = 0.4384;
195
   S = 3.2;
196
   Sh = 0.3387;
197
   mac = 0.234;
198
   x1 = -0.0059;
199
   x2 = -0.1242;
200
   xh = -0.2561;
201
   xCG = 0.1509;
202
203
   % Aerodinamicos
204
   dT = -1.7464;
205
   eta = 1;
206
   CL0 = 0.49;
207
   CD0 = 0.06;
208
   CM0 = 0.06;
209
   CL alpha = 3.94;
210
   CD alpha = 0.2180;
211
   CM alpha = -0.3846;
212
   CL def = -0.3538;
213
   CD def = -0.008;
214
   CM def = -0.3470;
215
   CL alpha 1 = 1.9108;
216
   CL_alpha_2 = 1.7226;
217
   CL alpha h = 0.3110;
218
219
   % Condicao de trimagem
220
   % Velocidade Inicial
221
   V = 15.75;
222
223
   % Chute Inicial
224
   % alfa def T
225
   x0 = [0;0;60];
226
   rvs = 0.5 * rho * V^2 * S;
227
228
   % Equacoes do Movimento
229
   fun2 = @(x) [ (CL0+CL alpha*x(1)+CL def*x(2)) + x(3)*sin(x(1))/rvs
230
      -W/rvs;
        x(3) * \cos(x(1)) - (CD0+CD_alpha * x(1)+CD_def * x(2));
231
        (CM0+CM alpha*x(1)+CM def*x(2)) - (z motor-z cg)*x(3)/(rvs*mac)
232
            ];
233
```

```
% Variaveis Trimadas
234
   options = optimoptions('fsolve', 'Display', 'off');
235
   y = fsolve(fun2, x0, options);
236
   alpha trim = y(1);
237
   def trim = y(2);
238
   T trim = y(3);
239
240
   % Estados no sistema de eixos fixo no aviao
241
   Vu = V * \cos(alpha trim);
242
   Vv = 0;
243
   Vw = V*sin(alpha trim);
244
   \% vet estados =
245
   %
               Vu Vw q xf zf theta
246
   y trim = \begin{bmatrix} Vu & Vw & 0 & 0 \end{bmatrix}
                                alpha trim]';
247
248
   % Parametros da Simulacao
249
   u(1,:) = def_trim + deg2rad(funcao_deflexao); \% = def do prof
250
       durante a simulacao, mudar!
251
   y_0 = y_trim;
252
   def = rad2deg(u);
253
254
   %% Solucao do sistema
255
   % Solucao do Sistema por ODE
256
   fun2 = @(t,y) odefun nlinear(t, y, u, vet temp, T trim);
257
258
   [t\_tot, y\_tot] = ode45(fun2, t, y\_0);
259
260
   % Plots
261
   unl=y_tot(:,1);
262
   wnl=y_tot(:,2);
263
   qnl=y_tot(:,3);
264
   xnl=y_tot(:,4);
265
   znl=y_tot(:,5);
266
   thenl=rad2deg(y_tot(:,6));
267
   tnl=t_tot;
268
269
   figure
270
   subplot(2,1,1)
271
   plot (tlin, ulin, tnl, unl-y 0(1), 'LineWidth', 2)
272
   xlabel('Tempo [s]')
273
   ylabel('u [m/s]')
274
   legend('Linear', 'Nao linear')
275
   grid on
276
   subplot(2,1,2)
277
```

```
plot (tlin, wlin, tnl, wnl-y_0(2), 'LineWidth', 2)
278
   xlabel('Tempo [s]')
279
   ylabel('w [m/s]')
280
   grid on
281
   legend('Linear', 'Nao linear')
282
283
284
   figure
285
   subplot(2,1,1)
286
   plot (tlin, thelin, tnl, thenl-thenl(1), 'LineWidth', 2)
287
   xlabel('Tempo [s]')
288
   ylabel('\theta [graus]')
289
   legend('Linear', 'Nao linear')
290
   grid on
291
   subplot (2, 1, 2)
292
   plot (tlin, qlin, tnl, qnl-y_0(3), 'LineWidth', 2)
293
   xlabel('Tempo [s]')
294
   ylabel('q [graus/s]')
295
   legend('Linear', 'Nao linear')
296
   grid on
297
298
   end
299
300
   function yp = odefun_nlinear(t,y,u,vet_temp,T_trim)
301
   %% Valores
302
   % Constantes
303
   rho = 1.1062;
304
   g = 9.81;
305
306
   % Geometricos
307
   m = 20;
308
   W = m * g;
309
   z motor = 0.4438;
310
   z cg = 0.4384;
311
   S = 3.2;
312
   Sh = 0.3387;
313
   mac = 0.234;
314
   x1 = -0.0059;
315
   x2 = -0.1242;
316
   xh = -0.2561;
317
   xCG = 0.1509;
318
   Iner = [0.36 \ 0 \ 0.0071]
319
        0 \ 1.36 \ 0
320
        0.0071 \ 0 \ 0.46];
321
   Ixxb = Iner(1,1);
322
```

```
Iyyb = Iner(2,2);
323
   Izzb = Iner(3,3);
324
   Ixzb = Iner(1,3);
325
326
   % Aerodinamicos
327
   dT = -1.7464;
328
   eta = 1;
329
   CL0 = 0.49;
330
   CD0 = 0.06;
331
   CM0 = 0.06;
332
   CL alpha = 3.94;
333
   CD alpha = 0.2180;
334
   CM alpha = -0.3846;
335
   CL_def = -0.3538;
336
   CD def = -0.008;
337
   CM def = -0.3470;
338
   CL alpha_1 = 1.9108;
339
   CL alpha 2 = 1.7226;
340
   CL alpha h = 0.3110;
341
   CD q = 0.0049;
342
   CL q = .0380;
343
   CM q = -0.0187;
344
345
   % Acha def no instante
346
   [~, instante] = min(abs(vet temp-t));
347
   def = u(:, instante);
348
349
   % Estados
350
   \% vet estados =
351
   \% Vu Vw q xf zf theta
352
        = y(1);
   u
353
        = 0;
   V
354
        = y(2);
   W
355
        = 0;
   р
356
        = y(3);
   q
357
        = 0;
   r
358
   phi = 0;
359
   the = y(6);
360
    psi = 0;
361
362
   \mathbf{V} = [\mathbf{u};\mathbf{v};\mathbf{w}];
363
    if u = 0
364
        alpha = 0;
365
    else
366
         alpha = atan(w/u);
367
```

```
end
368
    T = T_trim;
369
370
    %% Forcas e momentos
371
    V0=(u*u + v*v + w*w)^{0.5};
372
373
    CL = CL0 + CL_alpha*the + CL_def*def + CL_q*q;
374
    CD = CD0 + CD_alpha*the + CD_def*def + CD_q*q;
375
    CM = CM0 + CM alpha*the + CM def*def + CM q*q;
376
    rsv = 0.5 * rho * S * V0^2;
377
378
    F = [rsv*(CL*sin(alpha) - CD*cos(alpha)) * T*cos(alpha) - W*sin(the)]
379
          0,...
          \operatorname{rsv}(-\operatorname{CL}\cos(\operatorname{alpha}) - \operatorname{CD}\sin(\operatorname{alpha})) + \operatorname{W}\cos(\operatorname{phi})\cos(\operatorname{the})];
380
   M = \begin{bmatrix} 0 & rsv * mac * CM + T * (z & cg - z & motor) & 0 \end{bmatrix};
381
382
    %% Derivadas do vetor de estados
383
    % Aceleracoes lineares
384
    up = F(1)/m + r*v - q*w;
385
    vp = 0;
386
    wp = F(3)/m + q*u - p*v;
387
388
    % Aceleracoes angulares
389
    aang = (Iner^-1)*[
390
           M(1) + (Iyyb - Izzb) *q*r + Ixzb*p*q;
391
           M(2) + (Izzb - Ixxb) * p * r + Ixzb * (r^2-p^2);
392
           M(3) + (Ixxb - Iyyb)*p*q - Ixzb*q*r];
393
    pp = 0;
394
    qp = aang(2);
395
    rp = 0;
396
397
    % Velocidades em relacao ao solo
398
    vf = |
399
          \cos(\text{the}) * \cos(\text{psi}), \sin(\text{phi}) * \sin(\text{the}) * \cos(\text{psi}) - \cos(\text{phi}) * \sin(\text{psi})
400
               ), \cos(\text{phi})*\sin(\text{the})*\cos(\text{psi}) + \sin(\text{phi})*\sin(\text{psi});
          \cos(\text{the}) * \sin(\text{psi}), \sin(\text{phi}) * \sin(\text{the}) * \sin(\text{psi}) + \cos(\text{phi}) * \cos(\text{psi})
401
               ), \cos(\text{phi})*\sin(\text{the})*\sin(\text{psi}) - \sin(\text{phi})*\cos(\text{psi});
          -\sin(\text{the}), \sin(\text{phi}) * \cos(\text{the}), \cos(\text{phi}) * \cos(\text{the}) ] * V;
402
    xp = vf(1);
403
    yp = 0;
404
    zp = vf(3);
405
406
    % Variacao dos angulos de Euler
407
    dang = [1, \sin(\text{phi}) * \sin(\text{the}) / \cos(\text{the}), \cos(\text{phi}) * \sin(\text{the}) / \cos(\text{the});
408
          0, \cos(\text{phi}), -\sin(\text{phi});
409
```

```
0, \sin(\text{phi})/\cos(\text{the}), \cos(\text{phi})/\cos(\text{the}) | * [p;q;r];
410
   phip = 0;
411
    thep = dang(2);
412
    psip = 0;
413
414
   % Resultado
415
   yp = |up; wp; qp; xp; zp; thep|;
416
417
   end
418
419
   function x ponto = odefun linear(t, x, A, B, u, vet temp)
420
    [~, instante] = min(abs(vet temp-t));
421
   u t = u(:, instante);
422
   x ponto = A*x + B*u t;
423
   end
424
425
   function Vb = body(y, V)
426
   % Essa funcao transforma um vetor da base fixa no solo em uma na
427
       base fixa
   % no aviao (body), pode ser linha ou coluna.
428
   % y eh o vetor de estados no instante, pode ser linha ou coluna,
429
       apenas
   % importam os angulos de Euler
430
   % V eh o vetor a ser transformado
431
432
   [1, ~] = \operatorname{size}(V);
433
   vet col=false;
434
    if l==3
435
         vet col = true;
436
        V = V';
437
   end
438
   M = [\cos(y(6)) + \cos(0), \cos(y(6)) + \sin(0), -\sin(y(6));
439
         \sin(0) \ *\sin(y(6)) \ *\cos(0) \ - \ \cos(0) \ *\sin(0) \ , \ \sin(0) \ *\sin(y(6)) \ *
440
            \sin(0) + \cos(0) + \cos(0), \sin(0) + \cos(y(6));
         \cos(0) + \sin(y(6)) + \cos(0) + \sin(0) + \sin(0), \cos(0) + \sin(y(6)) + \sin(y(6))
441
            \sin(0) - \sin(0) \ast \cos(0), \cos(0) \ast \cos(y(6));
   Vb = (M*V') ';
442
    if vet col
443
        Vb = Vb';
444
   end
445
   end
446
```

Referências Bibliográficas

- [1] W. F. Phillips, *Mechanics of Flight*. John Wiley Sons, 2004.
- [2] M. V. Cook, Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control. Butterworth-Heinemann, 2012.
- [3] J. E. Cooper, Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads.
- [4] J. D. Anderson, Aircraft performance and design, vol. 1. WCB/McGraw-Hill Boston, MA, 1999.
- [5] D. E. Hoak, *The USAF Stability and Control DATCOM*. Air Force Wright Aeronautical Laboratories, 1960 (Revisado em 1978).