Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Modelagem longitudinal em cruzeiro de uma aeronave biplana radiocontrolada

Modelagem de sistemas dinâmicos
PME 3380

Ives C. Vieira - 10355551
Mauricio C. Leiman - 10772571
Vítor Facchini - 10772605
Yago N. Yang - 10772626

Professor: Agenor Fleury e Décio Crisol

São Paulo
2020

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Lista de símbolos

Símbolo	Significado
α	Ângulo de ataque
CG	Centro de gravidade
C_D	Coeficiente de arrasto
C_L	Coeficiente de sustentação
C_m	Coeficiente de momento
C_{L_α}	Derivada do coeficiente de sustentação no α
C_{D_α}	Derivada do coeficiente de arrasto no α
C_{M_α}	Derivada do coeficiente de momento no α
$\bar{c}$	Corda média aerodinâmica
ϕ	Figura 6.1
θ	Figura 6.1
ψ	Figura 6.1
x_f	Figura 6.1
x_b	Figura 6.1
y_f	Figura 6.1
y_b	Figura 6.1
z_f	Figura 6.1
z_b	Figura 6.1
u	Velocidade do avião em relação ao escoamento em x_b
v	Velocidade do avião em relação ao escoamento em y_b
w	Velocidade do avião em relação ao escoamento em z_b
p	Velocidade angular do avião em x_b
q	Velocidade angular do avião em y_b
r	Velocidade angular do avião em z_b
x	Deslocamento do avião em x_f
y	Deslocamento do avião em y_f
z	Deslocamento do avião em z_f
δ_{prof}	Deflexão do profundor
δ_{ail}	Deflexão do aileron
δ_{leme}	Deflexão do leme
T	Tração
m	Massa
g	Aceleração gravitacional
W	Força peso
L	Força de sustentação
D	Força de arrasto
F_g	Força gravitacional
ρ	Massa específica do ar

Símbolo	Significado
V	Velocidade de referência do avião
α_{T0}	Ângulo de ataque do motor quando a aeronave possui $\alpha = 0$
F_T	Força de tração
M_T	Momento da tração
h_{motor}	Altura do motor em relação ao solo
h_{CG}	Altura do CG em relação ao solo
z_T	$h_{motor} - h_{CG}$
x_T	Coordenada x do centro de tração da aeronave
F	Força resultante no avião
M	Momento resultante no avião
F_{x_f}	Força resultante no avião em x_f
F_{z_f}	Força resultante no avião em z_f
α_{trim}	Ângulo de ataque de triagem do avião
M_{y_f}	Momento resultante em y_f
M_{aer}	Momento aerodinâmico
C_M	Coeficiente de momento
V_0	Velocidade de referência do avião
C_{L_0}	Coeficiente de sustentação para $\alpha = 0$
C_{D_0}	Coeficiente de arrasto para $\alpha = 0$
C_{M_0}	Coeficiente de momento para $\alpha = 0$
β	Ângulo de derrapagem
C_θ	$\cos\theta$
C_ϕ	$\cos\phi$
C_ψ	$\cos\psi$
S_θ	$\sin\theta$
S_ϕ	$\sin\phi$
S_ψ	$\sin\psi$
B_0	Variável genérica B na condição de equilíbrio de equilíbrio
B_i	Variável genérica B no instante i
ΔB_i	Variação da variável genérica no instante i
$\dot{B}$	Derivada da variável genérica B no tempo
V_{wy_f}	Velocidade do vento no eixo y_f
F_{xb_0}	Força em x_b na posição de equilíbrio
F_x	Força resultante em x_b
F_y	Força resultante em y_b
F_z	Força resultante em z_b
M_x	Momento resultante em x_b
M_y	Momento resultante em y_b
M_z	Momento resultante em z_b
W_x	Momento resultante em x_b
W_y	Momento resultante em y_b
W_z	Momento resultante em z_b
$\bar{B}_{bK}$	$\dfrac{\partial B_b}{\partial K}$

Símbolo	Significado
S	Área alar
S_h	Área da empenagem horizontal
x_1	Distância do CG ao centro aerodinâmico da asa inferior
x_2	Distância do CG ao centro aerodinâmico da asa superior
C_{L1}	Coeficiente de sustentação da asa inferior
C_{L2}	Coeficiente de sustentação da asa superior
η_h	Fator de eficiencia da cauda
x_h	Distância do CG ao centro aerodinâmico da cauda
C_{L_h}	Coeficiente de sustentação da cauda
I_{yy}	Inércia do avião no eixo y_b
VLM	Vortex lattice Methode
$DATCOM$	Data Compedium
CFD	Computional Fluid Dynamics

2 Introdução

A Keep Flying é a atual representante de Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP) na competição SAE Brasil Aerodesign, na qual é proposto que cada equipe faça o desenvolvimento de um projeto de uma aeronave cargueira radiocontrolada, a Figura 2.1 mostra alguns dos aviões da equipe Keep Flying. A equipe participa nesta competição em duas frentes: na categoria Micro com a Keep Flying Jr (campeã do torneio de acesso à competição principal em 2017 e décima colocada em sua primeira participação em 2018) e na categoria Regular com a Keep Flying que foi fundada em 2003 e apresenta uma série de títulos e conquistas, como a primeira colocação geral em 2006, a segunda colocação geral em 2008 e 2018, o prêmio Embraer de excelência em projeto em 2018, além do recorde de maior carga transportada obtido em 2009.

Figura 2.1: Aeronaves de 2018 e 2019 da Keep Flying e Keep Flying Jr.

Visando melhorar a qualidade das simulações de voo para agregar qualidade ao projeto de novas aeronaves em geral, além de permitir a simulação de voos sem a necessidade de encontros presenciais (devido à pandemia de CoVid-19 em 2020), inicialmente foi pensada a elaboração da modelagem de um simulador de voo capaz de representar uma aeronave da equipe durante toda a trajetória da categoria Regular.

Entretanto, buscando a simplificação do problema a fim de se manter o trabalho no escopo da disciplina, foi feita a opção pela modelagem longitudinal do avião em cruzeiro, que será descrita ao longo do seguinte relatório.

3 Objetivos

O objetivo do projeto se resume à elaboração de uma modelagem longitudinal que represente a aeronave da equipe Keep Flying de 2020 (Figura 3.1) durante o voo em cruzeiro.

Serão apresentados os desenvolvimentos que levam à obtenção das equações diferenciais do movimento, representação no espaço de estados e no domínio da frequência. Além disso, também serão incluídos resultados referentes à simulação destas representações em ambiente computacional adequado, bem como discussões e conclusões sobre estes resultados obtidos.

Figura 3.1: Aeronave de 2020 da equipe Keep Flying

4 Revisão bibliográfica

4.1 W. F. Phillips: Mechanics of Flight [1]

Essa é a principal referência utilizada no desenvolvimento do trabalho, o sistema de eixos utilizado durante a modelagem matemática e a dedução das equações do movimento são baseadas nesta referência. Essa referência também forneceu auxílios matemáticos, como uma matriz de transição que permite facilmente transformar vetores entre os 2 sistemas de eixos utilizados. Optou-se, também, por se basear na modelagem proposta por Phillips pela simplicidade e clareza das explicações.

4.2 M. Cook: Flight Dynamics Principles [2]

Utilizou-se o texto junto com a modelagem proposta por Phillips por apresentar considerações aprofundadas de estabilidade, não tão discutidas na referência anterior. Além de possuir um maior detalhamento na linearização de equações.

4.3 W. Cooper: Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads [3]

O texto foi utilizado na etapa final do projeto, para o cálculo dos fatores de carga da aeronave durante o voo simulado.

4.4 John Anderson Jr.: Fundamentals of Aerodynamics [4]

Essa referência mostra considerações aerodinâmicas relevantes na definição e emprego dos coeficientes aerodinâmicos.

4.5 D. E. Hoak: The USAF Stability and Control DATCOM [5]

O DATCOM de estabilidade e controle da Força Aérea Americana fornece diferentes métodos e conhecimentos da aeronáutica relativos à dinâmica de aeronaves, obtenção de coeficientes aerodinâmicos e derivadas de estabilidade. Há diversos trabalhos referenciados nele, que são, principalmente, estudos desenvolvidos por engenheiros aeronáuticos da NACA (*National Advisory Committee for Aeronautics*). Nesse DATCOM apresentam-se vários métodos para a determinação de derivadas úteis à modelagem da dinâmica de uma aeronave para casos distintos (subsônico, transônico, asa com ou sem *taper*, enflechamento, altos ângulos de ataque, etc...) e são também apresentadas as suas correlações com dados experimentais. Utilizou-se essa referência pois, em algumas situações, as simplificações realizadas nas modelagens de Cook e Philips não são condizentes com aeronaves radiocontroladas em configurações não convencionais.

5 Modelo Físico

Nas análises apresentadas neste relatório será considerado que todos os componentes da aeronave se comportam como corpos rígidos. Logo, serão desconsideradas quaisquer deformações na estrutura, assim como variações nas propriedades desta.

Assim, destacam-se três superfícies de comando que regem os movimentos da aeronave nos eixos lateral (arfagem), longitudinal (rolagem) e vertical (guinada), sendo estas:

- Profundor: localizado no bordo de fuga da empenagem horizontal, controla a arfagem;
- *Ailerons*: presentes nas extremidades do bordo de fuga da asa inferior, são responsáveis pela rolagem;
- Lemes: contidos nos bordos de fuga das empenagens verticais (que por sua vez estão acopladas às extremidades da empenagem horizontal), controlam a guinada.

A figura 5.1 a seguir ilustra com mais clareza as superfícies e suas posições na aeronave.

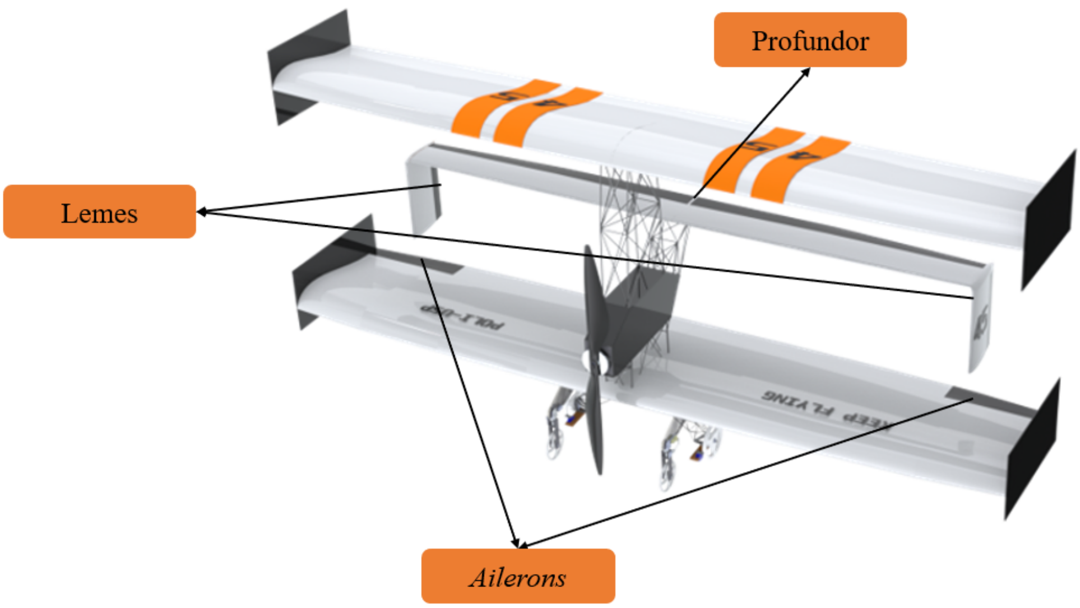

Figura 5.1: Localização das superfícies de comando da aeronave estudada

6 Modelo Matemático

Na descrição do modelo matemático da aeronave em cruzeiro, definem-se os eixos de coordenadas adotados, as varíaveis relevantes e suas equações que descrevem o comportamento dinâmico do corpo. Também definem-se as forças e momentos atuantes no problema. Posteriormente, faz-se uso de hipóteses simplificadoras para linearização das equações e descrição em espaço de estados apropriado para simulação.

6.1 Definição dos eixos do problema

Para realizar a modelagem e o estudo do movimento da aeronave, é necessário estabelecer sistemas de coordenadas nos quais as variáveis do movimento serão orientadas e quantificadas. Para problemas de aeronáutica, a literatura [1] sugere a utilização de duas bases vetoriais: uma base fixa na aeronave, com eixos seguindo a simetria do avião, e uma base fixa no espaço, ambas com origem no centro de gravidade do corpo, sendo que no caso da base fixa sua origem é determinada pela posição do CG no instante inicial da simuação.

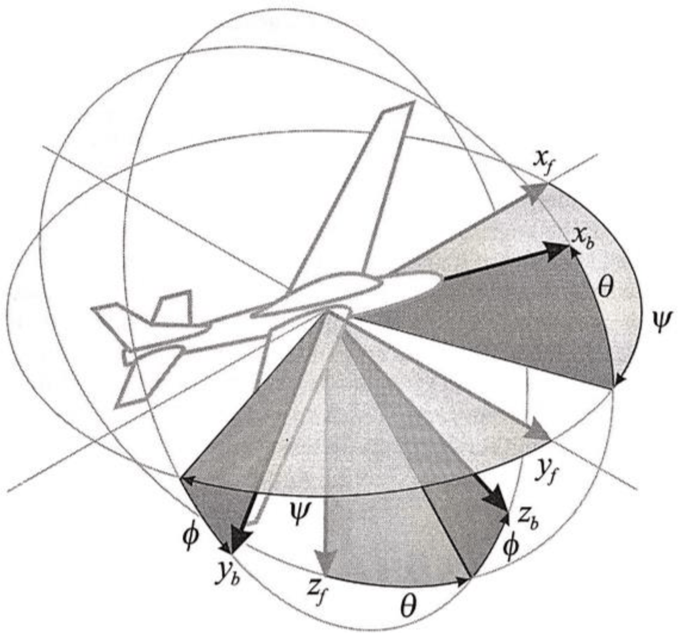

Figura 6.1: Sistemas de eixos adotado

6.2 Variáveis consideradas na modelagem

Para descrever o comportamento da aeronave em cruzeiro, foram utilizadas 12 váriaveis separadas em 4 grupos principais, conforme a Tabela 6.1:

Tabela 6.1: Variáveis consideradas no movimento

Definição	**Símbolo**		
Velocidades de Translação	u	v	w
Velocidades de Rotação	p	q	r
Posição da Aeronave	x	y	z
Inclinação da Aeronave	ϕ	θ	ψ

Além disso, foram consideradas 3 variáveis relativas a deflexão das superfícies de controle 1 váriavel relativa à tração do motor.

Tabela 6.2: Variáveis auxiliares

Definição	**Símbolo**
Deflexão do profundor	δ_{prof}
Deflexão do aileron	δ_{ail}
Deflexão do leme	δ_{leme}
Tração Disponível	T

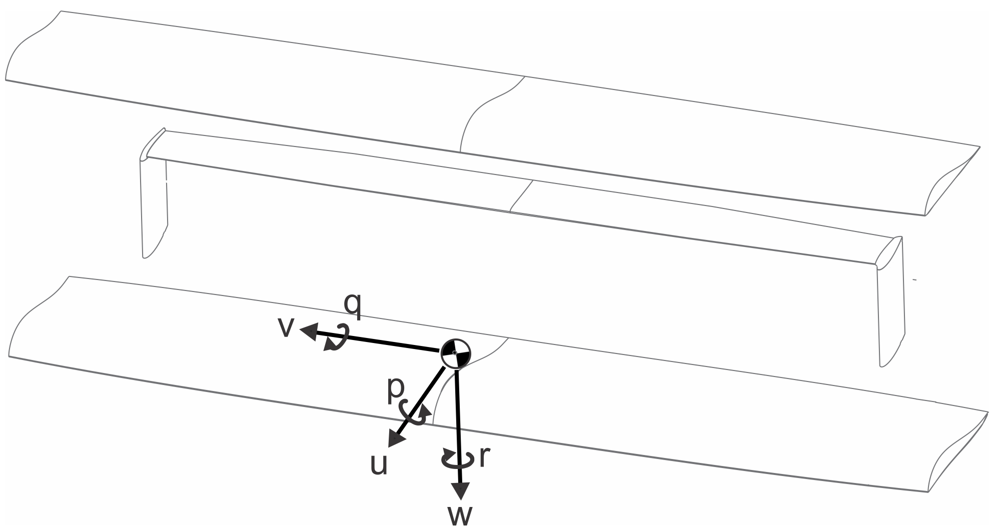

Figura 6.2: Velocidades lineares e angulares

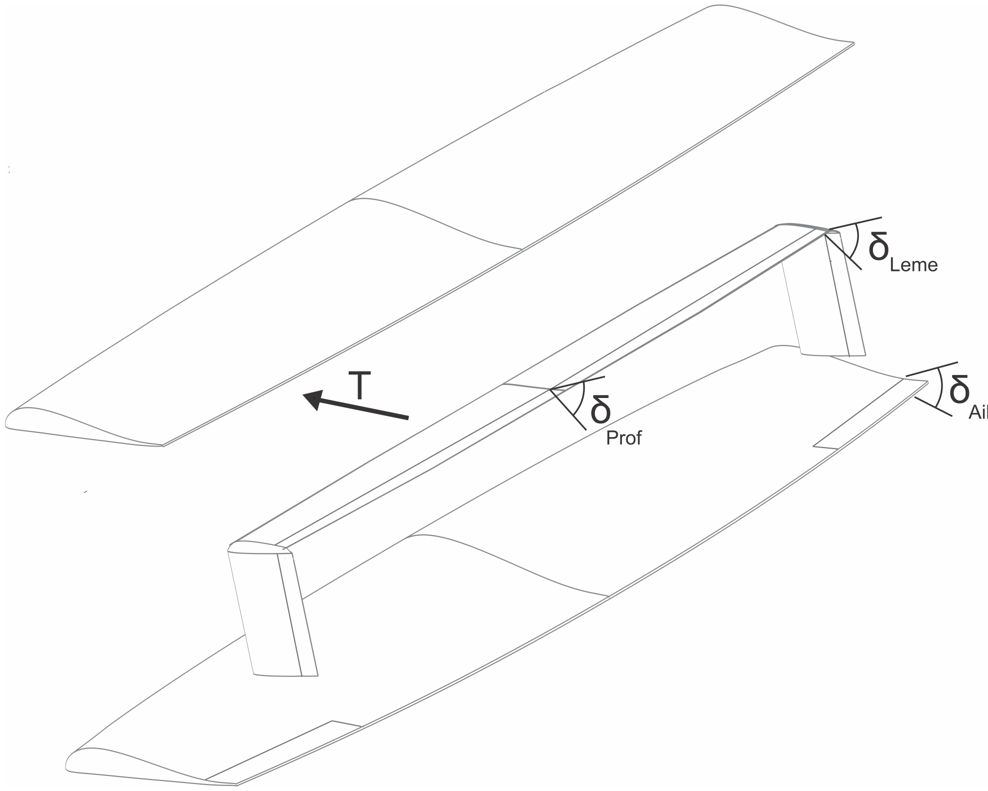

Figura 6.3: Variáveis auxiliares

6.3 Forças na aeronave

Nesta seção serão definidas as forças atuantes no avião, que serão representadas como a soma das forças aerodinâmicas, gravitacionais e de tração nos eixos x_b, y_b e z_b. Ressalta-se que alguns dos componentes aqui definidos serão descartados na seção 6.9.3, devido à adoção de hipóteses simplificadoras descritas na tabela 6.3.

6.3.1 Força peso

Considera-se que a força peso é constante, e efetua-se a decomposição desta nos eixos pertinentes, definindo-a da seguinte maneira.

$$F_g = W \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix}, \text{ com } W = mg \tag{6.1}$$

6.3.2 Forças aerodinâmicas

As forças aerodinâmicas que atuam na aeronave são o arrasto e a sustentação. Define-se que o arrasto será representado da seguinte maneira.

$$D = \frac{1}{2}\rho S C_D V^2 \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \\ 0 \\ -\sin(\alpha) \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Já para a sustentação, determina-se o formato abaixo.

$$L = \frac{1}{2}\rho S C_L V^2 \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ 0 \\ -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

6.3.3 Força de tração

A força de tração é definida como:

$$F_T = T \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{T0}) \\ 0 \\ -\sin(\alpha_{T0}) \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

6.4 Momentos na aeronave

Finalizada a definição das forças que atuam na aeronave, deve-se então efetuar o mesmo procedimento para os momentos, utilizando-se a mesma convenção.

6.4.1 Momento da tração

O momento gerado pela força de tração pode ser determinado através da seguinte equação

$$M_T = T\left[(h_{motor} - h_{CG})\cos(\alpha_{T0}) + x_T \sin(\alpha_{T0})\right] \tag{6.5}$$

6.4.2 Momento decorrente da atuação de superfícies de controle

O momento definido nesta subseção não representa apenas o efeito da atuação dos profundores, já que o C_M empregado engloba também o momento oriundo das forças aerodinâmicas, calculado em torno do CG.

$$M_{aer} = \frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c}C_m \tag{6.6}$$

6.5 Hipóteses simplificadoras

Para simplificar a solução do problema são adotadas diversas hipóteses simplificadoras, as quais são apresentadas e justificadas na Tabela 6.3 abaixo.

Tabela 6.3: Hipóteses simplificadoras adotadas

Hipótese	**Justificativa**
Corpo rígido	Estrutura da aeronave apresenta alta rigidez, possibilitando desprezar efeitos aeroelásticos e variações no comportamento aerodinâmico
Comandos instantâneos	Atraso desprezível entre o momento do *input* e a atuação de superfícies de controle
C_L, C_D e C_M independem do número de $Mach$	Regime de operação subsônico a baixos valores de Reynolds
Movimento longitudinal pode ser analisado independentemente	Coeficientes de acoplamento podem ser desprezados em voo nivelado, segundo a literatura empregada
Comportamento aerodinâmico linear	Aproximação razoável para baixos ângulos de ataque (aeronave longe do *stall*)
Derivadas de estabilidade e das perturbações são independente	Literatura utilizada considera desprezível
I_{xy} e $I_{yz} = 0$	A aeronave é simétrica em relação ao plano oxz
$I_{xz} = 0$	Magnitude desprezível
Downwash desprezível	Efeito de difícil implementação na modelagem proposta
Força de tração paralela ao eixo x_b	Posicionamento do motor
Motor não gera torque em torno do eixo x_b	Magnitude desprezível
Curva de tração do motor pode ser representada por uma equação de 2o grau	Representação considerada aceitável após realização de ensaios de tração com o motor em túnel de vento

6.6 Condições de trimagem

A condição inicial adotada para a modelagem proposta é a de uma aeronave trimada, ou seja, em equilíbrio. Assim, temos que:

$$\sum F = 0 \tag{6.7}$$

$$\sum M = 0 \tag{6.8}$$

Dadas as hipóteses simplificadoras da tabela 6.3, podemos considerar apenas as forças nos eixos x_f e z_f e os momentos em y_f. Chegamos então às seguintes equações no equilíbrio:

$$\sum F_{x_f} = T\cos\alpha_{trim} - D = 0 \tag{6.9}$$

$$\sum F_{z_f} = L - W + T\sin\alpha_{trim} = 0 \tag{6.10}$$

$$\sum M_{y_f} = M_{aer} - M_T = 0 \tag{6.11}$$

Podemos reescrevê-las a fim de se obter expressões para os coeficientes de sustentação, arrasto e momento.

$$T\cos\alpha_{trim} - D = 0 \rightarrow T\cos\alpha_{trim} - \frac{1}{2}\rho S C_D V_0^2 = 0 \rightarrow C_D = \frac{T\cos\alpha_{trim}}{\frac{1}{2}\rho S V_0^2} \tag{6.12}$$

$$L-W+T\sin\alpha_{trim} = 0 \rightarrow T\sin\alpha_{trim} - W + \frac{1}{2}\rho S C_L V_0^2 = 0 \rightarrow C_L = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho S V_0^2} - \frac{T\sin\alpha_{trim}}{\frac{1}{2}\rho S V_0^2} \tag{6.13}$$

$$M_{aer} - M_T = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c} C_M - T(h_{motor} - h_{CG}) = 0 \rightarrow C_M = \frac{T(h_{motor} - h_{CG})}{\frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c}} \tag{6.14}$$

Os coeficientes podem ser expandidos em série de Taylor, a fim de se iniciar o processo de linearização.

$$C_L = C_{L_0} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{prof}}\delta_{prof} + \frac{\partial C_L}{\partial q}q \tag{6.15}$$

$$C_D = C_{D_0} + \frac{\partial C_D}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{prof}}\delta_{prof} \tag{6.16}$$

$$C_M = C_{M_0} + \frac{\partial C_M}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{prof}}\delta_{prof} + \frac{\partial C_M}{\partial q}q \tag{6.17}$$

Efetuando aproximações para ângulos pequenos (visto que α é baixo para a etapa de voo analisada) e subtituições para adequar as equações à condição de trimagem, chegamos finalmente às seguintes expressões linearizadas:

$$C_{L_0} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_{trim} + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{prof}}\delta_{prof_{trim}} + \frac{\partial C_L}{\partial q}q_{trim} - \frac{W}{\frac{1}{2}\rho S V_0^2} + \frac{T\alpha_{trim}}{\frac{1}{2}\rho S V_0^2} = 0 \tag{6.18}$$

$$C_{D_0} + \frac{\partial C_D}{\partial \alpha}\alpha_{trim} + \frac{\partial C_D}{\partial \delta_{prof}}\delta_{prof_{trim}} - \frac{T}{\frac{1}{2}\rho S V_0^2} = 0 \tag{6.19}$$

$$C_{M_0} + \frac{\partial C_M}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial C_M}{\partial \delta_{prof}}\delta_{prof_{trim}} + \frac{\partial C_M}{\partial q}q_{trim} - \frac{T(h_{motor} - h_{CG})}{\frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c}} = 0 \tag{6.20}$$

A definição da condição inicial é definida pelas quatro incógnitas do sistema formado pelas equações acima (T, α_{trim}, $\delta_{prof_{trim}}$ e q_{trim}) e pela entrada V_0. Ressalta-se que os valores das incógnitas são definidos não só pela solução da equação, mas também por limites físicos ($\alpha_{trim} < \alpha_{estol}$, por exemplo).

6.7 Equações do movimento

Assumindo um instante de tempo inicial na qual são conhecidas todas as váriaveis de estado descritas na seção 6.2, pode-se determinar a velocidade e os ângulos aerodinâmicos para as componentes translacionais da velocidade:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \tag{6.21}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{w}{u}\right) \tag{6.22}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) \tag{6.23}$$

Com base nisso, segundo [1], pode-se determinar as forças e momentos aerodinâmicos atuantes na aeronave em cada instante de tempo, e então escrever as derivadas de estado utilizando a segunda lei de Newton atrelada a uma formulação pelos ângulos de Euler, conforme sistema de eixos apresentado na Seção 6.1.

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{bmatrix} = \frac{g}{W}\begin{bmatrix}F_{xb}\\ F_{yb}\\ F_{zb}\end{bmatrix} + g\begin{bmatrix}-S_\theta\\ S_\phi C_\theta\\ C_\phi C_\theta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}rv - uw\\ pw - ru\\ qu - pv\end{bmatrix} \tag{6.24}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \dot{q}\\ \dot{r}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I_{xx_b} & 0 & -I_{xz_b}\\ 0 & I_{yy_b} & 0\\ -I_{zx_b} & 0 & I_{zz_b}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}M_{x_b} + (I_{yy_b} - I_{zz_b})qr + I_{xz_b}pq\\ M_{y_b} + (I_{zz_b} - I_{xx_b})pr + I_{xz_b}(r^2 - p^2)\\ M_{z_b} + (I_{xx_b} - I_{yy_b})pq - I_{xz_b}qr\end{bmatrix} \tag{6.25}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_f\\ \dot{y}_f\\ \dot{z}_f\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi\\ C_\theta S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi + S_\phi C_\psi\\ -S_\theta & S_\phi C_\theta & C_\phi C_\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix} \tag{6.26}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \frac{S_\phi S_\theta}{C_\theta} & \frac{C_\phi S_\theta}{C_\theta}\\ 0 & C_\phi & -S_\phi\\ 0 & \frac{S_\phi}{C_\theta} & \frac{C_\phi}{C_\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix} \tag{6.27}$$

6.8 Linearização do problema

As equações matriciais apresentadas na seção anterior são não lineares, de modo que a obtenção de uma solução análitica é extremamente custosa ou mesmo impossível. Como forma de contornar o problema, escolhe-se pela linearização destas em torno de um ponto de interesse da análise. Para tanto,foi aplicado a teoria das pequenas perturbações, na qual descreve-se cada variável de interesse como o seu respectivo valor no estado de equílibrio acrescido de um termo de perturbação:

$$B_i = B_{i_0} + \Delta B_i \tag{6.28}$$

Considerando como estado equilíbrio o voo de cruzeiro, isto é, aeronave nivelada com velocidade constante no eixo x ("para frente") e rotações nulas. Como em cruzeiro a somatória das forças e momentos aerodinâmicos é igual a zero, tem-se:

$$u_0 = V_0 \tag{6.29}$$

$$x_0 = (V_{wx_f} + V_0 cos\theta_0)t \tag{6.30}$$

$$y_0 = V_{wy_f} t \tag{6.31}$$

$$z_0 = (V_{wz_f} + V_0 sen\theta_0)t \tag{6.32}$$

$$F_{xb_0} = -W_{xb_0} \tag{6.33}$$

$$F_{zb_0} = -W_{zb_0} \tag{6.34}$$

$$v_0 = w_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = \psi_0 = F_{yb_0} = W_{yb_0 0} = M_0 = 0 \tag{6.35}$$

Utilizando os valores recém-determinados no estado de equilíbrio,pode-se escrever as variáveis na abordagem de pequenas perturbações como:

Tabela 6.4: Variáveis de Estado e auxiliares descritas pelo método das pequenas pertubrações

Eixo X	**Eixo Y**	**Eixo Z**
$u = V_0 + \Delta u$	$v = \Delta v$	$w = \Delta w$
$p = \Delta p$	$q = \Delta q$	$r = \Delta r$
$x_f = (V_{wx_f} + V_0 cos\theta_0)t + \Delta x_f$	$y_f = V_{wy_f} t + \Delta y_f$	$z_f = (V_{wz_f} + V_0 sen\theta_0)t + \Delta z_f$
$\phi = \Delta\phi$	$\theta = \theta_0 + \Delta\theta$	$\psi = \Delta\psi$
$F_{xb} = -W_{xb_0} + \Delta F_{xb}$	$F_{yb} = \Delta F_{yb}$	$F_{zb} = -W_{zb_0} + \Delta F_{zb}$
$W_{yb} = W_{xb_0} + \Delta W_{xb}$	$W_{yb} = \Delta W_{yb}$	$W_{zb} = W_{zb_0} + \Delta W_{zb}$
$M_{xb} = \Delta M_{xb}$	$M_{yb} = \Delta M_{yb}$	$M_{zb} = \Delta M_{zb}$
Aileron	**Profundor**	**Leme**
$\delta_{ail} = \delta_{ail0} + \Delta\delta_{ail}$	$\delta_{prof} = \delta_{prof0} + \Delta\delta_{prof}$	$\delta_{leme} = \delta_{leme0} + \Delta\delta_{leme}$

Com base na Seção 6.7 e na Tabela 6.4, pode-se escrever a Segunda Lei de Newton na forma matricial para as derivadas de perturbação translacionais e rotacionais, assumindo que, por serem pequenas, o produto entre perturbações $\Delta v_i \Delta v_j$ pode ser negligenciado. Dessa forma, obtém-se a Equação 6.36:

$$\begin{bmatrix} \frac{W}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{W}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{W}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\dot{u} \\ \Delta\dot{v} \\ \Delta\dot{w} \\ \Delta\dot{p} \\ \Delta\dot{q} \\ \Delta\dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta F_x + \Delta_{W_x} \\ \Delta F_y + \Delta_{W_y} - \Delta r V_0 \frac{W}{g} \\ \Delta F_z + \Delta_{W_z} + \Delta q V_0 \frac{W}{g} \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

As forças e momentos aerodinâmicos são funções das velocidades lineares e angulares, da aceleração translacional e da deflexão das superfícies de comando. Aplicando a mesma hipótese de pequenas perturbações, pode-se escrevê-las matricialmente como:

- Forças Aerodinâmicas

$$\begin{bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial u} & \frac{\partial F_x}{\partial v} & \frac{\partial F_x}{\partial w} \\ \frac{\partial F_y}{\partial u} & \frac{\partial F_y}{\partial v} & \frac{\partial F_y}{\partial w} \\ \frac{\partial F_z}{\partial u} & \frac{\partial F_z}{\partial v} & \frac{\partial F_z}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial p} & \frac{\partial F_x}{\partial q} & \frac{\partial F_x}{\partial r} \\ \frac{\partial F_y}{\partial p} & \frac{\partial F_y}{\partial q} & \frac{\partial F_y}{\partial r} \\ \frac{\partial F_z}{\partial p} & \frac{\partial F_z}{\partial q} & \frac{\partial F_z}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{bmatrix} + \tag{6.37}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial F_x}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial F_x}{\partial \dot{w}} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial F_y}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial F_y}{\partial \dot{w}} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial F_z}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial F_z}{\partial \dot{w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\dot{u} \\ \Delta\dot{v} \\ \Delta\dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \delta_{ail}} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_{prof}} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \delta_{ail}} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_{prof}} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \delta_{ail}} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_{prof}} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_{ail} \\ \Delta\delta_{prof} \\ \Delta\delta_r \end{bmatrix}$$

- Momentos Aerodinâmicos

$$\begin{bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial u} & \frac{\partial M_x}{\partial v} & \frac{\partial M_x}{\partial w} \\ \frac{\partial M_y}{\partial u} & \frac{\partial M_y}{\partial v} & \frac{\partial M_y}{\partial w} \\ \frac{\partial M_z}{\partial u} & \frac{\partial M_z}{\partial v} & \frac{\partial M_z}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial p} & \frac{\partial M_x}{\partial q} & \frac{\partial M_x}{\partial r} \\ \frac{\partial M_y}{\partial p} & \frac{\partial M_y}{\partial q} & \frac{\partial M_y}{\partial r} \\ \frac{\partial M_z}{\partial p} & \frac{\partial M_z}{\partial q} & \frac{\partial M_z}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{bmatrix} + \tag{6.38}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial M_x}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial M_x}{\partial \dot{w}} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial M_y}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial M_y}{\partial \dot{w}} \\ \frac{\partial M_z}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial M_z}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial M_z}{\partial \dot{w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\dot{u} \\ \Delta\dot{v} \\ \Delta\dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial \delta_{ail}} & \frac{\partial M_x}{\partial \delta_{prof}} & \frac{\partial M_x}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \delta_{ail}} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta_{prof}} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial M_z}{\partial \delta_{ail}} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta_{prof}} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_{ail} \\ \Delta\delta_{prof} \\ \Delta\delta_r \end{bmatrix}$$

Ao assumir a hipótese de pequenas pertubações,bem como ao se desprezar o *Downwash*, pode-se desprezar algumas das derivadas parciais presentes na descrição das forças e momentos em função das acelerações translacionais:

$$\frac{\partial F_y}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial F_x}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial F_y}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial F_z}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial F_y}{\partial \dot{w}} = 0 \tag{6.39}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial M_z}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial M_x}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial M_y}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial M_z}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial M_x}{\partial \dot{w}} = \frac{\partial M_z}{\partial \dot{w}} = 0 \tag{6.40}$$

Outras derivadas parciais podem ser desprezadas em virtude da condição de simetria do problema, assumindo o estado de equilíbrio da aeronave anteriormente exposto, uma vez que todas as derivadas são calculadas em relação a esse estado. Dessa forma:

$$\frac{\partial F_x}{\partial v} = \frac{\partial F_y}{\partial u} = \frac{\partial F_y}{\partial w} = \frac{\partial F_z}{\partial v} = 0 \tag{6.41}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial u} = \frac{\partial M_x}{\partial w} = \frac{\partial M_y}{\partial v} = \frac{\partial M_z}{\partial u} = \frac{\partial M_z}{\partial w} = 0 \tag{6.42}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial p} = \frac{\partial F_x}{\partial r} = \frac{\partial F_y}{\partial q} = \frac{\partial F_z}{\partial p} = \frac{\partial F_z}{\partial r} = 0 \tag{6.43}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial q} = \frac{\partial M_y}{\partial p} = \frac{\partial M_y}{\partial r} = \frac{\partial M_z}{\partial q} = 0 \tag{6.44}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial \delta_a il} = \frac{\partial F_x}{\partial \delta_r} = \frac{\partial F_y}{\partial \delta_{prof}} = \frac{\partial F_z}{\partial \delta_a il} = \frac{\partial F_z}{\partial \delta_r} = 0 \tag{6.45}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial \delta_{prof}} = \frac{\partial F_y}{\partial \delta_a il} = \frac{\partial F_y}{\partial \delta_r} = \frac{\partial F_y}{\partial \delta_{prof}} = 0 \tag{6.46}$$

Considerando agora a descrição da força peso da aeronave, cuja direção varia em função dos ângulos de Euler, pode-se escrevê-la matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} -sen\theta \\ sen\phi cos\theta \\ cos\phi cos\theta \end{bmatrix} \tag{6.47}$$

Assumindo então a condição de equilíbrio e a abordagem por pequenas perturbações, pode-se determinar a componente perturbada do peso nas três direções do espaço:

$$\begin{bmatrix} \Delta W_x \\ \Delta W_y \\ \Delta W_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_x}{\partial \phi} & \frac{\partial W_x}{\partial \theta} & \frac{\partial W_x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial W_y}{\partial \phi} & \frac{\partial W_y}{\partial \theta} & \frac{\partial W_y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial W_z}{\partial \phi} & \frac{\partial W_z}{\partial \theta} & \frac{\partial W_z}{\partial \psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\theta \\ \Delta\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -W cos\theta_0 & 0 \\ W cos\theta_0 & 0 & 0 \\ 0 & -W sen\theta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\theta \\ \Delta\psi \end{bmatrix} \tag{6.48}$$

Assumindo então aproximações para pequenos ângulos para o processo de linearização:

$$sin\phi \cong \Delta\phi, sin\theta \cong sen\theta_0 + cos\theta_0 \Delta\theta, sin\psi \cong \Delta\psi \tag{6.49}$$

$$cos\phi \cong 1, cos\theta \cong cos\theta_0 - sen\theta_0 \Delta\theta, cos\psi \cong 1 \tag{6.50}$$

E substituindo-as nas expressões anteriormente obtidas, pode-se finalmente representar as equações do movimento longitudinal do avião em cruzeiro linearizadas e na forma matricial da maneira apresentada abaixo (note que a notação do tipo $\bar{F}_{ij}$ indica $\frac{\partial F_i}{\partial j}$).

$$\begin{bmatrix} \frac{W}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{W}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\dot{u} \\ \Delta\dot{w} \\ \Delta\dot{q} \\ \Delta\dot{x}_f \\ \Delta\dot{z}_f \\ \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{xu} & \bar{F}_{xw} & \bar{F}_{xq} & 0 & 0 & -W\cos\theta_0 \\ \bar{F}_{zu} & \bar{F}_{zw} & \bar{F}_{zq} + \frac{WV_0}{g} & 0 & 0 & -W\sin\theta_0 \\ \bar{M}_{yu} & \bar{M}_{yw} & \bar{M}_{yq} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta_0 & \sin\theta_0 & 0 & 0 & 0 & -V_0\sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 & 0 & 0 & -V_0\cos\theta_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta x_f \\ \Delta z_f \\ \Delta\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}_{x\delta_{prof}} \\ \bar{F}_{z\delta_{prof}} \\ \bar{M}_{y\delta_{prof}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\delta_{prof} \tag{6.51}$$

6.9 Modelagem aerodinâmica

Nesta seção será abordada a obtenção das derivadas aerodinâmicas relevantes aos equacionamentos matemáticos apresentados nas seções anteriores, tomando como principal referência os desenvolvimentos feitos por [1]), já introduzido na seção de revisão bibliográfica.

6.9.1 Coeficientes aerodinâmicos

O conhecimento do comportamento dos coeficientes aerodinâmicos para simulação da modelagem abordada neste relatório é de extrema importância, principalmente no que tange aos coeficientes de arrasto (C_D), de sustentação (C_L) e de momento (C_M).

Estes últimos coeficientes são dependentes de alguns outros parâmetros, dentre eles o número de Reynolds (Re), a taxa de arfagem, a deflexão das superfícies de comando, o ângulo de ataque (α) e o número de Mach. Entretanto, como será abordada uma aeronave não supersônica, com velocidade máxima de 23 m/s (fornecido pela equipe Keep Flying), pode-se desprezar a influência do número de Mach e adotar comportamento constante no intervalo de Reynolds a ser considerado.

Assim, pode-se dizer que os coeficientes buscados dependem somente da deflexão das superfícies de comando, da taxa de arfagem e do ângulo de ataque. Com isto, pode-se obter os valores numéricos dos coeficientes necessários através de alguns métodos, como o CFD, o VLM e por meio de ensaios em túneis de vento; métodos estes utilizados para a obtenção dos coeficientes a serem empregados na modelagem em desenvolvimento, além de métodos análiticos para a obtenção de derivadas destes coeficientes.

6.9.2 Cálculos iniciais

Antes de prosseguir com a modelagem da aeronave, é fundamental obter algumas relações entre variáveis que serão utilizadas durante os cálculos:

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{u}{v} = \cos\alpha \approx 1 \tag{6.52}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{-\sin\alpha}{v} \approx 0 \tag{6.53}$$

$$\frac{\partial v}{\partial W} = \frac{W}{v} = \sin\alpha \approx 0 \tag{6.54}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial W} = \frac{\cos\alpha}{v} \approx \frac{1}{v} \tag{6.55}$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial u} = \frac{\partial C_D}{\partial v} = 0 \tag{6.56}$$

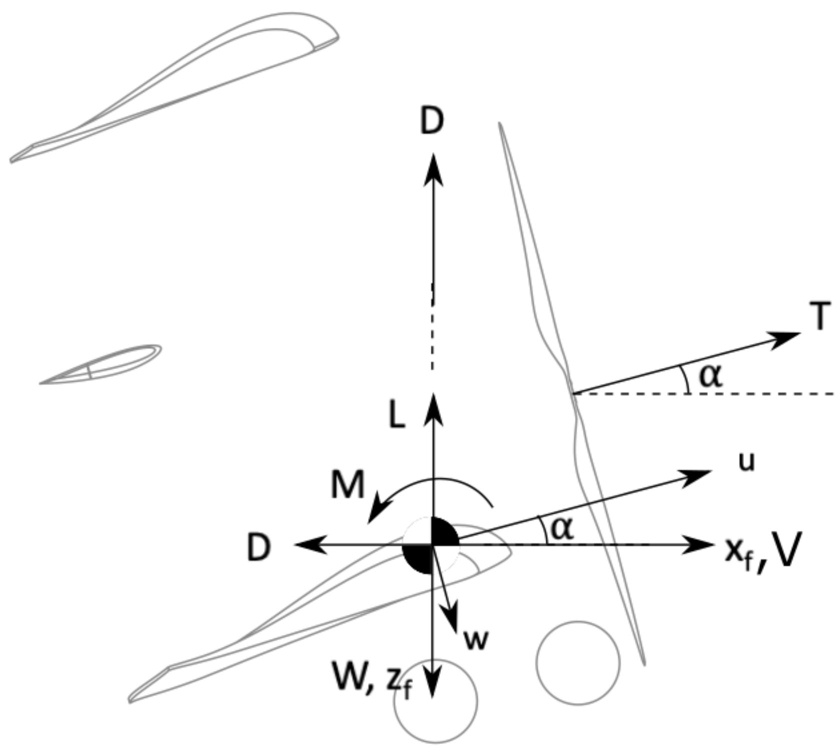

Figura 6.4: Diagrama de corpo livre da aeronave

6.9.3 Força e momento resultante na aeronave

Com as forças definidas nas Seções 6.3 e 6.4, os ângulos obtidos na Seção 6.9.2 e aplicando as hipóteses simplificadoras descritas na Seção 6.3, é possível desenvolver as expressões da forças e momentos resultantes na aeronave.

- Força resultante em x_b:

$$F_x = \frac{1}{2}\rho V^2 S[C_L \sin(\alpha) - C_D \cos(\alpha)] + T\cos(\alpha_{T0}) - W\sin(\theta)$$

$$F_x = \frac{1}{2}\rho V^2 S[C_L \sin(\alpha) - C_D \cos(\alpha)] + T - W\sin(\theta) \tag{6.57}$$

- Força resultante em y_b:

$$F_y = 0 \tag{6.58}$$

- Força resultante em z_b:

$$F_z = \frac{1}{2}\rho V^2 S[-C_L \cos(\alpha) - C_D \sin(\alpha)] - T\sin(\alpha_{T0}) + W\cos(\phi)\cos(\theta)$$

$$F_z = \frac{1}{2}\rho V^2 S[-C_L \cos(\alpha) - C_D \sin(\alpha)] + W\cos(\phi)\cos(\theta) \tag{6.59}$$

- Momento resultante em x_b:

$$M_x = 0 \tag{6.60}$$

- Momento resultante em y_b:

$$M_y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c}C_m + T[z_T\cos(\alpha_{T0}) + x_T\sin(\alpha_{T0})]$$

$$M_y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c}C_m + Tz_T \tag{6.61}$$

- Momento resultante em z_b:

$$M_z = 0 \tag{6.62}$$

6.9.4 Derivadas Devido a Perturbações de Velocidade

Obteve-se as derivadas de estabilidade por meio da diferenciação das forças e momentos resultantes em relação a u e w.

$$\bar{F}_{xu} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{2}\rho V^2 S[C_L\sin(\alpha) - C_D\cos(\alpha)] + \frac{\partial}{\partial u}T - \frac{\partial}{\partial u}W\sin(\theta)$$

Sendo:

$$A = \frac{\partial}{\partial u}V^2[C_L\sin(\alpha) - C_D\cos(\alpha)]$$

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial V^2}{\partial u}(C_L\sin\alpha - C_D\cos\alpha) + V^2\left(\frac{\partial C_L}{\partial u}\sin\alpha + C_L\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \frac{\partial C_D}{\partial u}\cos\alpha + C_D\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial A}{\partial u} = -\frac{1}{2}\rho SV^2\frac{\partial C_D}{\partial V} - \rho SVC_D$$

$$\bar{F}_{xu} = -\frac{1}{2}\rho SV^2\frac{\partial C_D}{\partial V} - \rho SVC_D + \frac{\partial T}{\partial u}$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial V} = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}\rho SV^2\frac{\partial C_D}{\partial V} = 0$$

$$\bar{F}_{xu} = -\rho SVC_D + \frac{\partial T}{\partial u} \tag{6.63}$$

Realizando-se o mesmo procedimento para as demais derivadas, obteve-se os resultados da Tabela 6.5.

Tabela 6.5: Parâmetros numéricos utilizados

Derivada	Expressão
$\bar{F}_{xu}$	$-\rho SVC_D + \dfrac{\partial T}{\partial u}$
$\bar{F}_{zu}$	$-\rho SVC_L$
$\bar{M}_{yu}$	$\rho VS\bar{c}C_M + \dfrac{\partial T}{\partial V}z_T$
$\bar{F}_{xw}$	$\dfrac{1}{2}\rho SV\left(C_L - \dfrac{\partial C_D}{\partial \alpha}\right)$
$\bar{F}_{zw}$	$\dfrac{1}{2}\rho SV\left(-C_D - \dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right)$
$\bar{M}_{yw}$	$\dfrac{1}{2}\rho SV\bar{c}\dfrac{\partial C_M}{\partial \alpha}$

6.9.5 Derivadas com relação à taxa de arfagem

Começando pela derivada com relação à força F_x, que ocorre pela variação de arrasto visto a mudança de incidência das asas e da cauda, verifica-se que, segundo (Phillips, 2010), essa derivada pode ser desprezada visto que o ganho de arrasto é um efeito pequeno, assim:

$$\frac{\partial F_x}{\partial q} = \bar{F}_{xq} = -\frac{1}{2}\rho V^2 S\frac{\partial C_D}{\partial q} = 0 \tag{6.64}$$

Para as demais derivadas, será calculada a contribuição da cauda e de cada uma das asas separadamente, considerando a distância do CG ao centro aerodinâmico de cada superfície sustentadora. Na descrição matemática será utilizado o subscrito 1 para dados referentes à asa inferior e 2 para a asa superior. Assim, para a força F_z, tem-se a seguinte definição para a derivada.

$$\frac{\partial F_z}{\partial q} = \bar{F}_{zq} = \frac{1}{2}\rho V\left(Sx_1\frac{\partial C_{L1}}{\partial \alpha} + Sx_2\frac{\partial C_{L2}}{\partial \alpha} + \eta_h S_h x_h\frac{\partial C_{Lh}}{\partial \alpha}\right) \tag{6.65}$$

Para o momento M_y tem-se a seguinte expressão.

$$\frac{\partial M_y}{\partial q} = \bar{M}_{yq} = -\frac{1}{2}\rho V\left(Sx_1^2\frac{\partial C_{L1}}{\partial \alpha} + Sx_2^2\frac{\partial C_{L2}}{\partial \alpha} + \eta_h S_h x_h^2\frac{\partial C_{Lh}}{\partial \alpha}\right) \tag{6.66}$$

6.9.6 Derivadas com relação às perturbações das superfícies de controle

Para as perturbações em função das superfícies de controle, obteve-se as derivadas seguindo o mesmo procedimento realizado nas Seções anteriores. Os resultados obtidos estão na Tabela 6.6.

Tabela 6.6: Parâmetros numéricos utilizados

Derivada	Expressão
$\bar{F}_{x\delta_{prof}}$	$-\frac{1}{2}\rho SV\frac{\partial C_D}{\partial \delta_{prof}}$
$\bar{F}_{z\delta_{prof}}$	$-\frac{1}{2}\rho SV\frac{\partial C_L}{\partial \delta_{prof}}$
$\bar{M}_{y\delta_{prof}}$	$\frac{1}{2}\rho SV\bar{c}\frac{\partial C_L}{\partial \delta_{prof}}$

7 Solução da modelagem da aeronave

7.1 Transformada de Laplace e funções de transferência

Para a obtenção das funções de transferência relacionadas às variáveis consideradas nas equações linearizadas representativas do sistema estudado, é primeiramente necessário a aplicação da transformada de Laplace. De maneira geral, um sistema na forma de espaço de estados pode ser representado na forma indicada a seguir (A,B,C e D são matrizes, $p(t)$ é o vetor das variáveis de estado estudadas, $u(t)$ é o vetor de entradas e $y(t)$ é o vetor das saídas).

$$\dot{p}(t) = Ap(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cp(t) + Du(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace já assumindo condições iniciais nulas, obtém-se o seguinte resultado.

$$sP(s) = AP(s) + BU(s) \tag{7.1}$$
$$Y(s) = CP(s) + DU(s) \tag{7.2}$$

As funções de transferência podem ser obtidas observando-se a função que relaciona a entrada $U(s)$ com a saída do sistema $Y(s)$. Primeiramente altera-se levemente a equação 7.1 como feito logo a seguir.

$$sP(s) - AP(s) = BU(s) \Rightarrow (sI - A)P(s) = BU(s) \Rightarrow P(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \tag{7.3}$$

Substitiuindo o resultado mais à direita da equação 7.3 na equação 7.2 obtém-se a seguinte expressão.

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \tag{7.4}$$

Logo, dos desenvolvimentos anteriores, pode-se concluir que as funções de transferências $G(s)$ são dadas da maneira abaixo.

$$G(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] \tag{7.5}$$

Impondo que a saída do sistema $Y(s)$ represente cada uma das variáveis de estado, pode-se simplificar a expressão dada por 7.5, já que dessa forma a matriz C será uma matriz do tipo identidade e D será uma matriz nula.

$$G(s) = (sI - A)^{-1}B \tag{7.6}$$

Utilizando a definição do sistema de equações linearizadas na forma matricial definida na seção 6.8, pode-se chegar às funções de transferência para a modelagem abordada neste relatório na forma literal. Mais adiante na seção 7.2.2 serão apresentadas as funções de transferência já com os valores numéricos substituídos.

Note ainda que o termo $(sI - A)^{-1}$ da equação 7.6 tem uma representação própria, como pode ser observado abaixo.

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{|sI - A|} = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \tag{7.7}$$

Da equação 7.7 é possível obter a equação característica a partir da qual se pode obter os polos do sistema resolvendo-se a seguinte equação a seguir.

$$\det(sI - A) = 0 \tag{7.8}$$

É importante ressaltar que a equação característica do sistema estará presente nos denominadores de todas as funções de transferência das variáveis a serem estudadas, sendo portanto comum a todas estas funções.

7.2 Parâmetros numéricos

Na tabela 7.1 encontram-se os valores númericos - fornecidos pela Keep Flying - a serem empregados na modelagem do sistema desenvolvido ao longo do relatório.

Tabela 7.1: Valores numéricos utilizados

Parâmetro	**Valor**	**Parâmetro**	**Valor**
m	20 kg	C_{L_0}	0,4900
g	9,8100 m/s^2	$C_{L_{max}}$	1,4700
ρ	1,1062 kg/m^3	C_{L_α}	3,9400
S	3,2000 m^2	C_{Lh_α}	0,3110
V	15,7500 m/s	C_{L1_α}	1,9108
$\bar{c}$	0,2340 m	C_{L2_α}	1,7226
x_{CG}	0,1509 m	$C_{L_{\delta_{prof}}}$	-0,3538
x_1	-0,0059 m	C_{L_q}	0,0380
x_2	-0,1242 m	C_{D_0}	0,0600
x_h	-0,2561 m	C_{D_α}	0,2180
z_{motor}	0,4438 m	$C_{D_{\delta_{prof}}}$	-0,0080
z_{CG}	0,4384 m	C_{D_q}	0,0049
S_h	0,3387 m^2	C_{M_0}	0,0600
I_{yy}	1,3600 kg.m^2	C_{M_α}	-0,3846
η_h	1	$C_{M_{\delta_{prof}}}$	0,3470
$\frac{\partial T}{\partial V}$	-1,7464 kg/s	C_{M_q}	-0,0187

É importante ressaltar que η_h tem valor igual a 1 devido ao fato de os coeficientes aerodinâmicos serem obtidos através de um VLM que já considera a interferência das asas na empenagem horizontal no cálculo dos coeficientes aerodinâmicos.

7.2.1 Substituição dos valores numéricos no sistema linearizado

Com a substituição dos parâmetros numéricos apresentados na tabela 7.1 nas matrizes do sistema linearizado (equação 6.51) é possível obter-se o seguinte sistema de equações diferenciais do movimento na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{u} \\ \Delta\dot{w} \\ \Delta\dot{q} \\ \Delta\dot{x}_f \\ \Delta\dot{z}_f \\ \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}2534 & 0{,}3190 & -0{,}3257 & 0 & 0 & -9{,}8099 \\ -1{,}2457 & -5{,}5746 & 15{,}4243 & 0 & 0 & -0{,}0409 \\ 0{,}0070 & -1{,}8447 & -0{,}5903 & 0 & 0 & 0{,}0656 \\ 1{,}0000 & 0{,}0042 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0656 \\ -0{,}0042 & 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 & -15{,}7499 \\ 0 & 0 & 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta x_f \\ \Delta z_f \\ \Delta\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}1756 \\ 7{,}7668 \\ -26{,}2133 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\delta_{prof} \tag{7.9}$$

7.2.2 Obtenção das funções de transferência

A partir das matrizes sistema linearizado já com os valores numéricos definidos, é possível empregar a fórmula apresentada na equação 7.5 para obter-se as funções de transferência relativas as variáveis estudadas. Entretanto, com o auxílio da função *ss2tf* é possível obter as funções de transferência requeridas de forma direta. Dessa forma, tem-se as seguintes funções de transferência apresentadas logo a seguir.

- Para a variável u: $G_u(s) = \dfrac{0{,}2s^5 + 12{,}1s^4 + 187{,}5s^3 + 1574{,}4s^2}{s^6 + 6{,}4183s^5 + 33{,}7051s^4 + 8{,}9966s^3 + 22{,}9044s^2}$
- Para a variável w: $G_w(s) = \dfrac{7{,}8s^5 - 398s^4 - 110{,}9s^3 - 319{,}5s^2}{s^6 + 6{,}4183s^5 + 33{,}7051s^4 + 8{,}9966s^3 + 22{,}9044s^2}$
- Para a variável q: $G_q(s) = \dfrac{-26{,}2s^5 - 167{,}1s^4 - 50{,}6s^3}{s^6 + 6{,}4183s^5 + 33{,}7051s^4 + 8{,}9966s^3 + 22{,}9044s^2}$
- Para a variável x_f: $G_{x_f}(s) = \dfrac{0{,}2s^4 + 12{,}2s^3 + 198s^2 + 1576{,}4s}{s^6 + 6{,}4183s^5 + 33{,}7051s^4 + 8{,}9966s^3 + 22{,}9044s^2}$
- Para a variável z_f: $G_{z_f}(s) = \dfrac{7{,}8s^4 + 14{,}8s^3 + 2520s^2 + 471{,}5s}{s^6 + 6{,}4183s^5 + 33{,}7051s^4 + 8{,}9966s^3 + 22{,}9044s^2}$
- Para a variável θ: $G_\theta(s) = \dfrac{-26{,}2s^4 - 167{,}1s^3 - 50{,}6s^2}{s^6 + 6{,}4183s^5 + 33{,}7051s^4 + 8{,}9966s^3 + 22{,}9044s^2}$

7.3 Análise de estabilidade, polos e zeros do sistema

Para analisar a estabilidade do sistema, deve-se encontrar, a partir da função de transferência determinada anteriormente, os zeros e polos do sistema. Para a função de transferência em questão, obteve-se a Figura 7.1.

Primeiramente, a análise dos polos indica que o sistema é marginalmente estável, uma vez que não há polos com componente real positiva e há polos com componente real nula.

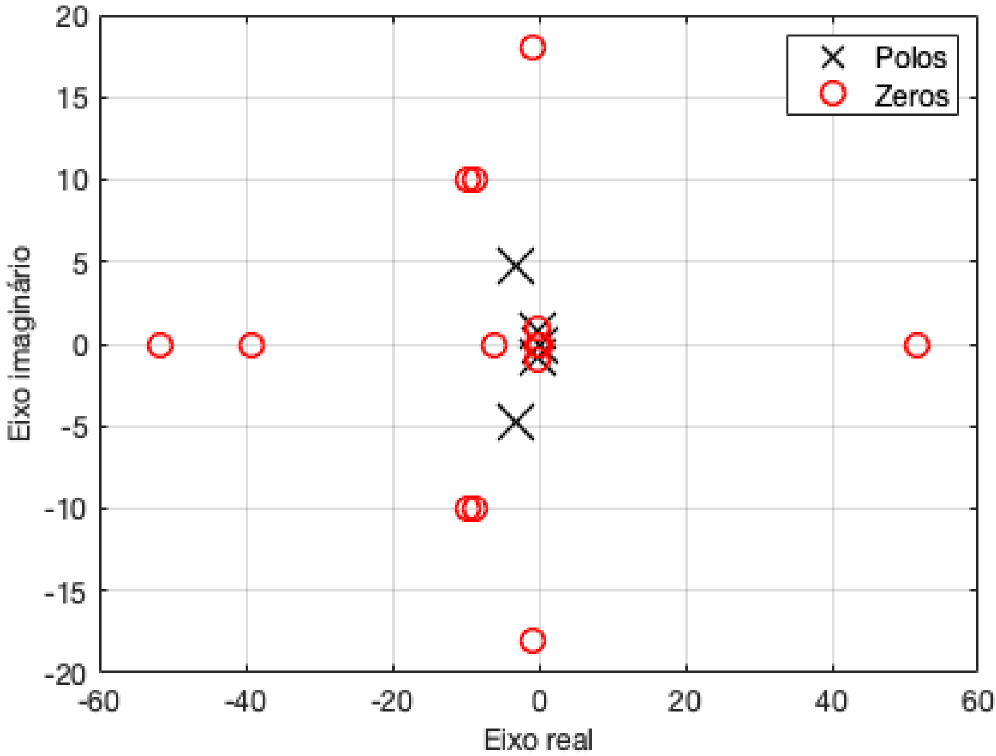

Figura 7.1: Diagrama de polos e zeros

Passando para a análise dos zeros, primeiramente serão tecidos comentários sobre a função de transferência da variável u. Nota-se que esta possui zeros em $-42{,}935$, $-8{,}7825 - 10{,}306i$, 0 e $-8{,}7825 + 10{,}306i$. Quando se compara estes zeros com os polos dominantes do sistema que são $-3{,}13905 - 4{,}71755i$ e $-3{,}13905 + 4{,}71755i$ pode-se perceber que os zeros relacionados à variável u, excetuando-se o zero nulo, são zeros rápidos estáveis e não interferem na resposta do sistema.

Com relação à variável w, os zeros são $-0{,}146304 - 0{,}881352i$, $-0{,}146304 + 0{,}881352i$ (zeros lentos e estáveis, e que portanto geram sobressinal), 0, e 51,3182 (zero rápido, porém instável por ter parte real positiva, logo levando o sistema a um *undershoot*).

Já para a variável q, tem-se que os zeros da função de transferência são $-6{,}05912$, $-0{,}318742$ e 0. O primeiro se trata de um zero rápido e estável que não interfere na resposta do sistema e o segundo é um zero lento e estável que gera sobressinal.

Ademais, para a variável x_f, os zeros da função de transferência se dão em $-41{,}8414$, $-9{,}57929 - 9{,}8293i$, $-9{,}57929 + 9{,}8293i$ e 0. Todos os três primeiros zeros listados neste caso são zeros rápidos e não interferem no sistema.

Para a função de transferência referente à variável z_f os zeros são $-0{,}855074 - 17{,}9451i$, $-0{,}855074 + 17{,}9451i$, $-0{,}187289$ e 0. Neste caso, todos os três primeiros zeros apresentados são zeros lentos e estáveis, gerando sobressinal.

Por fim, em relação à variável θ, os zeros da correspondente função de transferência são $-6{,}05912$, $0{,}318742$ e 0. O primeiro valor é um zero rápido e sem interferência no sistema e o segundo se trata de um zero lento, porém estável, o que implica que este induz um sobressinal.

7.3.1 Aplicação do critério de Routh-Hurwitz

Uma outra forma de analisar a estabilidade do sistema é através do método de Routh-Hurwitz. Nessa abordagem, não é necessário calcular os polos da equação característica do sistema, uma vez que a análise é feita através da disposição dos coeficientes da equação no que se chama de Arranjo de Routh.As sucessivas linhas desse arranjo são determinadas por relações entre os termos anteriores, de modo que a última linha contenha apenas um elemento. Para o sistema analisando, obteve-se:

Tabela 7.2: Critério de Routh-Hurwitz

s^n	**Coeficientes**			
s^6	1	33,7051	22,9044	0
s^5	6,4183	8,9966	0	0
s^4	32,30	22,90	0	0
s^3	4,45	0	0	0
s^2	22,90	0	0	0
s^1	0	0	0	0
s^0	0	0	0	0

Nota-se que a equação característica do sistema (denominadores das funções de transferência) apresenta dois coeficientes nulos, o que indica que o sistema pode ser marginalmente estável. Logo cabe construir a tabela 7.3.1 correspondente à aplicação do critério de *Routh-Hurwitz*. Nesta tabela é possível notar que a primeira coluna apresenta zeros. Se fizermos a substituição do primeiro zero presente na primeira coluna por uma pequena constante arbitrária e continuarmos o processo, ainda terá-se no fim um zero na primeira coluna (que também pode ser substituído por outra constante). No entanto, a conclusão mais importante à qual se chega sobre a tabela 7.3.1 da maneira em que esta se encontra exibida, é o fato de aparecer uma linha inteira de zeros e não haver mudança de sinal na primeira coluna, o que indica que o sistema é, de fato, marginalmente estável.

7.4 Análise de Frequência pelo diagrama de Bode

O diagrama de Bode é mais uma ferramenta que permite analisar a dinâmica do sistema e obter informações a respeito da sua estabilidade e do seu amortecimento. Para tanto, há o enfoque no espaço de frequências do problema submetido a uma entrada senoidal. Para esta tarefa, foi utilizado o comando *bode* já presente na documentação do MATLAB, que retorna, para cada varíavel de estado, um gráfico relativo ao ganho e outro relativo à fase.

7.4.1 Diagramas de Bode

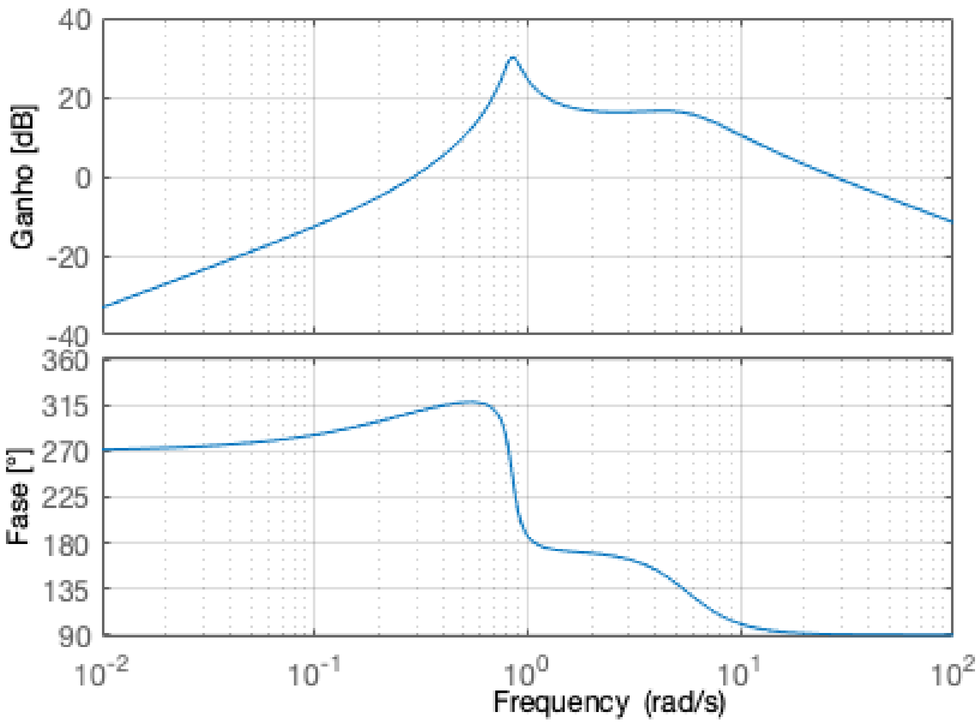

Figura 7.2: Diagrama de Bode na variável q

Verificou-se pelo formato dos picos no gráfico do ganho um amortecimento para curto período superior ao para o efeito de fugoide. Já quanto à fase verificou-se que não houve mudança de fase, assim existe controlabilidade do comando de entrada.

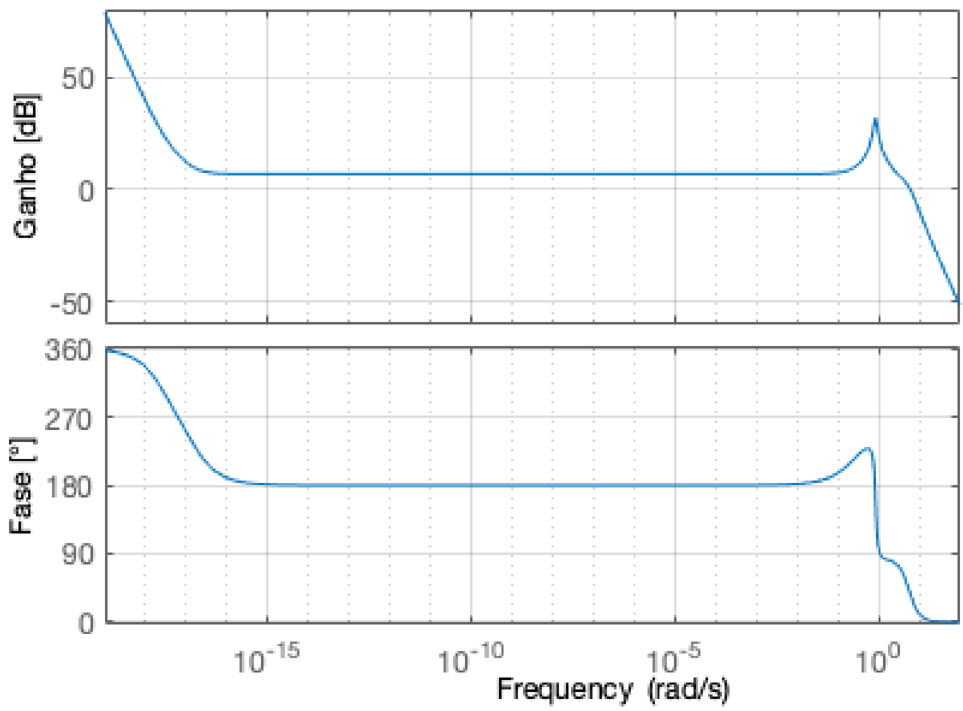

Figura 7.3: Diagrama de Bode na variável θ

Analisando a fase do diagrama, é possível verificar uma iminente inversão de fase, o que pode ser justificado pela alta complexidade do projeto e pelas aeronaves do Aerodesign se encontrarem em seu limite operacional, operando com pequenas margens de segurança.

7.5 Comparação entre o modelo linear e o não linear

Visando compreender melhor a dinâmica do problema analisado, foram realizadas análises a respeito do comportamento da aeronave em cruzeiro quando submetida a três tipos de perturbações do profundor: Impulso, Degrau e Rampa. Foram considerados um modelo linear e um modelo não linear de modo a possibilitar uma posterior comparação dos resultados encontrados e uma avaliação da linearização empregada.

7.5.1 Perturbação do tipo degrau

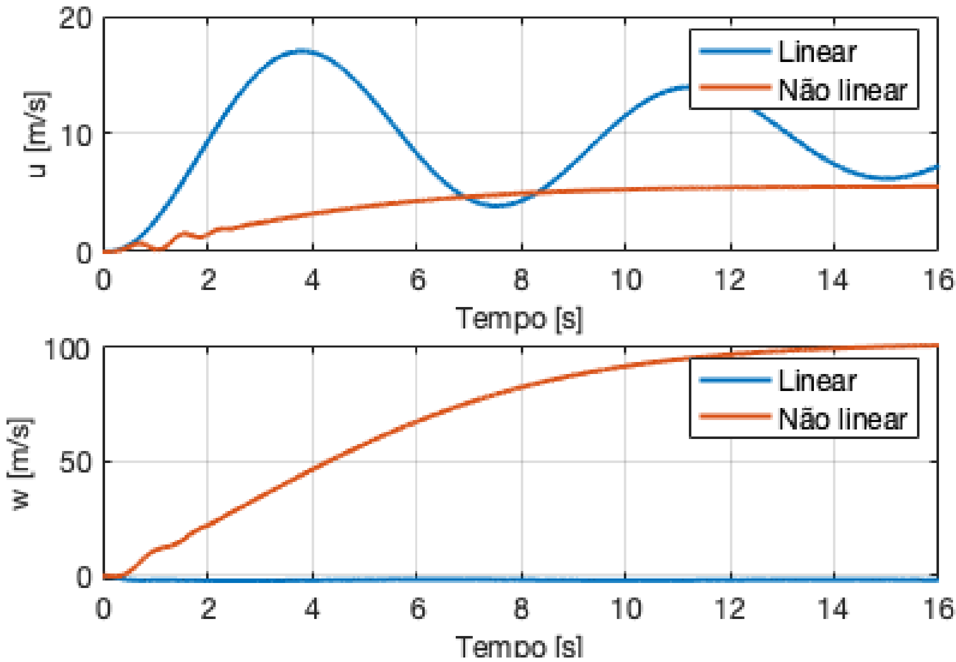

Figura 7.4: Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação degrau

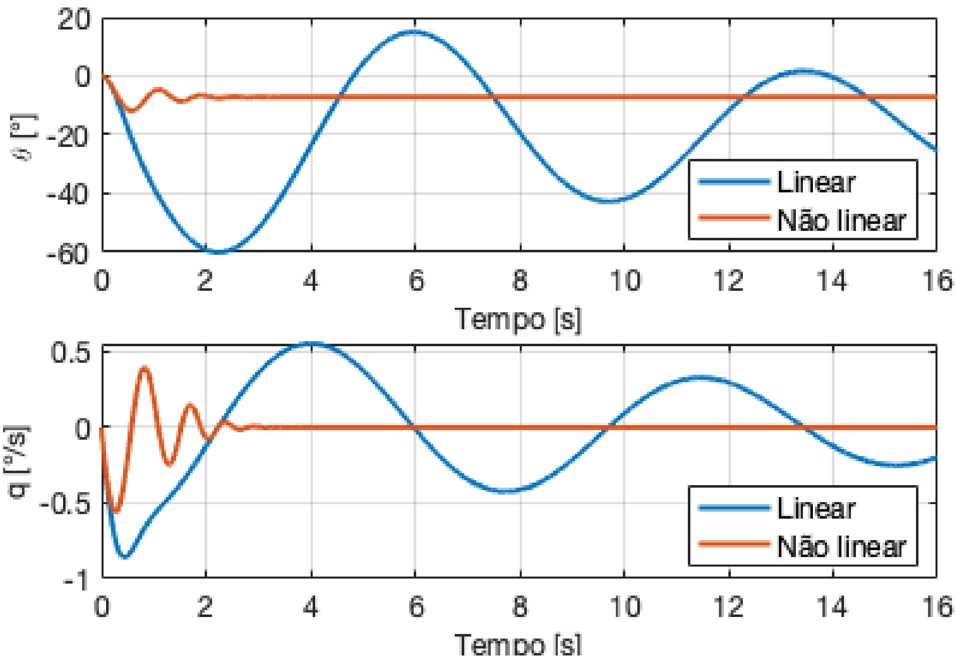

Figura 7.5: Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação degrau

Analisando as respostas dos modelos linear e não-linear para uma excitação degrau, nota-se que a abordagem não-linear apresenta, em geral, um maior amortecimento, de modo que se verifica estabilidade no sistema não-linear, algo já esperado. Nota-se ainda que, embora no decorrer da simulação as repostas dos modelos tenham divergido significativamente, nos instantes iniciais, onde as perturbações ainda eram pequenas, ambas as abordagens acusavam valores muito próximos.

7.5.2 Perturbação do tipo rampa

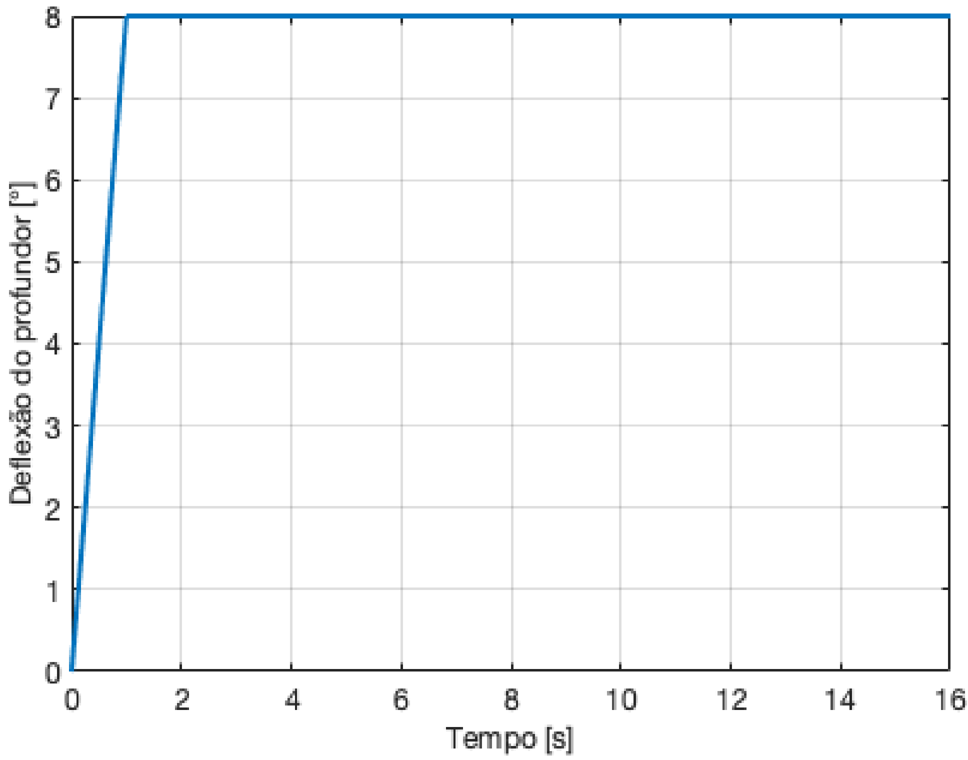

Figura 7.6: Rampa utilizada na simulação

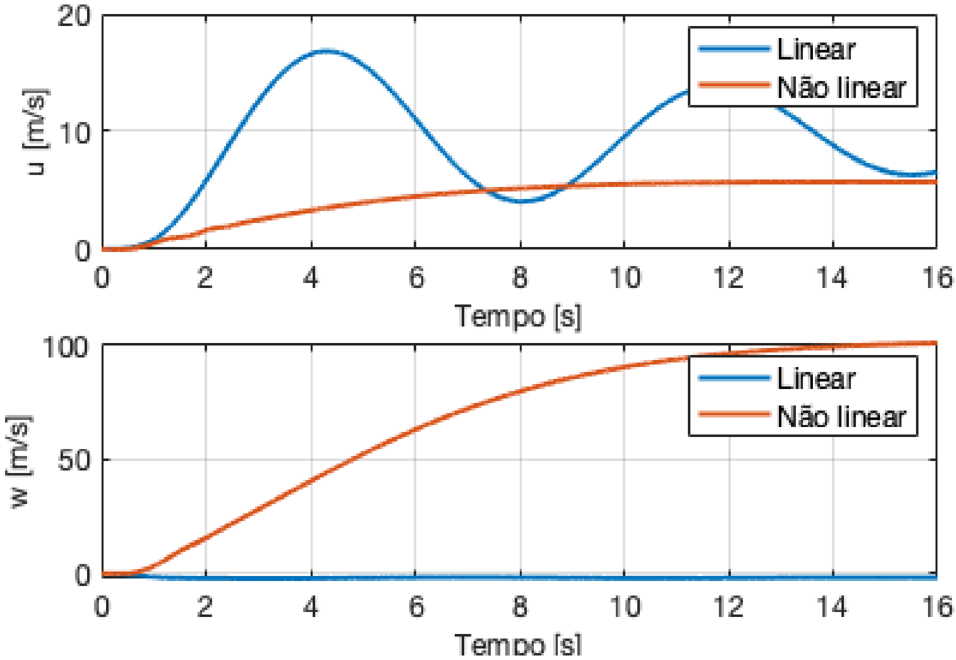

Figura 7.7: Comparação entre o modelo linear e não linear para perturbação rampa

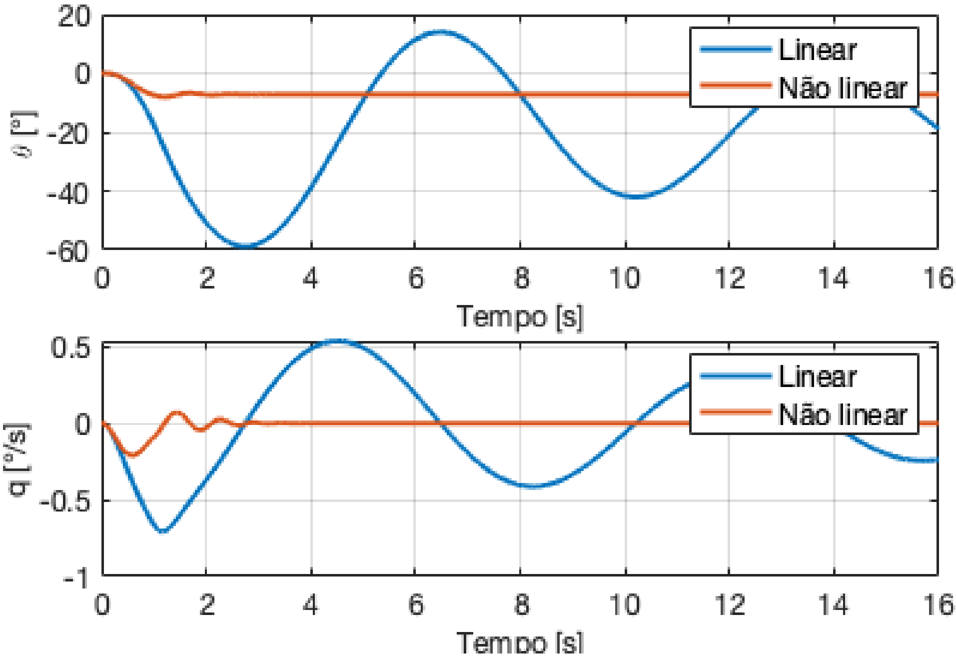

Figura 7.8: Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação rampa

Novamente, constata-se que a abordagem não-linear apresenta, em geral, um maior amortecimento,verificando as afirmações feitas anteriormente para o caso de excitação degrau. No entanto, nota-se que a velocidade vertical da aeronave w apresenta bastante discrepância entre as abordagens devido ao fato da excitação rampa consistir em uma atuação abrupta e contínua do profundor com uma deflexão significativa (8º), promovendo um momento de arfagem ininterrupto na aeronave a partir do instante inicial da simulação.

7.5.3 Perturbação do tipo impulso

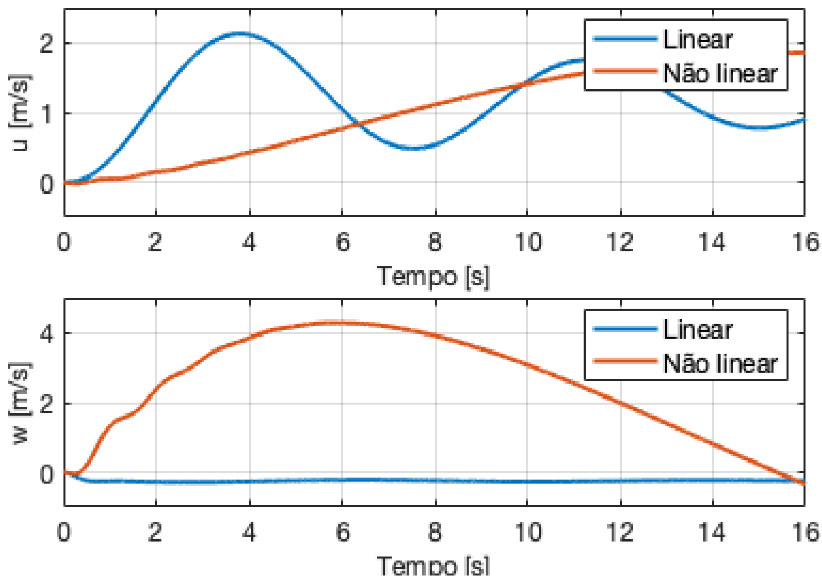

Figura 7.9: Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação impulso

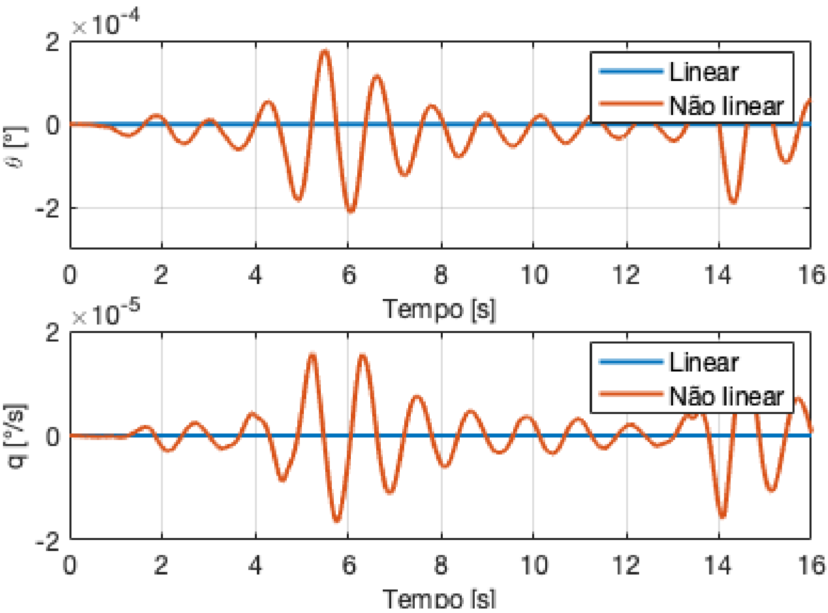

Figura 7.10: Comparação entre o modelo linear e não linear para uma perturbação impulso

Por fim, na excitação por impulso, nota-se que a solução não linear apresenta um caráter oscilatório periódico no domínio do tempo para as varíaveis q e θ, mas com uma amplitude muito pequena, assim a aproximação linear foi capaz de representar a não linear. A velocidade vertical w da aeronave possui uma discrepância inicial crescente entre as duas abordagens;no entanto, retornam a convergir nos instantes finais da simulação, uma vez que no caso da entrada por impulso a excitação é significativa porém de curta duração, sendo interrompida ainda nos primeiros instantes de simulação.

8 Considerações Finais

Ao final do projeto foi possível determinar através de técnicas de linearização, análise de estabilidade e análise de frequências, o comportamento dinâmico longitudinal de uma aeronave radiocontrolada em voo de cruzeiro. Além disso, pode-se observar uma boa adequação geral entre a abordagem linearizada descrita na bibliografia de referência e a não-linear para os instantes iniciais das simulações numéricas.

9 Apêndice: Códigos utilizados na simulação

9.1 Simulação linear

```
function Main_modelagem
% Versao: Matlab 2020a
% Disciplina: PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinamicos
% Autores:
% Ives C. Vieira - 10355551
% Mauricio C. Leiman - 10772571
% Vitor Facchini - 10772605
% Yago N. Yang - 10772626

% Essa rotina realizara a simulacao linear da aeronave, alem disso plotara
% os diagramas de Bode, polos e zeros e obtera a funcao de transferencia.
% Ela tambem calcula uma solucao linear, entretanto os diferentes casos
% foram simulados na rotina "compara.m"
% O equacionamento esta descritos no relatorio entregue.
close all

%% Valores
% Constantes
rho = 1.1062;
g = 9.81;
% Parametros Geometricos
m = 20;
W = m*g;
Iyy = 1.36;
z_motor = 0.4438;
z_cg = 0.4384;
S = 3.2;
Sh = 0.3387;
mac = 0.234;
x1 = -0.0059;
x2 = -0.1242;
xh = -0.2561;
xCG = 0.1509;

% Coeficientes Aerodinamicos
dT = -1.7464;
eta = 1;
```

```
CL0 = 0.49;
CD0 = 0.06;
CM0 = 0.06;
CL_alpha = 3.94;
CD_alpha = 0.2180;
CM_alpha = -0.3846;
CL_def = -0.3538;
CD_def = -0.008;
CM_def = -0.3470;
CL_alpha_1 = 1.9108;
CL_alpha_2 = 1.7226;
CL_alpha_h = 0.3110;

%% Condicao de trimagem
% Velocidade Inicial
V = 15.75;

% Chute Inicial
x0 = [0;0;60];
rvs = 0.5*rho*V^2*S;

% Equacoes do Movimento
fun = @(x) [ (CL0+CL_alpha*x(1)+CL_def*x(2)) + x(3)*sin(x(1))/rvs -
    W/rvs;
     x(3)*cos(x(1)) - (CD0+CD_alpha*x(1)+CD_def*x(2));
     (CM0+CM_alpha*x(1)+CM_def*x(2)) - (z_motor-z_cg)*x(3)/(rvs*mac)
        ];

% Variaveis Trimadas
options = optimoptions('fsolve','Display','off');
y = fsolve(fun,x0,options);
alpha_trim = y(1); def_trim = y(2) ; T_trim = y(3);

% Estados no  sistema de eixos fixo no aviao %
Vu = V*cos(alpha_trim);
Vv = 0;
Vw = V*sin(alpha_trim);
% vet_estados =
%          Vu Vw q xf zf theta
y_trim = [Vu Vw 0 0  0  alpha_trim]';

%% Derivadas de estabilidade
% Coeficientes aerodinamicos
CL = CL0 + CL_alpha*alpha_trim + CL_def*def_trim;
CD = CD0 + CD_alpha*alpha_trim + CD_def*def_trim;
```

```
CM = CM0 + CM_alpha*alpha_trim + CM_def*def_trim;

% Forca peso
Wf = [0 0 W];
Wb = body(y_trim,Wf);
Xg = Wb(1);
Zg = Wb(3);

% Derivadas
Fxu = -rho*S*V*CD + dT;
Fzu = -rho*S*V*CL;
Myu = rho*S*mac*V*CM + dT*(-z_motor+z_cg);
Fxw = 0.5*rho*S*V*(CL - CD_alpha);
Fzw = 0.5*rho*S*V*(-CD - CL_alpha);
Myw = 0.5*rho*S*V*mac*CM_alpha;
Fxq = 0;
Fzq = 0.5*rho*V*(S*x1*CL_alpha_1 + S*x2*CL_alpha_2 + eta*Sh*xh*
    CL_alpha_h);
Myq = -0.5*rho*V*(S*x1^2*CL_alpha_1 + S*x2^2*CL_alpha_2 + eta*Sh*xh
    ^2*CL_alpha_h);;
Fxd = -0.5*rho*S*V^2*CD_def;
Fzd = -0.5*rho*S*V^2*CL_def;
Myd =  0.5*rho*S*V^2*mac*CM_def;


%% Parametros
% Matrizes do Sistema
Inv = inv([W/g 0 0 0 0 0
    0 W/g 0 0 0 0
    0 0 Iyy 0 0 0
    0 0 0 1 0 0
    0 0 0 0 1 0
    0 0 0 0 0 1]);

A = [Fxu Fxw Fzq 0 0 -W*cos(alpha_trim)
Fzu Fzw Fzq+W*V/g 0 0 -W*sin(alpha_trim)
Myu Myw Myq 0 0 0
cos(alpha_trim) sin(alpha_trim) 0 0 0 -V*sin(alpha_trim)
-sin(alpha_trim) cos(alpha_trim) 0 0 0 -V*cos(alpha_trim)
0 0 1 0 0 0 ];

B = [Fxd
    Fzd
    Myd
    0
```

```
      0
      0];

A = Inv*A;
B = Inv*B;

% C = zeros(2,4);
% C(1,:) = rad2deg([0 1/V0 0 0]); C(2,:) = A(2,:)/g;
C = eye(6);
D = zeros(6,1);

% Obtencao da Funcao de transferencia e diagrama de Polos e zeros
[autoval,autovet]=eig(A);
[numerador,denominador]=ss2tf(A,B,C,D,1);
[zer,pol,~]=ss2zp(A,B,C,D,1);

figure
plot(real(pol),imag(pol),'kx','MarkerSize',20,'LineWidth',1.5)
hold on
plot(real(zer),imag(zer),'ro','MarkerSize',10,'LineWidth',1.5)
xlabel('Eixo real');
ylabel('Eixo imaginario')
legend('Polos','Zeros')
grid on;

% Espaco de Estados
sys = ss(A,B,C,D);

% Diagrama de Bode
H1=tf(numerador(1,:),denominador);
H2=tf(numerador(2,:),denominador);
H3=tf(numerador(3,:),denominador);
H4=tf(numerador(4,:),denominador);
H5=tf(numerador(5,:),denominador);
H6=tf(numerador(6,:),denominador);

figure
bode(H1)
grid on
title('Diagrama de Bode para a variavel u')

figure
bode(H2)
grid on
title('Diagrama de Bode para a variavel w')
```

```

figure
bode(H3)
grid on
title('Diagrama de Bode para a variavel q')

figure
bode(H6)
grid on
title('Diagrama de Bode para a variavel \theta')

% Parametros da Simulacao
step = 0.005;
tempo_final = 10;
t = 0:step:tempo_final;
vet_temp = t;
n = length(t);
u = zeros(1,n);
u(1,:) = deg2rad(0);

y_0 = zeros(6,1);
def = rad2deg(u);

%% Solucao do sistema
% Solucao do Sistema por ODE
fun = @(t,x) odefun_linear(t,x,A,B,u,vet_temp);

[t_tot,y_tot] = ode45(fun, t, y_0);

% Plots
u=y_tot(:,1);
w=y_tot(:,2);
q=y_tot(:,3);
x=y_tot(:,4);
z=y_tot(:,5);
alfa=rad2deg(y_tot(:,6));
t=t_tot;

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,u,'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('u [m/s]')
grid on
subplot(2,1,2)
```

```
plot(t,w,'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('w [m/s]')
grid on

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,x,'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('x [m]')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,z,'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('z [s]')
grid on

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,alfa,'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('\alpha [graus]')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,q,'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('q [graus/s]')
grid on

figure
plot(t,def,'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('\delta_{prof} [graus]')
grid on
end

function x_ponto = odefun_linear(t,x,A,B,u,vet_temp)
[~,instante] = min(abs(vet_temp-t));
u_t = u(:,instante);
x_ponto = A*x + B*u_t;
end

function Vb = body(y, V)
% Essa funcao transforma um vetor da base fixa no solo em uma na
    base fixa
```

```
% no aviao (body), pode ser linha ou coluna.
% y eh o vetor de estados no instante, pode ser linha ou coluna, apenas
% importam os angulos de Euler
% V eh o vetor a ser transformado

[l,~] = size(V);
vet_col=false;
if l==3
    vet_col = true;
    V = V';
end
M = [cos(y(6)) *cos(0), cos(y(6)) * sin(0), -sin(y(6));
    sin(0) *sin(y(6)) *cos(0) - cos(0) *sin(0), sin(0) *sin(y(6)) * sin(0) + cos(0) *cos(0), sin(0) *cos(y(6));
    cos(0) *sin(y(6)) *cos(0) + sin(0) *sin(0), cos(0) *sin(y(6)) * sin(0) - sin(0) *cos(0), cos(0) *cos(y(6))];
Vb = (M*V')';
if vet_col
    Vb = Vb';
end
end
```

9.2 Simulação não linear

```
function Main_modelagem_nl
% Versao: Matlab 2020a
% Disciplina: PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinamicos
% Autores:
% Ives C. Vieira - 10355551
% Mauricio C. Leiman - 10772571
% Vitor Facchini - 10772605
% Yago N. Yang - 10772626

% Essa rotina realizara a simulacao nao linear da aeronave e calculara
% uma solucao linear, entretanto os diferentes casos foram simulados na rotina "compara.m"
% O equacionamento esta descritos no relatorio entregue.
close all

%% Valores
% Constantes
rho = 1.1062;
```

```
g = 9.81;

% Geometricos
m = 20;
W = m*g;
Iyy = 1.36;
z_motor = 0.4438;
z_cg = 0.4384;
S = 3.2;
Sh = 0.3387;
mac = 0.234;
x1 = -0.0059;
x2 = -0.1242;
xh = -0.2561;
xCG = 0.1509;

% Aerodinamicos
dT = -1.7464;
eta = 1;
CL0 = 0.49;
CD0 = 0.06;
CM0 = 0.06;
CL_alpha = 3.94;
CD_alpha = 0.2180;
CM_alpha = -0.3846;
CL_def = -0.3538;
CD_def = -0.008;
CM_def = -0.3470;
CL_alpha_1 = 1.9108;
CL_alpha_2 = 1.7226;
CL_alpha_h = 0.3110;

%% Condicao de trimagem
% Velocidade Inicial
V = 15.75;

% Chute Inicial
% alfa def T
x0 = [0;0;60];
rvs = 0.5*rho*V^2*S;

% Equacoes do Movimento
fun2 = @(x) [ (CL0+CL_alpha*x(1)+CL_def*x(2)) + x(3)*sin(x(1))/rvs
    - W/rvs;
    x(3)*cos(x(1)) - (CD0+CD_alpha*x(1)+CD_def*x(2));
```

```
    (CM0+CM_alpha*x(1)+CM_def*x(2)) - (z_motor-z_cg)*x(3)/(rvs*mac)];

% Variaveis Trimadas
options = optimoptions('fsolve','Display','off');
y = fsolve(fun2,x0,options);
alpha_trim = y(1);
def_trim = y(2) ;
T_trim = y(3);

% Estados no  sistema de eixos fixo no aviao
Vu = V*cos(alpha_trim);
Vv = 0;
Vw = V*sin(alpha_trim);
% vet_estados =
%           Vu Vw q xf zf theta
y_trim = [Vu Vw 0 0  0  alpha_trim]';

% Parametros da Simulacao
step = 0.001;
tempo_final = 10;
t = 0:step:tempo_final;
vet_temp = t;
n = length(t);
u = zeros(1,n);
u(1,:) = def_trim  + deg2rad(0); % = def do prof durante a simulacao, mudar!

y_0 = y_trim;
def =  rad2deg(u);

%% Solucao do sistema
% Solucao do Sistema por ODE
fun2 = @(t,y) odefun_nlinear(t, y, u, vet_temp, T_trim);

[t_tot,y_tot] = ode45(fun2, t, y_0);

% Plots
u=y_tot(:,1);
w=y_tot(:,2);
q=y_tot(:,3);
x=y_tot(:,4);
z=y_tot(:,5);
alfa=rad2deg(y_tot(:,6));
t=t_tot;
```

```

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,u-y_0(1),'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('u [m/s]')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,w-y_0(2),'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('w [m/s]')
grid on

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,x-y_0(4),'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('x [m]')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,z-y_0(5),'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('z [s]')
grid on

figure
subplot(2,1,1)
plot(t,alfa-alpha_trim,'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('\alpha [graus]')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t,q-y_0(3),'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('q [graus/s]')
grid on

figure
plot(t,def,'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('\delta_{prof} [graus]')
grid on
end

function yp = odefun_nlinear(t,y,u,vet_temp,T_trim)
```

```
%% Valores
% Constantes
rho = 1.1062;
g = 9.81;

% Geometricos
m = 20;
W = m*g;
z_motor = 0.4438;
z_cg = 0.4384;
S = 3.2;
Sh = 0.3387;
mac = 0.234;
x1 = -0.0059;
x2 = -0.1242;
xh = -0.2561;
xCG = 0.1509;
Iner = [0.36 0 0.0071
      0 1.36 0
      0.0071 0 0.46];
Ixxb = Iner(1,1);
Iyyb = Iner(2,2);
Izzb = Iner(3,3);
Ixzb = Iner(1,3);

% Aerodinamicos
dT = -1.7464;
eta = 1;
CL0 = 0.49;
CD0 = 0.06;
CM0 = 0.06;
CL_alpha = 3.94;
CD_alpha = 0.2180;
CM_alpha = -0.3846;
CL_def = -0.3538;
CD_def = -0.008;
CM_def = -0.3470;
CL_alpha_1 = 1.9108;
CL_alpha_2 = 1.7226;
CL_alpha_h = 0.3110;
% CD_q = -0.967254726639372;
% CL_q = 6.92457150620892;
% CM_q = -1.38513754053762;
CD_q = 0.0049;
CL_q = .0380;
```

```
CM_q = -0.0187;

% Acha def no instante
[~,instante] = min(abs(vet_temp-t));
def = u(:,instante);

%% Estados
% vet_estados =
% Vu Vw q xf zf theta
u   = y(1);
v   = 0;
w   = y(2);
p   = 0;
q   = y(3);
r   = 0;
phi = 0;
the = y(6);
psi = 0;

V = [u;v;w];
if u == 0
    alpha = 0;
else
    alpha = atan(w/u);
end
T = T_trim;

%% Forcas e momentos
V0=(u*u + v*v + w*w)^0.5;

CL = CL0 + CL_alpha*the + CL_def*def + CL_q*q;
CD = CD0 + CD_alpha*the + CD_def*def + CD_q*q;
CM = CM0 + CM_alpha*the + CM_def*def + CM_q*q;
rsv = 0.5*rho*S*V0^2;

F = [rsv*(CL*sin(alpha) - CD*cos(alpha)) * T*cos(alpha) - W*sin(the)
    0,...
    rsv*(-CL*cos(alpha) - CD*sin(alpha)) + W*cos(phi)*cos(the)];
M = [0 rsv*mac*CM + T*(z_cg-z_motor) 0];

%% Derivadas do vetor de estados
% Aceleracoes lineares
up = F(1)/m + r*v - q*w;
vp = 0;
wp = F(3)/m + q*u - p*v;
```

```

% Aceleracoes angulares
aang = (Iner^-1)*[
      M(1) + (Iyyb -Izzb)*q*r + Ixzb*p*q;
      M(2) + (Izzb -Ixxb)*p*r + Ixzb*(r^2-p^2);
      M(3) + (Ixxb -Iyyb)*p*q - Ixzb*q*r];
pp = 0;
qp = aang(2);
rp = 0;

% Velocidades em relacao ao solo
vf = [
     cos(the)*cos(psi), sin(phi)*sin(the)*cos(psi) - cos(phi)*sin(psi
        ), cos(phi)*sin(the)*cos(psi) + sin(phi)*sin(psi);
     cos(the)*sin(psi), sin(phi)*sin(the)*sin(psi) + cos(phi)*cos(psi
        ), cos(phi)*sin(the)*sin(psi) - sin(phi)*cos(psi);
    -sin(the), sin(phi)*cos(the), cos(phi)*cos(the)] * V;
xp = vf(1);
yp = 0;
zp = vf(3);

% Variacao dos angulos de Euler
dang = [1, sin(phi)*sin(the)/cos(the), cos(phi)*sin(the)/cos(the);
     0, cos(phi), -sin(phi);
     0, sin(phi)/cos(the), cos(phi)/cos(the)]*[p;q;r];
phip = 0;
thep = dang(2);
psip = 0;

% Resultado
yp = [up;wp;qp;xp;zp;thep];

end

function Vb = body(y, V)
% Essa funcao transforma um vetor da base fixa no solo em uma na
    base fixa
% no aviao (body), pode ser linha ou coluna.
% y eh o vetor de estados no instante, pode ser linha ou coluna,
    apenas
% importam os angulos de Euler
% V eh o vetor a ser transformado

[l,~] = size(V);
vet_col=false;
```

```
if l==3
    vet_col = true;
    V = V';
end
M = [cos(y(6)) *cos(0), cos(y(6)) * sin(0), -sin(y(6));
    sin(0) *sin(y(6)) *cos(0) - cos(0) *sin(0), sin(0) *sin(y(6)) *
        sin(0) + cos(0) *cos(0), sin(0) *cos(y(6));
    cos(0) *sin(y(6)) *cos(0) + sin(0) *sin(0), cos(0) *sin(y(6)) *
        sin(0) - sin(0) *cos(0), cos(0) *cos(y(6))];
Vb = (M*V')';
if vet_col
    Vb = Vb';
end
end
```

9.3 Comparação entre simulações não lineares e lineares

```
function compara
% Versao: Matlab 2020a
% Disciplina: PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinamicos
% Autores:
% Ives C. Vieira - 10355551
% Mauricio C. Leiman - 10772571
% Vitor Facchini - 10772605
% Yago N. Yang - 10772626

% Essa rotina permite simular a modelagem linear e a nao linear,
    comentando
% e descomentando as primeiras linhas, fazendo assim, a 'habilitacao
    ' e
% 'desativacao' de cada uma das condicoes: degrau, rampa e impulso.

% A modelagem esta descrita no relatorio entregue e esta rotina usa
% exatamente o mesmo equacionamento das duas anteriores, ela apenas
    nao
% plota graficos intermediarios.
close all

%% Valores

tempo_final = 16;
step = 0.005;
t = 0:step:tempo_final;
vet_temp = t;
```

```
n = length(t);
u = zeros(1,n);
% Degrau
% funcao_deflexao = 8;

% Rampa
% funcao_deflexao = zeros(1,n);
% trampa=2;
% funcao_deflexao = min(ones(1,n)*8,8*t);

% Impulso
funcao_deflexao = ones(1,n);
funcao_deflexao(1,100) = -8;

u(1,:) = deg2rad(funcao_deflexao); % = deflexao do prof durante a
    simulacao, mudar!

% Constantes
rho = 1.1062;
g = 9.81;
% Geometricos
m = 20;
W = m*g;
Iyy = 1.36;
z_motor = 0.4438;
z_cg = 0.4384;
S = 3.2;
Sh = 0.3387;
mac = 0.234;
x1 = -0.0059;
x2 = -0.1242;
xh = -0.2561;
xCG = 0.1509;

% Aerodinamicos
dT = -1.7464;
eta = 1;
CL0 = 0.49;
CD0 = 0.06;
CM0 = 0.06;
CL_alpha = 3.94;
CD_alpha = 0.2180;
CM_alpha = -0.3846;
CL_def = -0.3538;
CD_def = -0.008;
```

```
CM_def = -0.3470;
CL_alpha_1 = 1.9108;
CL_alpha_2 = 1.7226;
CL_alpha_h = 0.3110;

%% Condicao de trimagem
% Velocidade Inicial
V = 15.75;

% Chute Inicial
% alfa def T
x0 = [0;0;60];
rvs = 0.5*rho*V^2*S;

% Equacoes do Movimento
fun = @(x) [ (CL0+CL_alpha*x(1)+CL_def*x(2)) + x(3)*sin(x(1))/rvs -
    W/rvs;
     x(3)*cos(x(1)) - (CD0+CD_alpha*x(1)+CD_def*x(2));
     (CM0+CM_alpha*x(1)+CM_def*x(2)) - (z_motor-z_cg)*x(3)/(rvs*mac)
        ];

% Variaveis Trimadas
options = optimoptions('fsolve','Display','off');
y = fsolve(fun,x0,options);
alpha_trim = y(1); def_trim = y(2) ; T_trim = y(3);

% Estados no  sistema de eixos fixo no aviao
Vu = V*cos(alpha_trim);
Vv = 0;
Vw = V*sin(alpha_trim);
% vet_estados =
%           Vu Vw q xf  zf  theta
y_trim = [Vu Vw 0 0   0   alpha_trim]';

%% Derivadas de estabilidade
% Coeficientes aerodinamicos
CL = CL0 + CL_alpha*alpha_trim + CL_def*def_trim;
CD = CD0 + CD_alpha*alpha_trim + CD_def*def_trim;
CM = CM0 + CM_alpha*alpha_trim + CM_def*def_trim;

% Forca peso
Wf = [0  0 W];
Wb = body(y_trim,Wf);
Xg = Wb(1);
Zg = Wb(3);
```

```
% Derivadas
Fxu = -rho*S*V*CD + dT;
Fzu = -rho*S*V*CL;
Myu = rho*S*mac*V*CM + dT*(-z_motor+z_cg);
Fxw = 0.5*rho*S*V*(CL - CD_alpha);
Fzw = 0.5*rho*S*V*(-CD - CL_alpha);
Myw = 0.5*rho*S*V*mac*CM_alpha;
Fxq = 0;
Fzq = 0.5*rho*V*(S*x1*CL_alpha_1 + S*x2*CL_alpha_2 + eta*Sh*xh*
    CL_alpha_h);
Myq = -0.5*rho*V*(S*x1^2*CL_alpha_1 + S*x2^2*CL_alpha_2 + eta*Sh*xh
    ^2*CL_alpha_h);;
Fxd = -0.5*rho*S*V^2*CD_def;
Fzd = -0.5*rho*S*V^2*CL_def;
Myd =  0.5*rho*S*V^2*mac*CM_def;


%% Parametros
% Matrizes do Sistema
Inv = inv([W/g 0 0 0 0 0
    0 W/g 0 0 0 0
    0 0 Iyy 0 0 0
    0 0 0 1 0 0
    0 0 0 0 1 0
    0 0 0 0 0 1]);

A = [Fxu Fxw Fzq 0 0 -W*cos(alpha_trim)
Fzu Fzw Fzq+W*V/g 0 0 -W*sin(alpha_trim)
Myu Myw Myq 0 0 0
cos(alpha_trim) sin(alpha_trim) 0 0 0 -V*sin(alpha_trim)
-sin(alpha_trim) cos(alpha_trim) 0 0 0 -V*cos(alpha_trim)
0 0 1 0 0 0 ];

B = [Fxd
    Fzd
    Myd
    0
    0
    0];

A = Inv*A;
B = Inv*B;

% C = zeros(2,4);
```

```
% C(1,:) = rad2deg([0 1/V0 0 0]); C(2,:) = A(2,:)/g;
C = eye(6);
D = zeros(6,1);

% Parametros da Simulacao
y_0 = zeros(6,1);
def = rad2deg(u);

%% Solucao do sistema
% Solucao do Sistema por ODE
fun = @(t,x) odefun_linear(t,x,A,B,u,vet_temp);

[t_tot,y_tot] = ode45(fun, t, y_0);

% Plots
ulin=y_tot(:,1);
wlin=y_tot(:,2);
qlin=y_tot(:,3);
xlin=y_tot(:,4);
zlin=y_tot(:,5);
thelin=rad2deg(y_tot(:,6));
tlin=t_tot;


%% Solucao nao linear ----------------------------------------------------------
% ------------------------------------------------------------------------------------------
% ------------------------------------------------------------------------------------------
% ------------------------------------------------------------------------------------------
% ------------------------------------------------------------------------------------------

%% Valores
% Constantes
rho = 1.1062;
g = 9.81;

% Geometricos
```

```
m = 20;
W = m*g;
Iyy = 1.36;
z_motor = 0.4438;
z_cg = 0.4384;
S = 3.2;
Sh = 0.3387;
mac = 0.234;
x1 = -0.0059;
x2 = -0.1242;
xh = -0.2561;
xCG = 0.1509;

% Aerodinamicos
dT = -1.7464;
eta = 1;
CL0 = 0.49;
CD0 = 0.06;
CM0 = 0.06;
CL_alpha = 3.94;
CD_alpha = 0.2180;
CM_alpha = -0.3846;
CL_def = -0.3538;
CD_def = -0.008;
CM_def = -0.3470;
CL_alpha_1 = 1.9108;
CL_alpha_2 = 1.7226;
CL_alpha_h = 0.3110;

%% Condicao de trimagem
% Velocidade Inicial
V = 15.75;

% Chute Inicial
% alfa def T
x0 = [0;0;60];
rvs = 0.5*rho*V^2*S;

% Equacoes do Movimento
fun2 = @(x) [ (CL0+CL_alpha*x(1)+CL_def*x(2)) + x(3)*sin(x(1))/rvs
    - W/rvs;
     x(3)*cos(x(1)) - (CD0+CD_alpha*x(1)+CD_def*x(2));
     (CM0+CM_alpha*x(1)+CM_def*x(2)) - (z_motor-z_cg)*x(3)/(rvs*mac)
        ];

```

```
% Variaveis Trimadas
options = optimoptions('fsolve','Display','off');
y = fsolve(fun2,x0,options);
alpha_trim = y(1);
def_trim = y(2) ;
T_trim = y(3);

% Estados no  sistema de eixos fixo no aviao
Vu = V*cos(alpha_trim);
Vv = 0;
Vw = V*sin(alpha_trim);
% vet_estados =
%           Vu Vw q xf zf theta
y_trim = [Vu Vw 0 0  0  alpha_trim]';

% Parametros da Simulacao
u(1,:) = def_trim  + deg2rad(funcao_deflexao); % = def do prof
    durante a simulacao, mudar!

y_0 = y_trim;
def =  rad2deg(u);

%% Solucao do sistema
% Solucao do Sistema por ODE
fun2 = @(t,y) odefun_nlinear(t, y, u, vet_temp, T_trim);

[t_tot,y_tot] = ode45(fun2, t, y_0);

% Plots
unl=y_tot(:,1);
wnl=y_tot(:,2);
qnl=y_tot(:,3);
xnl=y_tot(:,4);
znl=y_tot(:,5);
thenl=rad2deg(y_tot(:,6));
tnl=t_tot;

figure
subplot(2,1,1)
plot(tlin,ulin,tnl,unl-y_0(1),'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('u [m/s]')
legend('Linear','Nao linear')
grid on
subplot(2,1,2)
```

```
plot(tlin,wlin,tnl,wnl-y_0(2),'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('w [m/s]')
grid on
legend('Linear','Nao linear')


figure
subplot(2,1,1)
plot(tlin,thelin,tnl,thenl-thenl(1),'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('\theta [graus]')
legend('Linear','Nao linear')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(tlin,qlin,tnl,qnl-y_0(3),'LineWidth',2)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('q [graus/s]')
legend('Linear','Nao linear')
grid on

end

function yp = odefun_nlinear(t,y,u,vet_temp,T_trim)
%% Valores
% Constantes
rho = 1.1062;
g = 9.81;

% Geometricos
m = 20;
W = m*g;
z_motor = 0.4438;
z_cg = 0.4384;
S = 3.2;
Sh = 0.3387;
mac = 0.234;
x1 = -0.0059;
x2 = -0.1242;
xh = -0.2561;
xCG = 0.1509;
Iner = [0.36 0 0.0071
     0 1.36 0
     0.0071 0 0.46];
Ixxb = Iner(1,1);
```

```
Iyyb = Iner(2,2);
Izzb = Iner(3,3);
Ixzb = Iner(1,3);

% Aerodinamicos
dT = -1.7464;
eta = 1;
CL0 = 0.49;
CD0 = 0.06;
CM0 = 0.06;
CL_alpha = 3.94;
CD_alpha = 0.2180;
CM_alpha = -0.3846;
CL_def = -0.3538;
CD_def = -0.008;
CM_def = -0.3470;
CL_alpha_1 = 1.9108;
CL_alpha_2 = 1.7226;
CL_alpha_h = 0.3110;
CD_q = 0.0049;
CL_q = .0380;
CM_q = -0.0187;

% Acha def no instante
[~,instante] = min(abs(vet_temp-t));
def = u(:,instante);

%% Estados
% vet_estados =
% Vu Vw q xf zf theta
u   = y(1);
v   = 0;
w   = y(2);
p   = 0;
q   = y(3);
r   = 0;
phi = 0;
the = y(6);
psi = 0;

V = [u;v;w];
if u == 0
    alpha = 0;
else
    alpha = atan(w/u);
```

```
end
T = T_trim;

%% Forcas e momentos
V0=(u*u + v*v + w*w)^0.5;

CL = CL0 + CL_alpha*the + CL_def*def + CL_q*q;
CD = CD0 + CD_alpha*the + CD_def*def + CD_q*q;
CM = CM0 + CM_alpha*the + CM_def*def + CM_q*q;
rsv = 0.5*rho*S*V0^2;

F = [rsv*(CL*sin(alpha) - CD*cos(alpha)) * T*cos(alpha) - W*sin(the)
    0,...
    rsv*(-CL*cos(alpha) - CD*sin(alpha)) + W*cos(phi)*cos(the)];
M = [0 rsv*mac*CM + T*(z_cg-z_motor) 0];

%% Derivadas do vetor de estados
% Aceleracoes lineares
up = F(1)/m + r*v - q*w;
vp = 0;
wp = F(3)/m + q*u - p*v;

% Aceleracoes angulares
aang = (Iner^-1)*[
      M(1) + (Iyyb -Izzb)*q*r + Ixzb*p*q;
      M(2) + (Izzb -Ixxb)*p*r + Ixzb*(r^2-p^2);
      M(3) + (Ixxb -Iyyb)*p*q - Ixzb*q*r];
pp = 0;
qp = aang(2);
rp = 0;

% Velocidades em relacao ao solo
vf = [
    cos(the)*cos(psi), sin(phi)*sin(the)*cos(psi) - cos(phi)*sin(psi
       ), cos(phi)*sin(the)*cos(psi) + sin(phi)*sin(psi);
    cos(the)*sin(psi), sin(phi)*sin(the)*sin(psi) + cos(phi)*cos(psi
       ), cos(phi)*sin(the)*sin(psi) - sin(phi)*cos(psi);
   -sin(the), sin(phi)*cos(the), cos(phi)*cos(the)] * V;
xp = vf(1);
yp = 0;
zp = vf(3);

% Variacao dos angulos de Euler
dang = [1, sin(phi)*sin(the)/cos(the), cos(phi)*sin(the)/cos(the);
    0, cos(phi), -sin(phi);
```

```
     0, sin(phi)/cos(the), cos(phi)/cos(the)]*[p;q;r];
phip = 0;
thep = dang(2);
psip = 0;

% Resultado
yp = [up;wp;qp;xp;zp;thep];

end

function x_ponto = odefun_linear(t,x,A,B,u,vet_temp)
[~,instante] = min(abs(vet_temp-t));
u_t = u(:,instante);
x_ponto = A*x + B*u_t;
end

function Vb = body(y, V)
% Essa funcao transforma um vetor da base fixa no solo em uma na
    base fixa
% no aviao (body), pode ser linha ou coluna.
% y eh o vetor de estados no instante, pode ser linha ou coluna,
    apenas
% importam os angulos de Euler
% V eh o vetor a ser transformado

[l,~] = size(V);
vet_col=false;
if l==3
    vet_col = true;
    V = V';
end
M = [cos(y(6)) *cos(0), cos(y(6)) * sin(0), -sin(y(6));
    sin(0) *sin(y(6)) *cos(0) - cos(0) *sin(0), sin(0) *sin(y(6)) *
        sin(0) + cos(0) *cos(0), sin(0) *cos(y(6));
    cos(0) *sin(y(6)) *cos(0) + sin(0) *sin(0), cos(0) *sin(y(6)) *
        sin(0) - sin(0) *cos(0), cos(0) *cos(y(6))];
Vb = (M*V')';
if vet_col
    Vb = Vb';
end
end
```

Referências Bibliográficas

[1] W. F. Phillips, *Mechanics of Flight.* John Wiley Sons, 2004.

[2] M. V. Cook, *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control.* Butterworth-Heinemann, 2012.

[3] J. E. Cooper, *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads.*

[4] J. D. Anderson, *Aircraft performance and design*, vol. 1. WCB/McGraw-Hill Boston, MA, 1999.

[5] D. E. Hoak, *The USAF Stability and Control DATCOM.* Air Force Wright Aeronautical Laboratories, 1960 (Revisado em 1978).