

**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

JOÃO PAULO S. FLORES N°USP: 10773892

JOSÉ ARTHUR S. GUERRERO N°USP: 10791767

SAMUEL ALVES DA S. JUNIOR N°USP: 10769639

WALLACE MOREIRA E SILVA N°USP: 10823772

**PME 3380 - MODELAGEM DE SISTEMAS DINÂMICOS**

(MODELAGEM DE UM QUADRICÓPTERO)

**Professor: Agenor de Toledo Fleury**

**Décio Crisol Donha**

**SÃO PAULO, SP**

**2020**

**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**PME 3380 - MODELAGEM DE SISTEMAS DINÂMICOS**

**(MODELAGEM DE UM QUADRICÓPTERO)**

Trabalho referente ao curso de Modelagem de Sistemas  
Dinâmicos (PME 3380) orientado pelos professores  
Décio Crisol Donha e Agenor de Toledo Fleury

**SÃO PAULO, SP**

**2020**

# SUMÁRIO

<b>RESUMO</b>	<b>4</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>5</b>
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>10</b>
<b>3. OBJETIVO</b>	<b>10</b>
<b>4. METODOLOGIA</b>	<b>11</b>
4.1. HIPÓTESES ADOTADAS	11
<b>5. MODELAGEM</b>	<b>12</b>
5.1. MODELO FÍSICO	12
5.2. ANÁLISE CINEMÁTICA	14
5.3. DINÂMICA DO SISTEMA	16
5.4. SIMPLIFICAÇÃO	20
5.5. ESPAÇO DE ESTADOS	21
<b>6. ANÁLISES</b>	<b>24</b>
6.1 PARÂMETROS	25
6.2 ANÁLISE SEM PERTURBAÇÃO	27
6.2.1 FORÇA MÁXIMA E SEM AÇÃO DE TORQUE	27
6.2.2 FORÇA DE SUSTENTAÇÃO E SEM AÇÃO DE TORQUE	28
6.2.3 FORÇA DE SUSTENTAÇÃO COM AÇÃO DO ÂNGULO .	29
6.2.4 FORÇA MÁXIMA E AÇÃO DO TORQUE EM	31
6.3 ANÁLISE COM ARRASTO	32
6.3.1 AÇÃO DO ARRASTO E FORÇA MÁXIMA	32
7. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	<b>34</b>
7.1 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA SEM ARRASTO.	35
7.2 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA COM ARRASTO.	37
<b>8. POLOS</b>	<b>39</b>
<b>9. DIAGRAMA DE BODE</b>	<b>40</b>
9.1. SEM ARRASTO	40
9.1.1. ANÁLISE 1	40
9.1.2. ANÁLISE 2	41
9.1.3. ANÁLISE 3	41
9.2. COM ARRASTO	42
9.2.1. ANÁLISE 1	42
9.2.2. ANÁLISE 2	43
9.2.3. ANÁLISE 3	43
9.2.4. ANÁLISE 4	44
9.2.4. ANÁLISE 5	45
<b>10. CONCLUSÃO</b>	<b>46</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>47</b>

# RESUMO

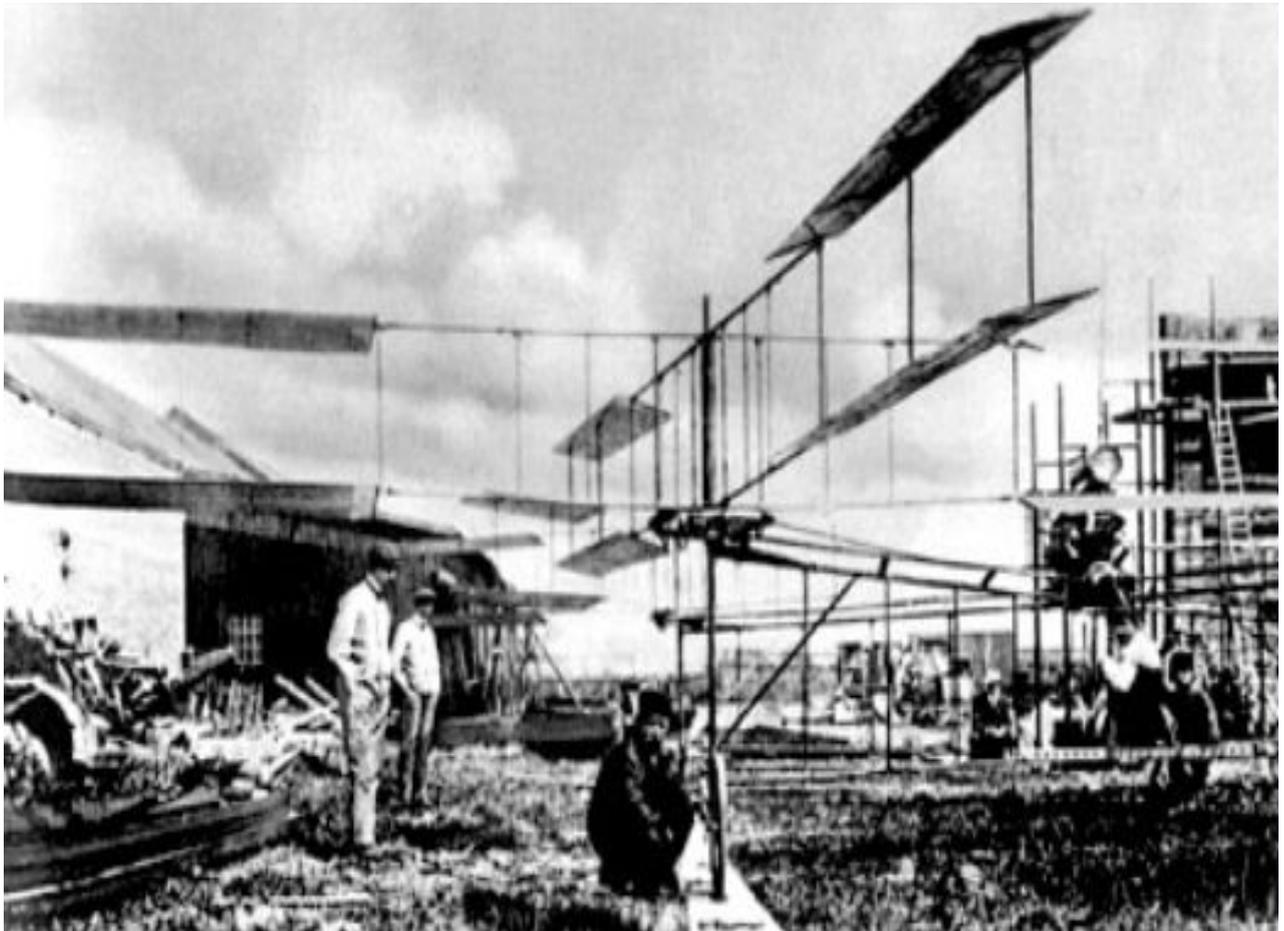
O intuito deste trabalho referente ao curso de Modelagem de Sistemas Dinâmicos (PME 3380) será a modelagem de um quadricóptero que possui 6 graus de liberdade tendo a possibilidade de transladar e rotacionar. Perpassando os texto e análises retratadas ao longo desta tarefa será possível verificar o modelo físico tridimensional do sistema, sua análise cinemática e dinâmica, os quais consideraram em seu desenvolvimento e elaboração algumas hipóteses simplificadoras. Por fim o modelo será submetido a duas condições, sendo a primeira sem perturbação ou interferência do meio e a posteriormente com a presença do arrasto, para verificar os distintos comportamentos que o mesmo irá demonstrar. Cabe salientar que é utilizado o software computacional Scilab para todos os testes e averiguações no quadricóptero.

**Palavras Chaves:** quadricoptero - análise - força - motores - eixo - matriz

# 1. INTRODUÇÃO

Os quadricópteros são aeronaves impulsionadas por 4 rotores, cujo formato mais comum é com as 4 hélices dispostas em formato de cruz que geram um empuxo devido ao movimento das mesmas pelo ar. Os primeiros registros desse tipo de aeronave datam do início do século 20 quando em 1907 o Gyroplane No.1 fez seu primeiro voo, este foi um quadrotor desenvolvido pelos irmãos Jacques Breguet e Louis Charles Breguet com auxílio do professor Charles Richet porém sendo um protótipo pioneiro na área dos quadricópteros o Gyroplane No.1 tinha inúmeras limitações, primeiramente a aeronave necessitava do auxílio de um operador em cada ponta dos seus braços para manter controle da aeronave, e sua dificuldade de alçar voo, em 19 de setembro de 1907 o Gyroplane No.1 chegou a apenas 0,6m de altura de voo, em condições mais favoráveis em 29 de setembro do mesmo ano ele chegou a 1,50m de altura, desta forma podemos dizer que o Gyroplane No.1 apesar de pioneiro não pode ser declarado como o primeiro quadricópteros funcional da história da aviação.

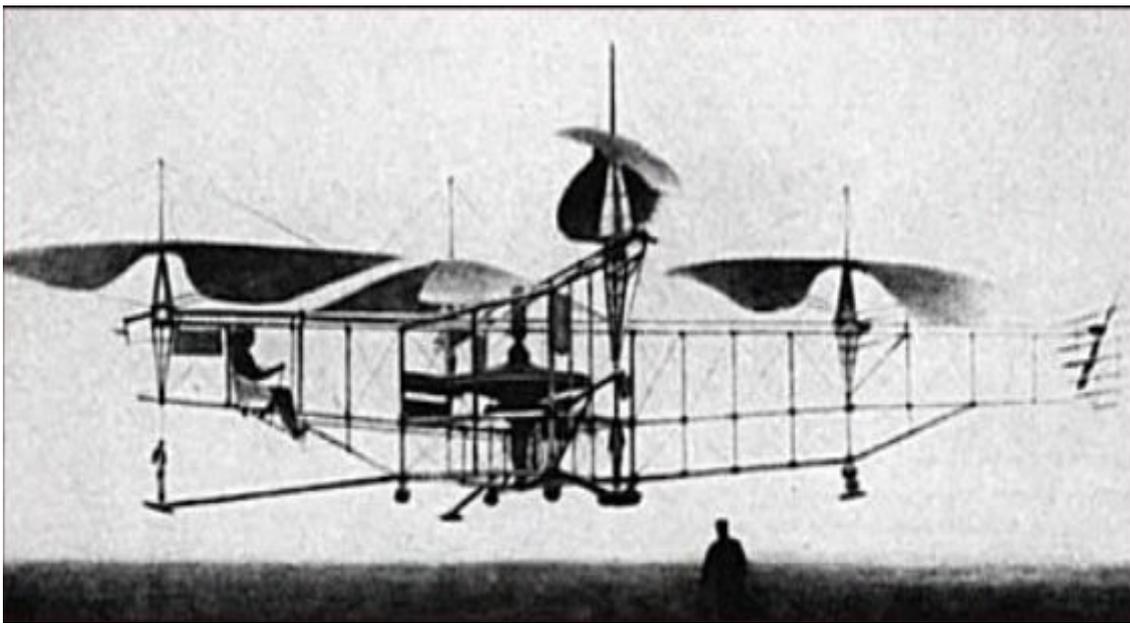
Figura 1 - Gyroplane No.1.



(Fonte: [http://www.aviastar.org/helicopters\\_eng/breguet\\_gyro.php](http://www.aviastar.org/helicopters_eng/breguet_gyro.php) )

A ideia de um veículo aéreo do tipo multirotor voltou a ser explorada nos anos 20 quando Étienne Edmond Oehmichen, um engenheiro francês da empresa automobilística Peugeot começou a explorar a ideia de um veículo aéreo capaz de decolar de maneira vertical, sua primeira criação mostrou-se incapaz de alçar voo inicialmente, porém sua segunda tentativa trouxe a troca do motor original de 25hp pelo motor Le Rhône rotativo muito comum entre as aeronaves utilizadas durante a primeira guerra mundial, este motor produzia 120hp aumentando assim dramaticamente o empuxo máximo, tornando assim possível a decolagem, seu primeiro voo foi em 11 novembro de 1922, tornando-se a primeira instância de uma decolagem vertical sem assistência ou dependência de operadores posicionados em terra firme, e em 1924 o Oemichen No. 2 tornou-se o primeiro veículo do seu tipo a completar um circuito de 1 km.

Figura 2 - Oemichen No. 2.



(Fonte: <https://bityli.com/qRjMP>)

Figura 3 - Motor Le Rhône 9Jb 120hp.

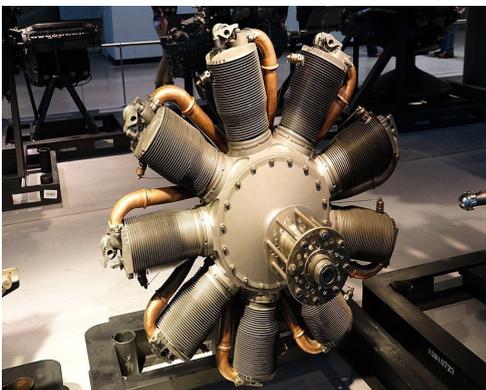


Figura 3: (Fonte: <https://bityli.com/48qR4> ; )

Figura 4 - Bristol M.1C com motor Le Rhône.



Figura 4: (Fonte: <https://bityli.com/QPfji>)

Outra grande inovação que se torna fundamental para o entendimento do atual posicionamento dos quadricópteros estudados neste trabalho, foi a criação de veículos aéreos não tripulados, apesar de sua história começar nos balões explosivos utilizados pelo exército austríaco no ataque a cidade de Veneza em 1849, estes eram dependentes em grande parte no vento para que fossem carregados corretamente em direção ao alvo, tendo desta forma um alto nível de imprecisão.

A partir de outros relatos históricos é possível dizer que o voo controlado não tripulado tem suas origens em 1916, durante a primeira guerra mundial, quando o Ruston Proctor Aerial Target alçou voo sendo controlado por um sistema de rádio, Hewitt-Sperry Automatic Airplane também teve seu primeiro voo nessa época, não existem registros da data exata de seu primeiro voo, este era controlado por um sistema de giroscópios.

Figura 5 - Ruston Proctor Aerial Target.



(Fonte: <https://bityli.com/wCRAn>)

Figura 6 - Hewitt-Sperry Automatic Airplane.



(Fonte: <https://bityli.com/iqTkH>)

Com o final da primeira guerra, a redução do investimento em aviação militar e em veículos não tripulados foi reduzido, porém assim como o estado de paz na Europa não foi duradouro o período de estagnação da tecnologia dos Vants também foi curto, durante a segunda guerra o desenvolvimento de veículos não tripulados aéreos foi acelerado, o mais famoso exemplo dessa tecnologia de guerra foi o Vergeltungswaffe 1, chamado na época de “ bomba voadora” V-1 desenvolvida pela Alemanha esse se tornou o primeiro míssil guiado da história, durante a guerra mais de 8000 mísseis V-1 foram lançados contra Londres, sendo assim uma das mais efetivas armas de guerra da época, o sistema de navegação da mesma foi desenvolvido pela Askania Werke AG e consistia na utilização de giroscópios, bússolas magnéticas e barômetros para garantir a rota da mesma.

Figura 7 - Vergeltungswaffe 1.



(Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/V-1\\_flying\\_bomb](https://en.wikipedia.org/wiki/V-1_flying_bomb))

Mesmo com o final da segunda guerra os avanços tecnológicos na área de voo de veículos não tripulados continuaram a acontecer em decorrência, principalmente do avanço das tensões entre os estados unidos da américa e a união das repúblicas socialistas soviéticas, um dos mais importantes personagens no avanço das tecnologias de veículos não tripulados é Abraham Karem, responsável por alguns dos mais importantes VANTS do final da Guerra fria até os dias de hoje.

Com os avanços militares dos VANTS e a popularização da tecnologia observamos uma mudança do mercado, com a tecnologia sendo cada vez mais implementada a aplicações civis que vão desde monitoramento de segurança, auxílio para lavoura, transporte de objetos, vídeo e cinematografia, assim como lazer, o primeiro quadricóptero não tripulado a despertar a imaginação e a aceitação do mercado civil foi o Parrot AR Drone, produzido pela empresa francesa Parrot, lançado em 2010, foi um enorme sucesso de vendas e popularizou a revolução do uso de equipamentos do gênero em aplicações não militares, sendo em parte responsável pela aceitação do público as novas ideias que se utilizam da tecnologia que levou a pizzaria domino's a se tornar a primeira empresa a fazer uma entrega deste porte por meio de um veículo aéreo não tripulado, mostrando que tal tecnologia está se tornando cada vez mais presente no cotidiano civil.

Figura 8 - Parrot AR Drone.



(Fonte: <http://the-parrot-ardrone.com/ar-drone-official-apps/>)

Tendo em vista a evolução histórica do conceito do quadricóptero assim como os avanços dos veículos aéreos não tripulados, e a crescente interação entre estes os dois grupos de veículos na constituição dos produtos disponíveis no mercado atualmente assim como sua crescente importância no cotidiano civil e militar levou ao estudo e análise de um destes sistemas como o foto do atual trabalho, que por meio das simulações baseadas nos princípios de modelagem, busca entender e exemplificar o funcionamento de um quadricóptero não tripulado quanto aos movimentos relativos ao seu deslocamento no plano XY.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para o presente trabalho foram analisados vários artigos e trabalhos científicos relacionados à temática explorada buscando um maior aprofundamento nos temas referentes à modelagem de sistemas de veículos do tipo quadricópteros.

Foi feita um estudo da história dos VANTS e dos quadricópteros para se compreender as diversas dificuldades relacionadas ao funcionamento destes veículos e o processo de modelagem dos mesmos, alguns dos trabalhos que foram analisados nesta parte, como o Pessoa(2019), que apresentam uma visão geral sobre a história de ambos os temas, assim como artigos mais focados em apenas um dos mesmo como Buzzo(2015) e Martinez(2018).

Para a modelagem do sistema foram tomados como base os trabalhos Luukkonen(2011), em que foi adotado um sistema de coordenadas solidário ao quadricóptero e a partir disso foram obtidas as equações que regem os movimentos do VANT, levando em consideração sua massa e outros parâmetros considerados relevantes para a análise.

Foram analisados trabalhos como Bouabdallah(2007), Dremel(2008) e Rodrigues(2014), pela sua representação das forças atuantes num sistema, assim como suas componentes mais complexas e como a correta modelagem das mesmas acrescenta ao trabalho de simulação do sistema procurando a respostas mais condizentes com a realidade da qual o sistema estará inserido.

## 3. OBJETIVO

O intuito deste trabalho será apresentar uma modelagem dinâmica do quadricóptero, apresentando toda descrição do sistema referencial a ser adotado, sua cinemática e o conjunto de equações que regem seu movimento; para tanto dado a complexidade desta modelagem serão consideradas algumas hipóteses e simplificações; ademais será aplicado o uso de simulações computacionais para ilustrar o comportamento deste quadrirotor em uma série de cenários com o intuito de exemplificar e analisar seu comportamento. O trabalho é baseado na movimentação do quadrirotor no plano XZ tendo assim movimentação nula no eixo Y, porém com variação no ângulo  $\theta$ , também chamado na aviação como ângulo de arfagem, assim permitindo a movimentação no mesmo no plano citado.

## 4. METODOLOGIA

A pretensão deste relatório é modelar o movimento de um quadrirotor a partir das análises estática e dinâmica do modelo físico, buscando um sistema de equações e relacionando-as com base em um referencial inercial e outro solidário ao corpo. Com isso deseja-se definir as entradas e saídas do sistema além de influências externas como o arrasto, com o objetivo de complementar o modelo.

Ademais o modelo matemático necessita de simplificações para facilitar a análise e simulação, essas se deram por meio da expansão das equações por séries de Taylor de primeira ordem em torno do ponto de equilíbrio do sistema. Após isso o modelo foi organizado em espaço de estados e representado por uma equação matricial, concluindo a modelagem e seguindo para as simulações computacionais e análises dos resultados.

### 4.1. HIPÓTESES ADOTADAS

Para examinar o problema posto do quadrirotor, algumas hipóteses simplificadoras serão adotadas a fim de representar o modelo sem recair em todas as complexidades que o mesmo pode ter. As hipóteses admitidas para as análises foram:

- Efeito solo desprezado
- Força de arrasto será contrária ao movimento
- Quadricóptero é simétrico
- Área do quadrirotor constante
- A vibração dos motores é desprezada
- Sem escorregamento entre as hélices e o rotor do motor
- Variação do ângulo de arfagem pequena
- 4 motores idênticos

## 5. MODELAGEM

### 5.1. MODELO FÍSICO

Para a construção de um modelo físico representativo de um drone do tipo quadricóptero foi criado um corpo central onde os sistemas de controle e de fornecimento de energia irão residir, assim como os braços pelos quais acontece o cabeamento necessário para instalação dos motores que estarão presentes nas pontas dos mesmos, desta forma chegamos a estrutura final da figura 9.

Figura 9 - Cad do quadricóptero



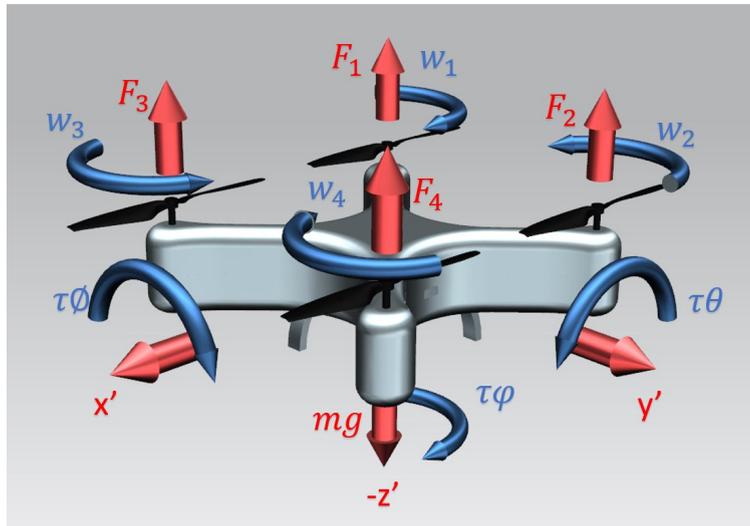
(Fonte: Autoria própria)

Uma vez que o projeto básico foi definido, a atenção passa a ser a definição de todas as forças atuantes no sistema, e seus diferentes graus de liberdade para que com isso pudesse haver uma compreensão física mais detalhada do sistema que possibilitasse a formulação de um modelo matemático mais acurado para descrever o comportamento do quadricóptero tendo como resultado esperado a validação da modelagem proposta.

Para tanto utilizou-se das ferramentas computacionais do software CAD para representar as rotações de cada uma das hélices, assim como a força de “lift” relativas a cada uma das hélices, definindo também o sistema de coordenadas solidário ao corpo exemplificado pelos eixos  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ , assim como a rotação nestes respectivos eixos, como verifica-se na figura 10.

Ademais observa-se que na representação tridimensional colocou-se no eixo  $k$  a representação da força peso assim como as 4 forças geradas pelos motores. Cabe salientar que o eixo  $k$  da imagem aponta para baixo com o intuito de manter a imagem o menos poluída possível, uma vez que a presença do mesmo em cima do quadricóptero causaria confusão com as forças  $F$ .

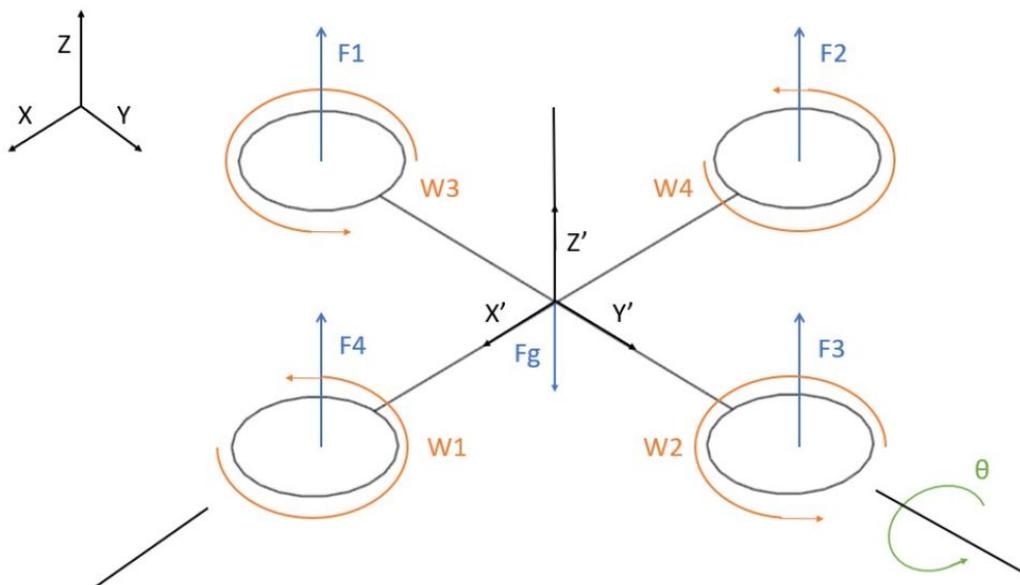
Figura 10 - Diagrama do quadricóptero



(Fonte: Autoria própria)

Por fim, definiu-se também uma versão simplificada do problema através de um Diagrama de Corpo Livre com intuito de representar de maneira mais clara os esforços solicitantes no quadricóptero, como verifica-se na figura 11.

Figura 11 - DCL do quadricóptero



(Fonte: Autoria própria)

## 5.2. ANÁLISE CINEMÁTICA

Analisando o diagrama de corpo livre de um quadricóptero retratado pela figura 10, chega-se nos seis graus de liberdade necessários para a representação do sistema. Esses se dividem em três para o movimento de translação nos eixos  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  e outros três para o movimento de rotação em cada um dos eixos. Para melhor estudo do problema, foram estabelecidos um referencial inercial e um referencial solidário ao corpo relacionados da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (1)$$

Por conseguinte, foi definida a matriz de transformação de base que se utiliza dos 3 ângulos de Euler  $(\varphi, \theta, \psi)$  para descrever a rotação geral no espaço Euclidiano tridimensional. Para os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  verifica-se respectivamente as seguintes matrizes de rotação.

$$R(x_B, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R(y_B, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$R(z_B, \psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Realizando o produto entre as matrizes de rotação obtidas anteriormente obtém-se a matriz de rotação que definirá a orientação relativa do sistema de coordenadas fixo ao corpo rígido em relação ao sistema de coordenadas inicial.

$$R_T = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\theta\sin\psi & \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\sin\theta\sin\psi & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

E com isso é possível definir tanto a relação entre as velocidades lineares do quadricóptero entre os distintos referências.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = R_T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (6)$$

Para obter a equação cinemática rotacional do sistema, relacionou-se as velocidades angulares do corpo rígido em relação ao referencial solidário  $(p, q, r)$  e com relação ao inercial  $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ , como verifica-se abaixo.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (R(x_B, \varphi)')^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + ((R(y_B, \theta)')^{-1}(R(x_B, \varphi)')^{-1}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varphi\tan\theta & \cos\varphi\tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi\sec\theta & \cos\varphi\sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dessa forma o estabelecimento dos referenciais facilita a análise do sistema, de modo que ambos serão utilizados para montagem do sistema e simulação, buscando uma análise completa do problema.

### 5.3. DINÂMICA DO SISTEMA

Como foi dito na construção do modelo físico, o quadricóptero a ser modelado sofrerá com a força gravitacional e a força de arrasto aerodinâmico, a força gravitacional é solidário ao referencial estacionário e terá sua atuação no eixo Z apenas, a Força de arrasto aerodinâmico é análogo a velocidade do ar que passa pelo quadricóptero, em condições sem vento isso garante que a força será contrária ao movimento do sistema, enquanto o em casos de vento mais forte o arrasto aerodinâmico pode auxiliar ou até impossibilitar certas movimentações, isso será explorado com mais a fundo durante o processo de simulação dos próximos capítulos, a representação vetorial das forças é apresentado a seguir.

$$F_g = (0, 0, -f_g) \mapsto f_g = mg \quad (8)$$

$$F_{arr} = (F_{arr,x} ; F_{arr,y} ; F_{arr,z}) \quad (9)$$

No caso da força de arrasto aerodinâmico estaremos utilizando a nomenclatura  $F_{arr}$ , onde  $arr$  vem da palavra para arrasto, o arrasto aerodinâmico para todos os eixos é calculado da mesma forma, que será apresentada a seguir.

$$F_{arr,i} = \frac{1}{2} C_D \rho A V_i^2 \quad (10)$$

Onde  $\rho$  representa a densidade do meio, que no caso será constante para todas as direções,  $C_D$  representa o coeficiente de arrasto, mais uma vez se utilizando da nomenclatura em inglês,  $A$  representa a área frontal, dado a simetria do quadricóptero teremos uma área frontal igual no caso momento de repouso para os eixos X e Y, mas teremos uma área frontal consideravelmente diferente no eixo Z, vale lembrar também que a área frontal é variável no caso do movimento do drone, uma vez que a angulação do mesmo para a movimentação pode causar alteração da área frontal, e  $V_i$  representa a velocidade do ar na coordenada do sistema.

A força responsável pela movimentação do quadricóptero provém da propulsão gerada pelos motores, os motores irão gerar o impulso apenas na vertical, o empuxo de cada um dos motores juntos formam a propulsão total do quadricóptero.

$$F_i = (0, 0, F_i) \quad (11)$$

A força máxima do sistema é calculada por  $F_i = C_e \cdot \frac{4\rho r_h^4}{\pi^2} \Omega^2$ , onde  $r_h$  é o raio da hélice,  $C_e$  é o coeficiente de empuxo, e  $\Omega$  é a rotação da hélice, tomando os valores para quando  $F_i$  é máximo, temos a máxima rotação do motor como 1382,3 rad/s, raio da hélice em 0,0806 m e  $C_e = 0,21034$ , assim temos que a força máxima do conjunto de motores é 8,27731 N.

Assim pelo teorema do movimento do baricentro verifica-se a relação entre as acelerações nos 3 eixos do referencial inercial as quais estão intrinsecamente inter-relacionadas com as forças atuantes no sistema.

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_g \end{bmatrix} + [R_T] \frac{1}{M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_i \end{bmatrix} + \frac{1}{M} \begin{bmatrix} F_{arr,x} \\ F_{arr,y} \\ F_{arr,z} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Adotando o referencial solidário ao corpo, é possível representar a dinâmica do sistema através das seguintes equações de equilíbrio do corpo rígido:

$$\sum F = M(\dot{V} + \vec{\Omega} \times \vec{V}) \quad (13)$$

$$\sum T = I\dot{\Omega} + \vec{\Omega} + I\vec{\Omega} \quad (14)$$

Utilizando-se dessas equações supracitadas defini-se as matrizes de velocidade linear  $V$ , velocidade angular  $\Omega$ , que irão corresponder ao deslocamento do quadrirotor ao longo do tempo, conforme as seguintes matrizes;

$$V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (16)$$

Ademais, é possível representar as matrizes correspondentes às forças principais que atuarão no sistema, sendo a força de empuxo das hélices, a força gravitacional e a força de arrasto, conforme demonstrado nas matrizes subsequentes.

$$F = \begin{bmatrix} -Mg\sin\theta - F_{arr,x} \\ Mg\sin\varphi\cos\theta - F_{arr,y} \\ -Mg\cos\varphi\cos\theta - F_{arr,z} + U \end{bmatrix} \quad (17)$$

Por conseguinte, determinasse as matrizes de Torque e Momento de Inércia às quais são incluídas para possibilitar uma compreensão total do problema em questão, e possibilitar observações mais precisas do comportamento do quadrirotor.

$$T = \begin{bmatrix} T_\varphi \\ T_\theta \\ T_\psi \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (18),(19)$$

Realiza-se posteriormente uma verificação do equilíbrio de forças do sistema, de forma a sistematizar um equacionamento matricial o qual expresse a dinâmica translacional do sistema.

$$\sum F = M(\dot{V} + \vec{\Omega} \times \vec{V}) \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} -Mg \sin \theta - F_{arr,x} \\ +Mg \sin \varphi \cos \theta - F_{arr,y} \\ -Mg \cos \varphi \cos \theta + F - F_{arr,z} \end{bmatrix} = M \left( \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right) \quad (21)$$

De maneira homóloga efetua-se um equilíbrio de momentos correlacionando a matriz de torques com a dos momentos de inércia.

$$\sum T = I\dot{\Omega} + \vec{\Omega} \times I\vec{\Omega} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} T_\varphi \\ T_\theta \\ T_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) \quad (23)$$

A partir dos equacionamentos previamente desenvolvidos é possível determinar as equações diferenciais que regem o movimento do quadricóptero com orientação estabelecida por um referencial inercial.

$$\dot{x} = u(\cos\psi \cos\theta) + v(\cos\theta \sin\varphi) - w(\sin\theta) \quad (24)$$

$$\dot{y} = u(\sin\varphi \sin\theta \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi) + v(\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\theta \sin\psi) + w(\sin\varphi \cos\theta) \quad (25)$$

$$\dot{z} = u(\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \sin\theta \cos\varphi) + v(\sin\psi \cos\varphi \sin\theta - \cos\psi \sin\varphi) + w(\cos\theta \cos\varphi) \quad (26)$$

$$\dot{u} = -\frac{1}{M}\rho AC_d u^2 - g \sin\theta + (rv - qw) \quad (27)$$

$$\dot{v} = \frac{-1}{M}\rho AC_d v^2 + g \sin\varphi \cos\theta + (pw - ru) \quad (28)$$

$$\dot{w} = \frac{-1}{M}\rho AC_d w^2 + g \cos\varphi \cos\theta + \frac{F}{M} + (qu - pv) \quad (29)$$

$$\dot{\varphi} = p + (q \sin\varphi + r \cos\varphi) \tan\theta \quad (30)$$

$$\dot{\theta} = q \cos\varphi - r \sin\varphi \quad (31)$$

$$\dot{\psi} = (q \sin\varphi + r \cos\varphi) \sec\theta \quad (32)$$

$$\dot{p} = \frac{T_\varphi}{I_{xx}} + \frac{qr(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} \quad (33)$$

$$\dot{q} = \frac{T_\theta}{I_{yy}} + \frac{qr(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} \quad (34)$$

$$\dot{r} = \frac{T_\psi}{I_{zz}} + \frac{qr(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} \quad (35)$$

## 5.4. SIMPLIFICAÇÃO

A partir dos equacionamentos desenvolvidos anteriormente, é possível analisar o problema utilizando-se de simplificações trigonométricas admitindo que os ângulos de arfagem, rolagem e guinada são pequenos. Isto posto é possível sistematizar de forma mais compendiada as equações que definem a cinemática e dinâmica tanto translacional como rotacional.

Tabela 1: Equações simplificadas

<b>CINEMÁTICA TRANSLACIONAL</b>
$\begin{cases} \dot{x} = u + \psi v - \theta w = U_1 \\ \dot{y} = (\psi + \varphi\theta)u + (1 + \psi\theta\varphi)v + \varphi w = U_2 \\ \dot{z} = (\psi\varphi + \theta)u + (-\varphi + \theta\psi)v + w = U_3 \end{cases}$
<b>DINÂMICA TRANSLACIONAL</b>
$\begin{cases} \dot{u} = \frac{-1}{M}\rho AC_d u^2 - g\theta + (rv - qw) = U_4 \\ \dot{v} = \frac{-1}{M}\rho AC_d v^2 + g\varphi + (pw - ru) = U_5 \\ \dot{w} = \frac{-1}{M}\rho AC_d w^2 + g + \frac{F}{M} + (qu - pv) = U_6 \end{cases}$
<b>CINEMÁTICA ROTACIONAL</b>
$\begin{cases} \dot{\varphi} = p + (q\varphi + r)\theta = U_7 \\ \dot{\theta} = q - r\varphi = U_8 \\ \dot{\psi} = (q\varphi + r) = U_9 \end{cases}$
<b>DINÂMICA ROTACIONAL</b>
$\begin{cases} \dot{p} = \frac{T_\varphi}{I_{xx}} + \frac{qr(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} = U_{10} \\ \dot{q} = \frac{T_\theta}{I_{yy}} + \frac{pr(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} = U_{11} \\ \dot{r} = \frac{T_\psi}{I_{zz}} + \frac{pq(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} = U_{12} \end{cases}$

## 5.5. ESPAÇO DE ESTADOS

Através das equações diferenciais linearizadas o modelo matemático do quadricóptero pode ser descrito por uma relação matricial composta de um conjunto de variáveis de entradas e saídas o qual auxiliará posteriormente o projeto de controle do mecanismo.

O sistema será descrito por 12 variáveis de Estado com 4 variáveis de saída e um valor unitário, descritos respectivamente pelas seguintes matrizes transpostas:

$$X^T = [x \ y \ z \ u \ v \ w \ \varphi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r] \quad (36)$$

$$U^T = [T_\varphi \ T_\theta \ T_\psi \ F \ 1] \quad (37)$$

Como previamente descrito, os ângulos que irão descrever os movimentos rotacionais do quadricóptero serão considerados pequenos, visto o enfoque que haverá deste trabalho na estabilidade do mesmo quando pairar no ar.

Para esta situação pode-se assumir também que as velocidades angulares são pequenas. Isto posto é possível através da expansão por séries de Taylor em torno de um ponto obter uma aproximação satisfatória para o problema em questão. A princípio será utilizada a expansão de primeira ordem para as funções no quadricóptero de múltiplas variáveis, como está representado na função abaixo.

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}|_{x_0}(x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}|_{y_0}(y - y_0) \quad (38)$$

Posteriormente, prossegue-se o processo de modelagem matemática formulando a matriz A e B representada pelo jacobiano das funções supracitadas que compõe o seguinte equacionamento:

$$\dot{X} - \dot{X}_0 = A(X - X_0) + B(U - U_0) \quad (39)$$

Sendo a matriz A e B do espaço de estados podendo ser representada pelo seguinte equacionamento matricial.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta u_n} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} \quad (40),(41)$$

Desta forma, a partir do processo de derivadas parciais em torno do ponto de equilíbrio do sistema, com relação às variáveis de estados pré estabelecidas é possível conjecturar as equações linearizadas, considerando as simplificações realizadas anteriormente, conforme os equacionamentos abaixo.

$$\dot{x} = u; \quad \dot{y} = v; \quad \dot{z} = w; \quad (42),(43),(44)$$

$$\dot{u} = -g\theta; \quad \dot{v} = g\varphi; \quad \dot{w} = g + \frac{F}{M}; \quad (45),(46),(47)$$

$$\dot{\varphi} = p; \quad \dot{\theta} = q; \quad \dot{\psi} = r; \quad (48),(49),(50)$$

Por conseguinte, isolando as variáveis de estado e de saída das matrizes A e B respectivamente, obtém-se de forma completa as relações entre as equações diferenciais em modelo matricial.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{x_0, u_0}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (51),(52)$$

Para o caso estudado neste trabalho, considerando apenas os movimentos de translação do quadricóptero nos eixos x e z, e o movimentos de rotação no eixo y. Em outros termos, o movimento translacional é restrito a um plano vertical e o movimento rotacional ocorre perpendicular a esse plano vertical.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{x_0, u_0}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (53),(54)$$

## 6. ANÁLISES

Para analisar e verificar o comportamento do nosso sistema será utilizado o Scilab (software científico empregado para computação numérica). O intuito será abstrair das representações gráficas subsequentes algumas apreciações de dados de forma a averiguar a validade da modelagem proposta.

Isto posto, serão feitas duas abordagens distintas ao sistema, sendo que na primeira ele será analisado desconsiderando qualquer perturbação do meio e na segunda considerando o arrasto. Desta forma será possível observar como as condições externas e irregularidades no espaço de simulação podem modificar o comportamento do quadricóptero.

A princípio os gráficos gerados apresentarão uma correlação entre as variáveis dos sistemas  $(x\ y\ z\ u\ v\ w\ \phi\ \theta\ \psi\ p\ q\ r)$  com o tempo, de maneira que será registrado questões como estabilidade, crescimento e decrescimento a partir da variação das entradas.

## 6.1 PARÂMETROS

Para o desenvolvimento de um sistema e de uma modelagem adequada ao problema do voo do quadricóptero o processo de estudo para criação do sistema proposto se baseou na análise de quadricópteros já disponíveis no mercado assim como a construção de um modelo em CAD capaz de orientar o modelo a ser desenvolvido, buscando assim modelar um quadricóptero especificamente criado para este trabalho sem necessitar a utilização de sistemas prontos ou valor genéricos referentes a sistemas aproximados, assim trazendo a modelagem do sistema mais próximo do processo completo de criação inerente à engenharia.

Os produtos existentes estudados e analisados foram o Dji mini 2, o Dji Phantom 4 Pro, Parrot ar drone 2.0 e o Intruder Drone, a análise destes serviu como base para o desenvolvimento do cad assim como levantamento de dados e benchmarking para garantir um sistema verosímil.

Uma vez definidos os objetivos do CAD e seu subsequente desenvolvimento conseguimos estimar então alguns importantes valores para as simulações subsequentes deste trabalho.

Tabela 2 - Dados do modelo em CAD.

PROPRIEDADE	VALOR
Massa [kg]	0,76105
Área superior e inferior [m <sup>2</sup> ]	0,0131505375
Área lateral [m <sup>2</sup> ]	0,008553265

Vale lembrar que os valores acima descritos na tabela 1 correspondem ao peso não só da estrutura do veículo como também seus 4 motores, modelo E-MAX CF2822, de 39g cada , hélices instaladas em cada um dos quatro motores apresentados anteriormente, conjunto de baterias capazes de providenciar os 11,1V necessários para que o motor opere em condição de “Força máxima”, e a placa controladora assim como todos os sistemas subsequentes necessários para que a estimativa de peso e áreas frontais esteja o mais próximo de um valor condizente com a realidade para que as simulações sejam as mais fidedignas possíveis dentro do presente cenário.

Considerando as hipóteses simplificadoras previamente apresentadas, a tabela 2 fornece os parâmetros físicos externos necessários para a realização da simulação.

Tabela 3 - Parâmetros físicos externos ao quadricóptero.

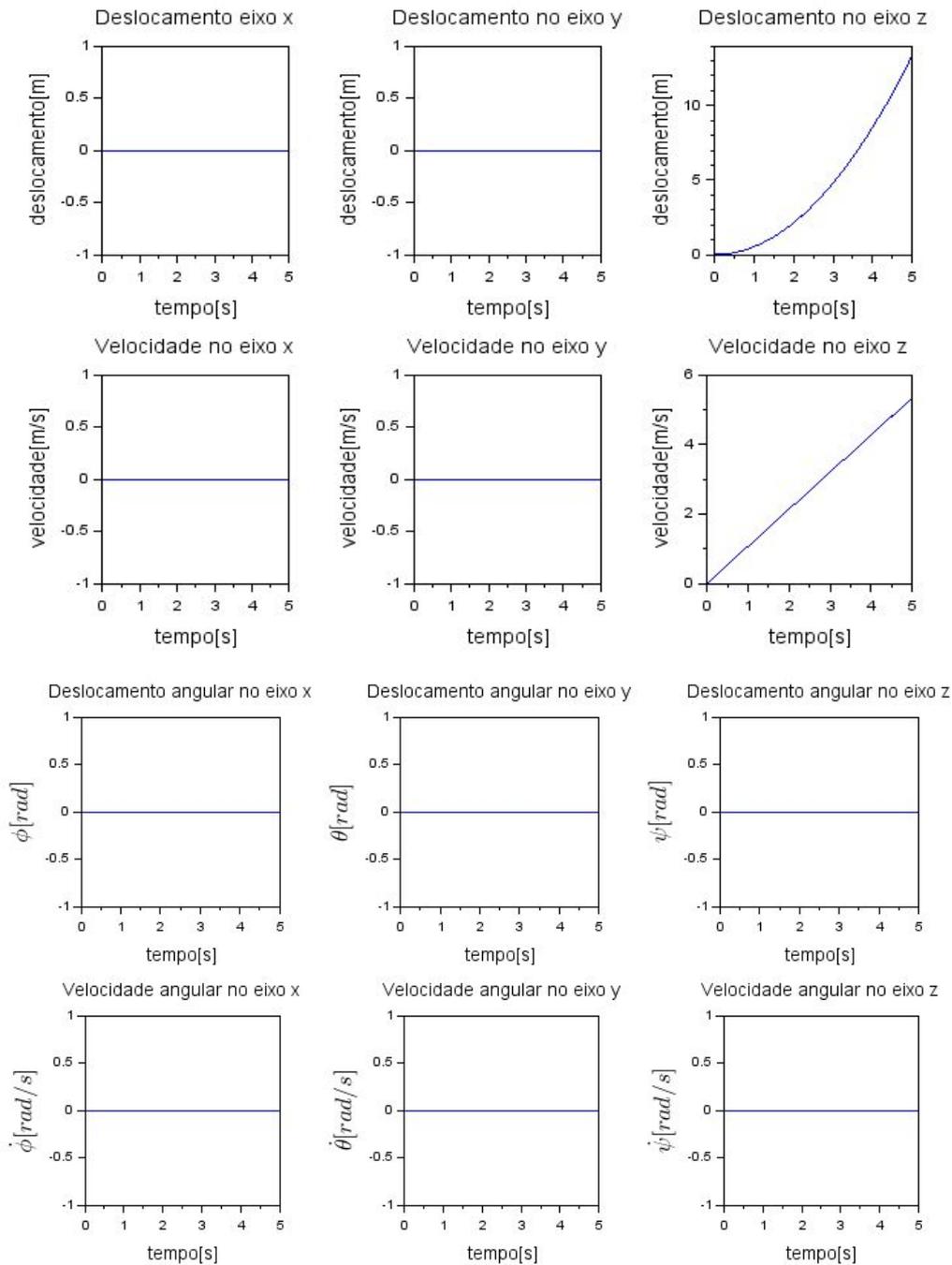
PARÂMETRO	VALOR
Aceleração da gravidade [m/s <sup>2</sup> ]	9,81
Densidade do ar [kg/m <sup>3</sup> ]	1,2041

Uma vez definidos os valores mais triviais relacionados a simulação passamos a definir os valores dos momentos de inércia, sendo  $I_{xx} = 0,2 \text{ kg.m}^2$ ,  $I_{yy} = 0,2 \text{ kg.m}^2$  e  $I_{zz} = 0,03 \text{ kg.m}^2$ . Assim como os valores para o coeficiente de arrasto, sem a capacidade de simular o mesmo por meio de um software de CFD e com a impossibilidade de qualquer tipo de teste laboratorial o CD teve de ser estimado levando em conta o CAD desenvolvido assim como o processo de Benchmarking mencionado anteriormente, utilizando os valores de velocidade máxima dos drones analisados (nem todas as empresas de drone anunciam abertamente esses valores, assim alguns foram obtidos por meio de testes independentes publicados em revistas e sites especializados) obtivemos que os drones deste grupo têm suas velocidades entre 10m/s e 30m/s, assim foram feitos os cálculos com o intuito de aproximar a velocidade máxima de ascensão a 20m/s, dando assim um comportamento próximo ao esperado por um produto atualmente presente neste espaço do mercado, assim obtivemos um  $C_{dx}$  e  $C_{dy} = 0,13$  com  $C_{dz} = 0,27$ .

As simulações foram realizadas para condições iniciais diversas, porém contemplando o movimento de translação nos eixos  $x$  e  $z$ , e de rotação em torno do eixo  $y$ , e variações predefinidas das forças dos propulsores, buscando se aproximar de movimentações controladas remotamente em tempo real.

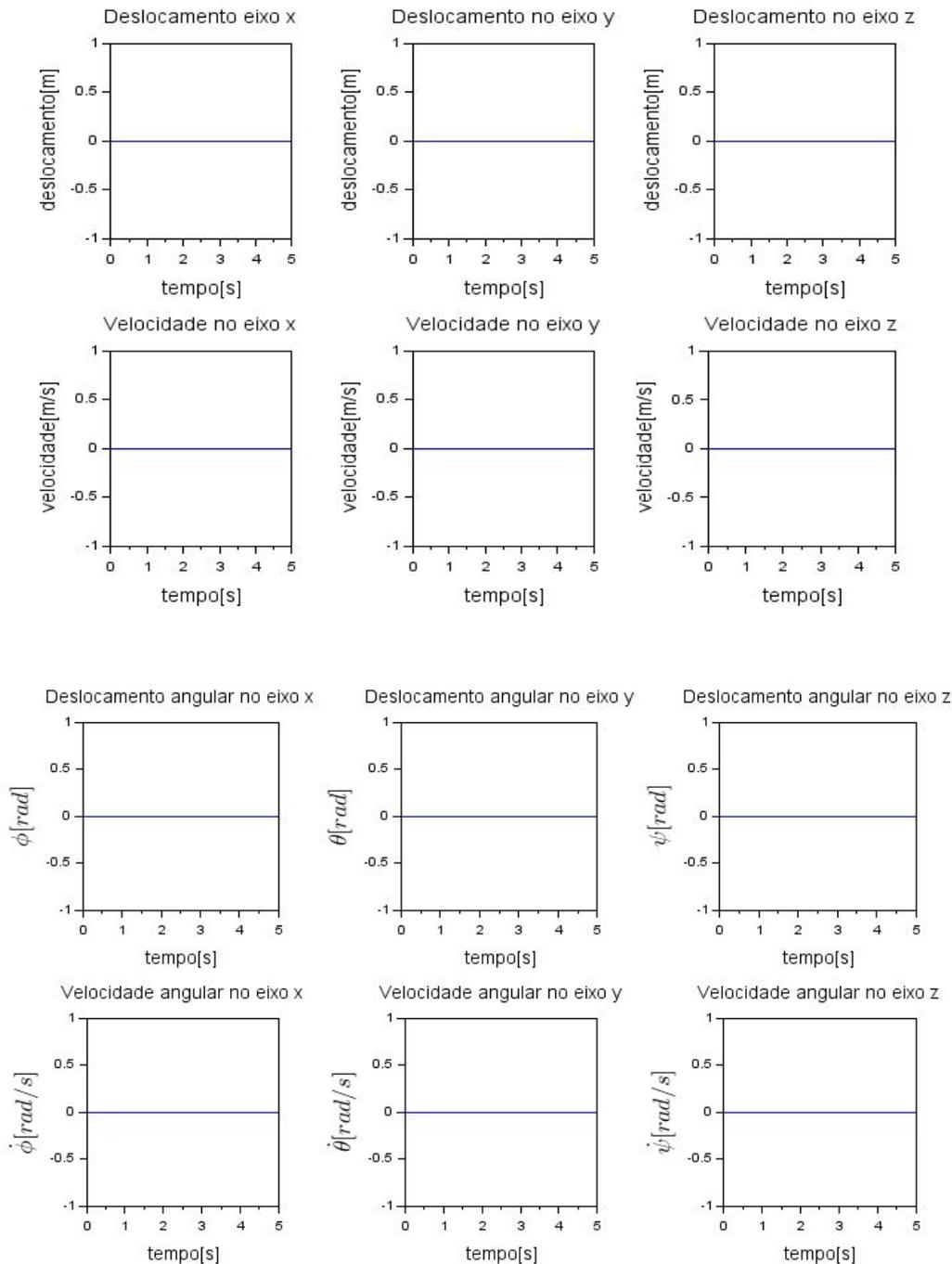
## 6.2 ANÁLISE SEM PERTURBAÇÃO

### 6.2.1 FORÇA MÁXIMA E SEM AÇÃO DE TORQUE



Nessa simulação foi utilizada a máxima força que os motores podem fornecer em conjunto, cerca de 8,277 N. Nota-se que para esse caso o quadricóptero possui movimentação apenas no eixo z, com velocidade constante, o que era esperado já que nessa simulação não está sendo considerada a força de arrasto.

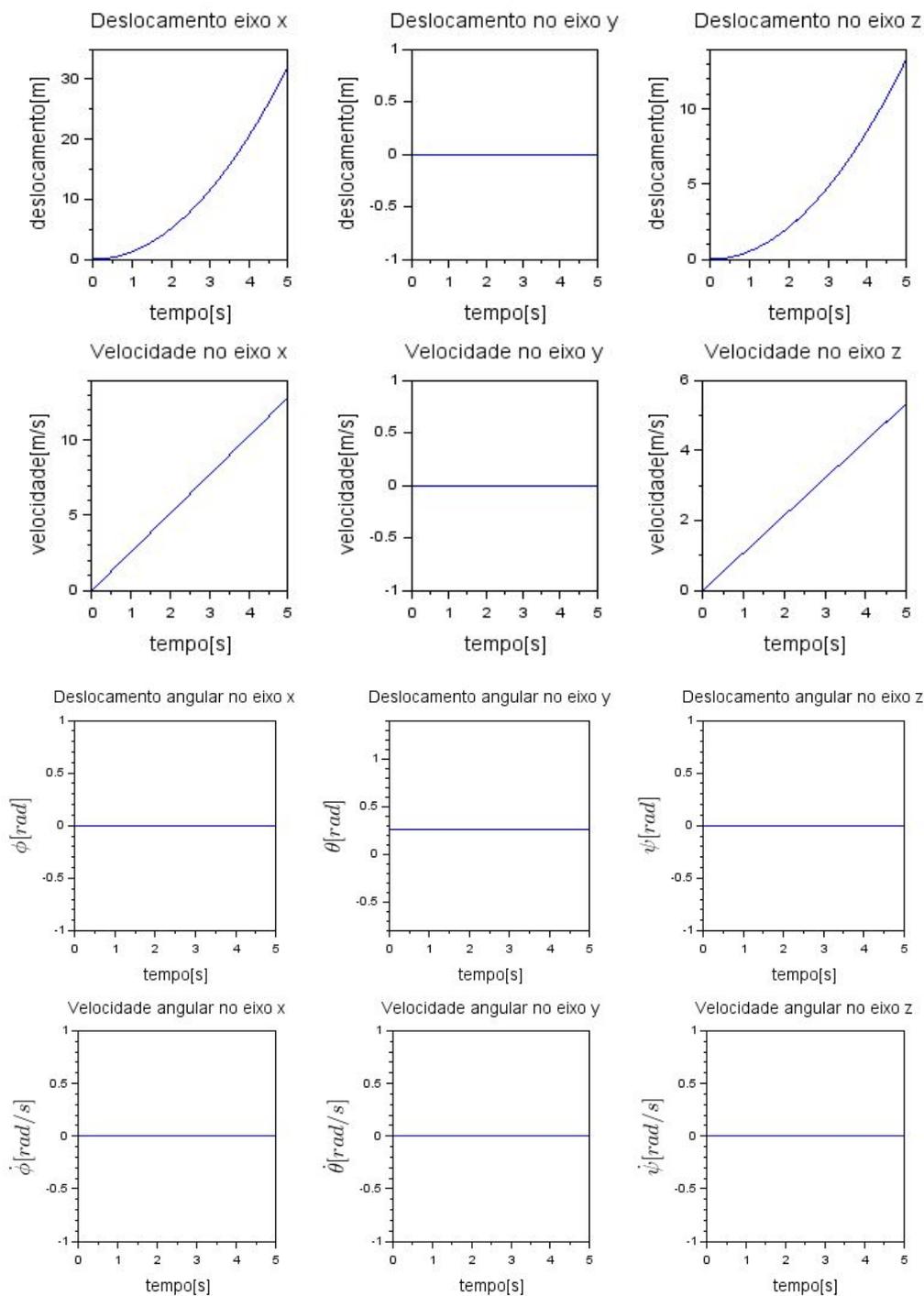
## 6.2.2 FORÇA DE SUSTENTAÇÃO E SEM AÇÃO DE TORQUE



Neste cenário foi utilizada a força de sustentação do quadricóptero, ou seja, a força que mantém o VANT estável no ar, para o sistema modelado, essa força tem magnitude de 7,4659005 N.

Com a aplicação da força de sustentação, a resultante das forças aplicadas sobre o drone tem magnitude igual a zero, e devido a isso o drone continua em sua posição original de repouso, sem que ocorra deslocamento ou variação de velocidade em nenhuma de suas coordenadas.

## 6.2.3 FORÇA DE SUSTENTAÇÃO COM AÇÃO DO ÂNGULO $\theta$ .

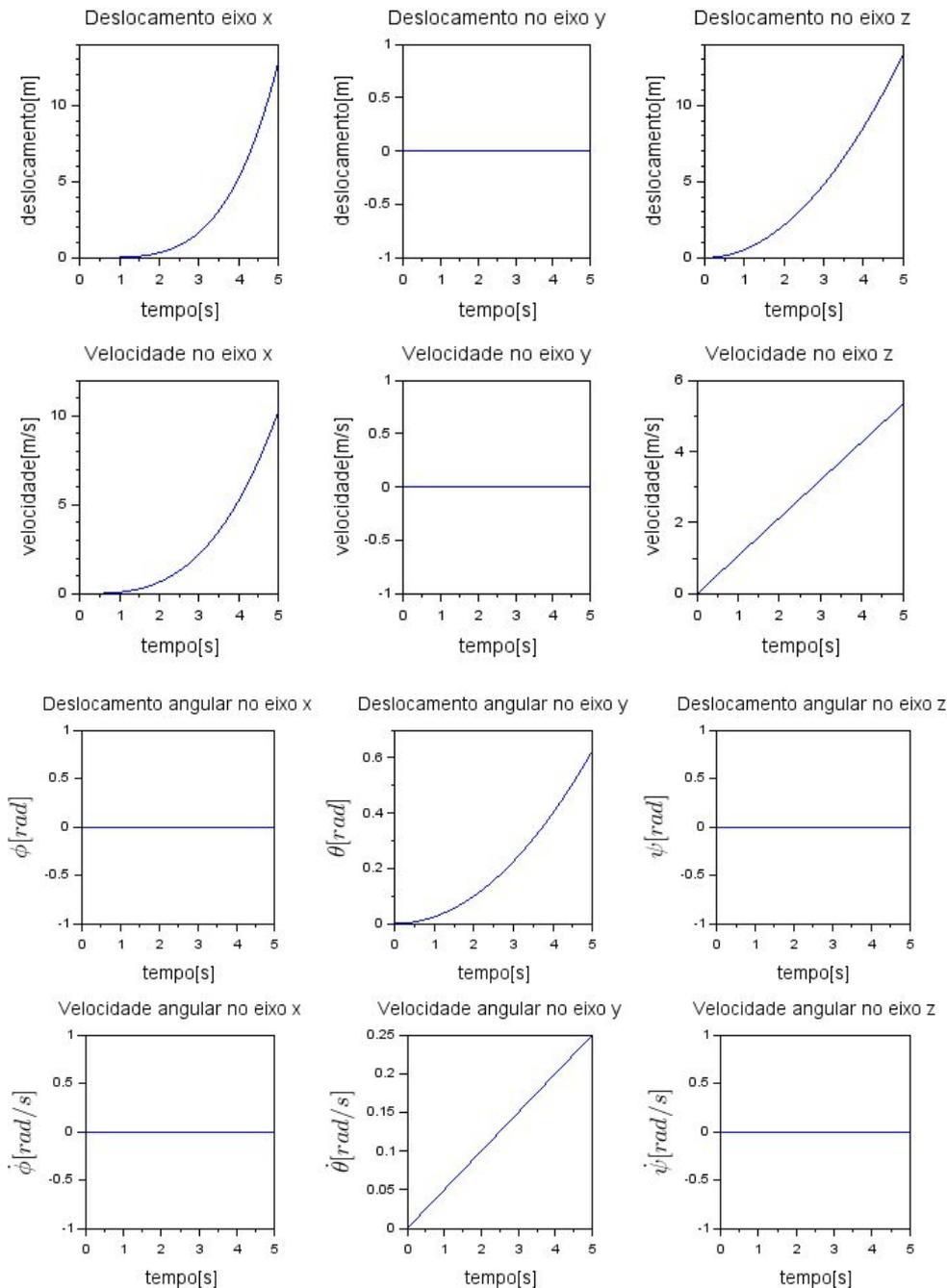


Nessa simulação foi utilizada a máxima força que os motores podem fornecer em conjunto, cerca de 8,277 N, assim como um ângulo  $\theta$  de  $15^\circ$  graus, para demonstrar o deslocamento máximo em x dentro dos ângulos de arfagem ou pitch definidos pela aviação tradicional como próprios para esse tipo de manobra (entre  $7^\circ$  e  $15^\circ$  graus).

Observando o gráfico de deslocamento angular no eixo Y observamos o ângulo inicial de  $15^\circ$  ou aproximadamente  $0,261799$  radianos, com velocidade 0, assim temos que o presente ângulo se mantém constante durante toda a simulação, observamos também que para os outros dois eixos temos ângulos e velocidades angulares iguais a 0 numericamente, isso garante que a presente simulação ocorreu como o esperado sem erros que levariam a uma variação em ambos, lembrando que apesar de serem movimentos fisicamente possíveis a presença de perturbações angulares nos eixos X e Z não são esperadas neste trabalho uma vez que estamos analisando o comportamento de um quadricóptero apenas no plano vertical formado pelos eixos X e Z, assim para uma variação angular de  $\theta$  teremos a movimentação do quadricóptero neste plano, algo que pode ser observado nos gráficos de velocidade e deslocamento para ambos os eixos citados.

No gráfico de velocidades vemos exatamente o processo citado no parágrafo anterior, onde a existência de um ângulo  $\theta$ , causa a movimentação do veículo no eixo X, condizente com o comportamento esperado uma vez que temos a decomposição da força dos motores do quadricóptero quando angulado levando a movimentação descrita no gráfico de deslocamento em X.

## 6.2.4 FORÇA MÁXIMA E AÇÃO DO TORQUE EM $\theta$ .



Neste cenário, equivalente ao anterior, utilizou-se a Força Máxima ocasionada pelos motores com uma variação na entrada de Torque em  $\theta$ . O sistema respondeu com um crescimento assintótico positivo no eixo x e z correspondentes ao deslocamento, com um aumento concomitante da velocidade.

É consabido que o torque é um agente dinâmico de rotação que quando aplicado a um corpo ocasiona ao mesmo um ganho de velocidade angular, isto é observado e comprovado na variação do ângulo de pitch do quadrirotor, também de maneira assintótica.

## 6.3 ANÁLISE COM ARRASTO

### 6.3.1 AÇÃO DO ARRASTO E FORÇA MÁXIMA

Com o objetivo de considerar a influência da força de arrasto na movimentação do quadricóptero, o processo de linearização por séries de Taylor foi feito para o caso das velocidades  $u$  e  $w$  em torno dos 15 m/s. Dessa forma as equações do sistema foram alteradas, porém mantendo o movimento limitado no plano  $xz$  e com rotação no eixo  $y$ , sendo essas demonstradas a seguir.

$$\dot{u} = -\frac{30A_x C_{dx}\rho}{M}u + \frac{225A_x C_{dx}\rho}{M} - g\theta - 15q; \quad (55)$$

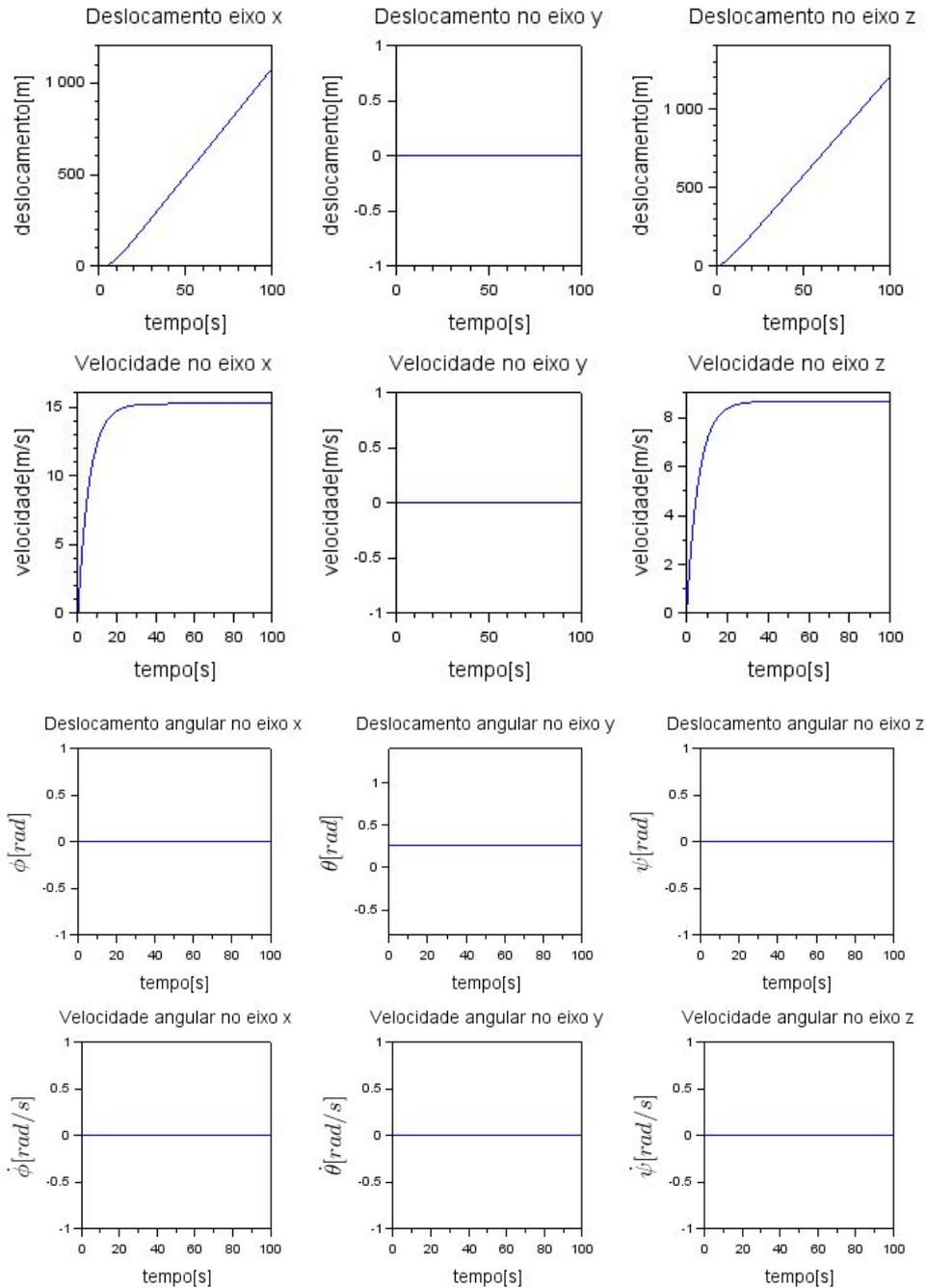
$$\dot{w} = -\frac{30A_z C_{dz}\rho}{M}u + \frac{225A_z C_{dz}\rho}{M} + \frac{F}{M} + g + 15q; \quad (56)$$

$$\dot{x} = u - 15\theta; \quad \dot{z} = w + 15\theta; \quad \dot{\theta} = q; \quad (57),(58),(59)$$

A partir dessas equações é possível remodelar o sistema em espaço de estados relacionando as seguinte matrizes  $A$  e  $B$ , obtidas isolando as variáveis de estado, de forma análoga à composição das matrizes anteriores.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{30A_x C_{dx}\rho}{M} & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{30A_z C_{dz}\rho}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{x_0, u_0} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{225A_x C_{dx}\rho}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} \frac{225A_z C_{dz}\rho}{M} + g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (60),(61)$$

Com isso é possível realizar as simulações utilizando a máxima rotação dos motores e uma inclinação de  $15^\circ$  como condição inicial para a variável  $\theta$ , ou seja, uma inclinação inicial no eixo  $y$ .



A partir dos gráficos das velocidades nos eixos x e y observa-se que a velocidade apresenta uma tendência de estabilização em torno dos 15 m/s no eixo x e em 8.2 m/s no eixo z. Comparando com as simulações sem efeito do arrasto pode-se ressaltar o crescimento assintótico nos primeiros 5 segundos, porém, a partir desse ponto a velocidade apresenta variações negativas, se encaminhando para a estabilidade. Esse comportamento se justifica pelo aumento do arrasto ocorrer de forma proporcional em relação ao aumento da velocidade, dessa forma a velocidade se estabiliza quando a força de arrasto se iguala a força dos motores decomposta no eixo analisado.

## 7. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

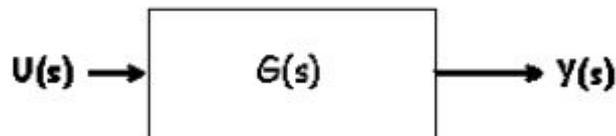
Para complementar as análises do sistema será verificada suas funções de Transferência que corresponderá à razão entre a transformada de Laplace da Saída (resposta) para a transformada de Laplace da Entrada (excitação), como mostra a equação subsequente. Sendo um sistema de dimensão finita a função de transferência é uma função racional de uma variável complexa que pode ser obtida por uma manipulação de equações diferenciais.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (62)$$

Uma das vantagens desta função é que ela pode descrever, mesmo que em sistema de dimensões infinitas regido por equações diferenciais parciais, um sistema de alta ordem, podendo ser demonstrada a partir de experimentos sob um sistema.

Pode-se descrever a mesma a partir de um Diagrama de Blocos, sendo este uma outra representação utilizada para ilustrar seu funcionamento, como mostra a figura 12.

Figura 12 - Diagrama de Blocos da Função de Transferência



## 7.1 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA SEM ARRASTO.

### Entrada $T_\varphi$

As saídas das entradas de  $T_\varphi$  para todos os parâmetros [x, y, z, u, v, w,  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , p, q, r] são nulas, isso se deve ao fato de que as entradas em  $T_\varphi$  geram movimentos de rotação em  $\varphi$ , assim como translação em y, ambos movimentos não contemplados no escopo deste trabalho.

### Entrada $T_\theta$

- Saída x:

$$G_{T_\theta, x} = \frac{49,05 - 7,105 \cdot 10^{-15} s - 2,665 \cdot 10^{-15} s^2 - 1,775 \cdot 10^{-15} s^3}{s^4} \quad (63)$$

- Saída u:

$$G_{T_\theta, u} = \frac{49,05 - 3,553 \cdot 10^{-15} s - 8,882 \cdot 10^{-16} s^2}{s^3} \quad (64)$$

- Saída  $\theta$ :

$$G_{T_\theta, \theta} = \frac{5}{s^2} \quad (65)$$

As demais saídas das entradas de  $T_\theta$  para todos os parâmetros [y, z, v, w,  $\varphi$ ,  $\psi$ , p, q, r] são nulas, podemos analisar que com uma entrada em  $T_\theta$  temos a criação de movimentos de rotação em  $\theta$ , translação em x e variação da velocidade u.

### Entrada $T_\psi$

As saídas das entradas de  $T_\psi$  para todos os parâmetros [x, y, z, u, v, w,  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , p, q, r] são nulas, isso se deve pelo fato de que entradas em  $T_\psi$  geram movimentos de rotação em  $\psi$ , movimento este que não é contemplado no presente trabalho.

### Entrada $F$

- Saída z:

$$G_{F, z} = \frac{1,3139741 - 2,22 \cdot 10^{-16} s}{s^2} \quad (66)$$

- Saída w:

$$G_{F,w} = \frac{1.3139741}{s} \quad (67)$$

As saídas das entradas de F para todos os parâmetros [x, y, u, v,  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , p, q, r] são nulas, podemos observar que a força F causa efeito na translação e na velocidade no eixo z, representados pelas saídas z e w.

### **Entrada unitária**

- Saída z:

$$G_{1,z} = \frac{-9,81}{s^2} \quad (68)$$

- Saída w:

$$G_{1,w} = \frac{-9,81}{s} \quad (69)$$

As saídas das entradas de unitária para todos os parâmetros [x, y, u, v,  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , p, q, r] são nulas, vemos a partir das funções de transferência apresentadas anteriormente que temos mudança na translação em z assim como na velocidade referente ao mesmo eixo, a velocidade w.

## 7.2 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA COM ARRASTO.

### Entrada $T_\varphi$

As saídas das entradas de  $T_\varphi$  para todos os parâmetros  $[x, y, z, u, v, w, \varphi, \theta, \psi, p, q, r]$  são 0, isso se deve ao fato de que as entradas em  $T_\varphi$  geram movimentos de rotação em  $\varphi$ , assim como a translação em  $y$ , ambos movimentos não contemplados neste trabalho.

### Entrada $T_\theta$

- Saída x:

$$G_{T_\theta, x} = \frac{36,410231 - 150s + 2,96 \cdot 10^{-14} s^2 - 7,827 \cdot 10^{-15} s^3}{0,1685303s^3 + s^4} \quad (70)$$

- Saída z:

$$G_{T_\theta, z} = \frac{12,639769 + 150s + 4,607 \cdot 10^{-14} s^2 + 3,636 \cdot 10^{-15} s^3}{0,1685303s^3 + s^4} \quad (71)$$

- Saída u:

$$G_{T_\theta, u} = \frac{49,05 - 75s - 1,998 \cdot 10^{-15} s^2}{0,1685303s^2 + s^3} \quad (72)$$

- Saída w:

$$G_{T_\theta, w} = \frac{75 + 1,832 \cdot 10^{-15} s}{0,1685303s + s^2} \quad (73)$$

- Saída  $\theta$ :

$$G_{T_\theta, \theta} = \frac{5 + 3,925 \cdot 10^{-17} s}{s^2} \quad (74)$$

No caso da entrada  $T_\theta$ , que se trata do torque aplicado no eixo  $y$ , nota-se que são geradas respostas translacionais nos eixos  $x$  e  $z$ , ocasionando também respostas nas saídas  $v$  e  $w$  de que são as velocidades correspondentes a esses deslocamentos gerados, ademais é gerada resposta na saída devido ao momento ocasionado no eixo  $y$ .

### Entrada $T_\psi$

As saídas das entradas de  $T_\psi$  para todos os parâmetros  $[x, y, z, u, v, w, \varphi, \theta, \psi, p, q, r]$  são 0, isso se deve ao fato de que as entradas em  $T_\psi$  geram movimentos de rotação em  $\psi$ ,

assim como a translação no eixo z, ambos movimentos que não foram objetivos de estudo deste trabalho.

### Entrada F

- Saída z:

$$G_{F,z} = \frac{1,3139741 - 4,163 \cdot 10^{-16}s}{0,1685303s + s^2} \quad (75)$$

- Saída w:

$$G_{F,w} = \frac{1,3139741}{0,1685303 + s} \quad (76)$$

Nota-se que a força F aplicada atua apenas no eixo z, gerando respostas nas saídas z e w, enquanto as outras são nulas.

### Entrada unitária

- Saída x:

$$G_{1,x} = \frac{0,3958286 + 5,551 \cdot 10^{-17}s}{0,1685303s + s^2} \quad (77)$$

- Saída z:

$$G_{1,z} = \frac{-9,4141714}{0,1685303s + s^2} \quad (78)$$

- Saída u:

$$G_{1,u} = \frac{0,3958286}{0,1685303 + s} \quad (79)$$

- Saída w:

$$G_{1,w} = \frac{-9,4141714}{0,1685303 + s} \quad (80)$$

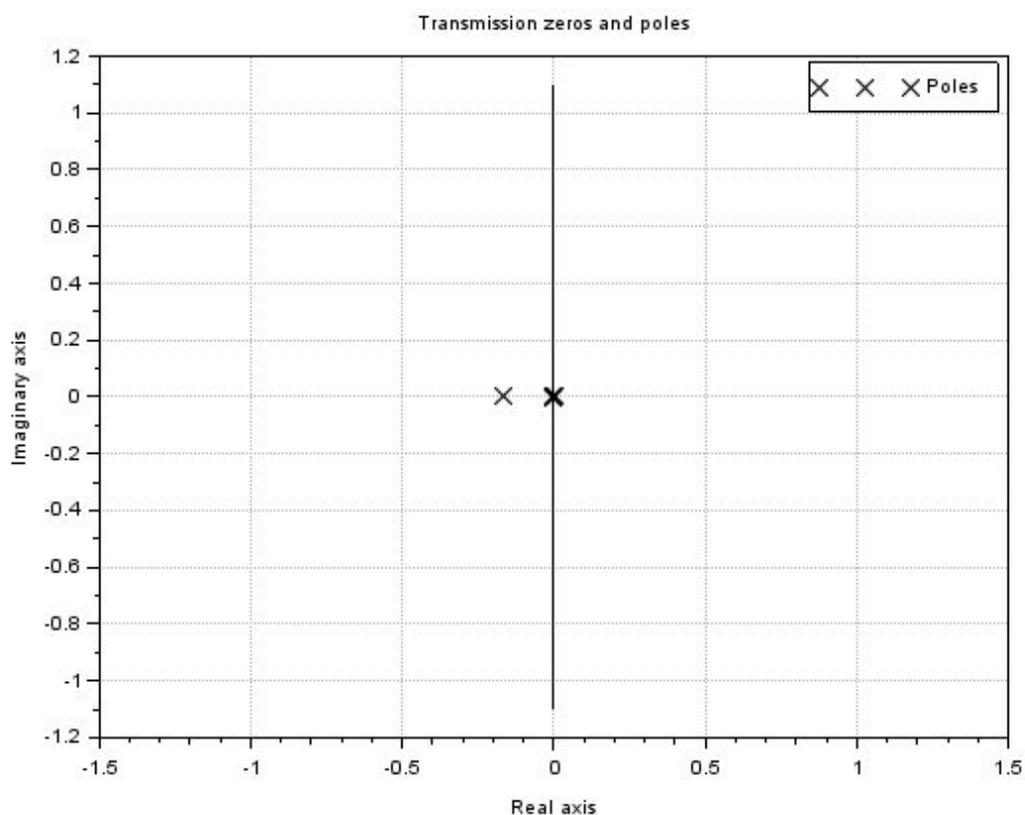
A entrada unitária corresponde aos outros parâmetros incluídos na análise como a força de arrasto e a gravidade, nota-se que são originadas saídas em x, z, u e w, em que a saída em x e u existe devido a força de arrasto, enquanto as saídas em z e w são resultado da ação do arrasto e da gravidade combinados.

## 8. POLOS

A partir das funções de transferência é possível verificar a estabilidade do sistema modelado. Para tanto é necessário calcular para a condição com e sem arrasto as raízes do denominador de  $G(s)$  ou os pontos que fariam a mesma tender ao infinito.

Para o caso do sistema que não considera o arrasto as raízes dos denominadores são nulas o que configura um sistema criticamente estável. Já para o caso com presença do arrasto o qual possui como denominador  $0,1685303s + s^2$  e tem como raízes 0 e -0.1685303, o que observa-se na figura 13, percebe-se que ao possuir um polo nulo este sistema será criticamente estável, logo quando sujeito a uma entrada impulso a saída não vai para zero e nem para infinito.

Figura 13 - Pólos e Zeros para condição com arrasto

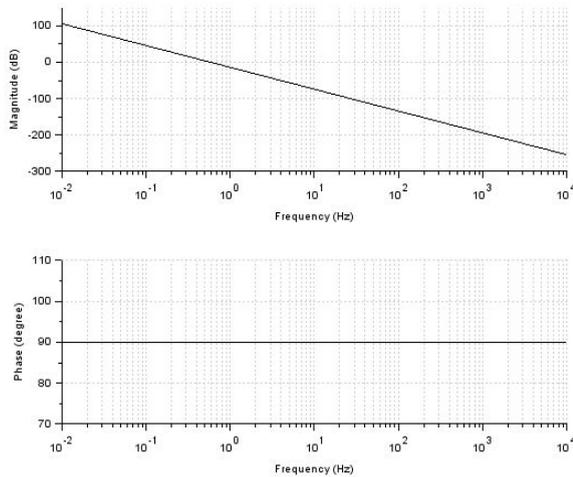


# 9. DIAGRAMA DE BODE

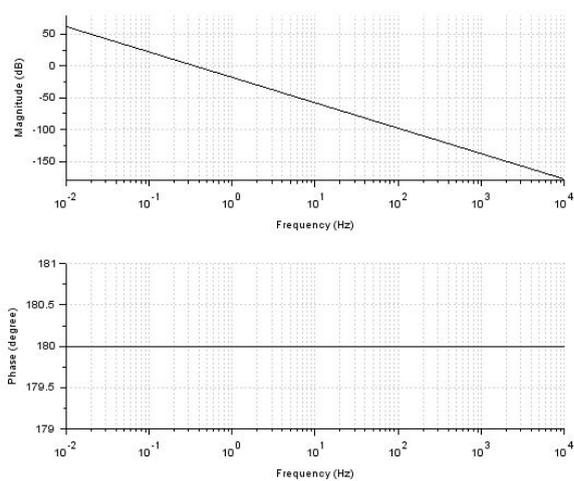
## 9.1. SEM ARRASTO

### 9.1.1. ANÁLISE 1

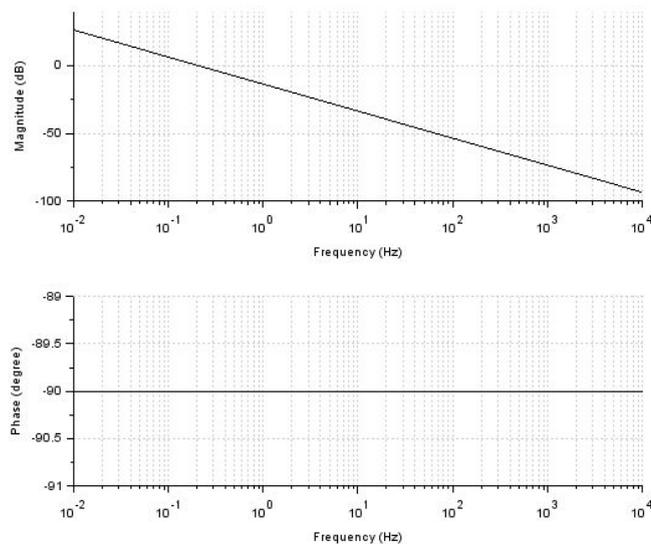
Entrada  $T_\theta$  saída  $u$



Entrada  $T_\theta$  saída  $\theta$



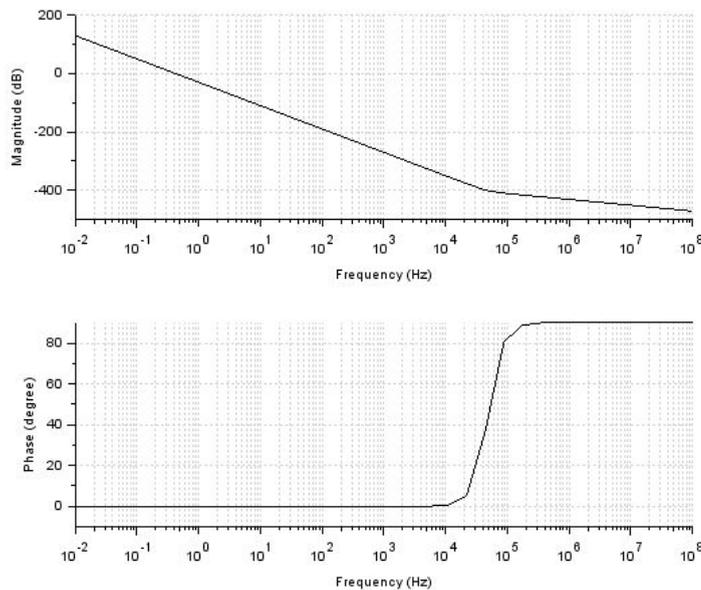
Entrada  $F$  saída  $w$



Observa-se nestes gráficos de Entrada  $T_\theta$  saída  $u$ , Entrada  $T_\theta$  saída  $\theta$  e Entrada  $F$  saída  $w$ , uma homologia em seu comportamento, possuindo tanto na representação da magnitude quanto na de fase diversas similitudes, pois os mesmos apresentam no ganho uma assíntota decrescente e permanecem com fases constantes independentemente do aumento da frequência visto que tratam-se de funções de polos simples na origem.

## 9.1.2. ANÁLISE 2

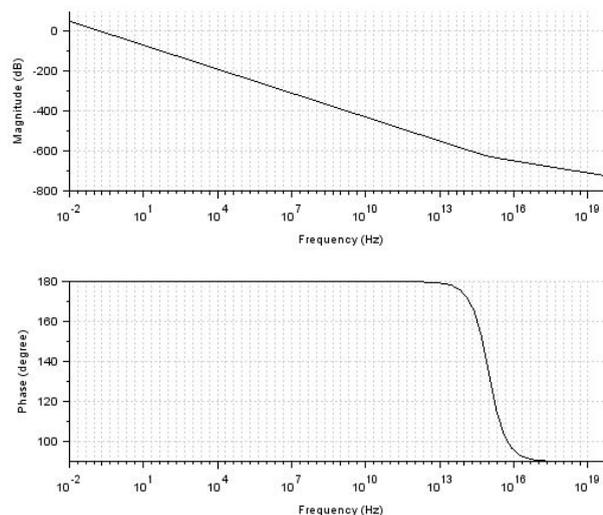
### Entrada T saída x



O diagrama de *Bode* da entrada  $T_\theta$  e saída x apresenta uma fase constante em  $0^\circ$  até uma variação de  $90^\circ$  após 6 décadas, apresentando também uma pequena variação na inclinação do comportamento da magnitude por volta -400 dB.

## 9.1.3. ANÁLISE 3

### Entrada F saída z

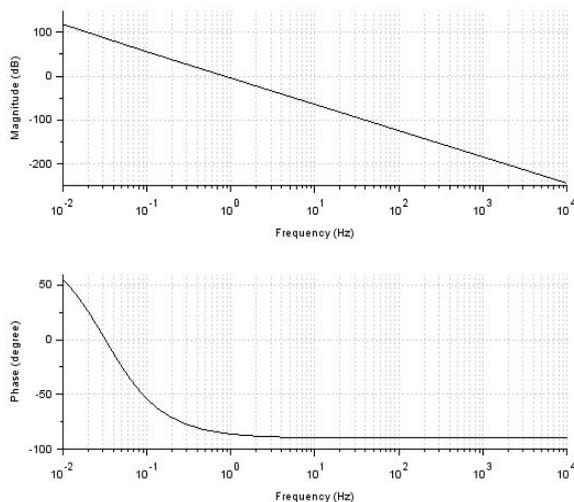


Ao analisar os diagramas de *Bode* para a entrada F e saída z nota-se que a fase permanece constante em  $180^\circ$  até se passarem aproximadamente 16 décadas, chegando a seu mínimo na década 17 com fase de  $90^\circ$ .

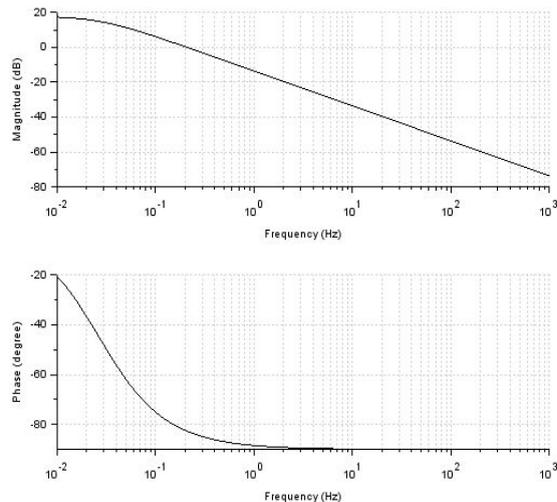
## 9.2. COM ARRASTO

### 9.2.1. ANÁLISE 1

Entrada  $T_\theta$  saída x



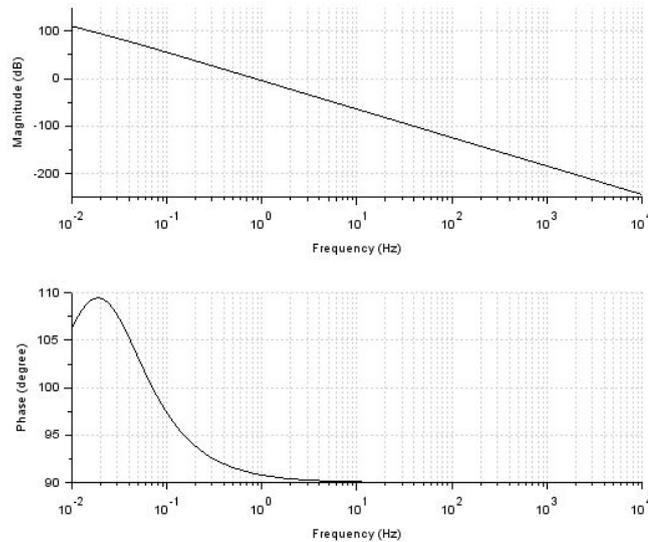
Entrada F saída w



Analisando os diagramas de *Bode* para a entrada  $T_\theta$  com saída  $x$  podemos observar a queda da fase durante as primeiras duas décadas da análise, após esse ponto temos a estabilização do mesmo na fase  $-90^\circ$ . De forma semelhante, no diagrama para a entrada  $F$  com saída em  $w$ , ocorre uma queda de fase se estabilizando em  $-90^\circ$ , porém a queda se inicia em  $50^\circ$  no primeiro caso e  $-20^\circ$  no segundo, enquanto a magnitude varia em declive entre 100 e  $-250$  dB, e a frequência entre  $10^{-2}$  e  $10^4$  no primeiro caso, e no segundo entre 20 e  $-80$  dB de magnitude, considerando a frequência entre  $10^{-2}$  e  $10^3$ .

## 9.2.2. ANÁLISE 2

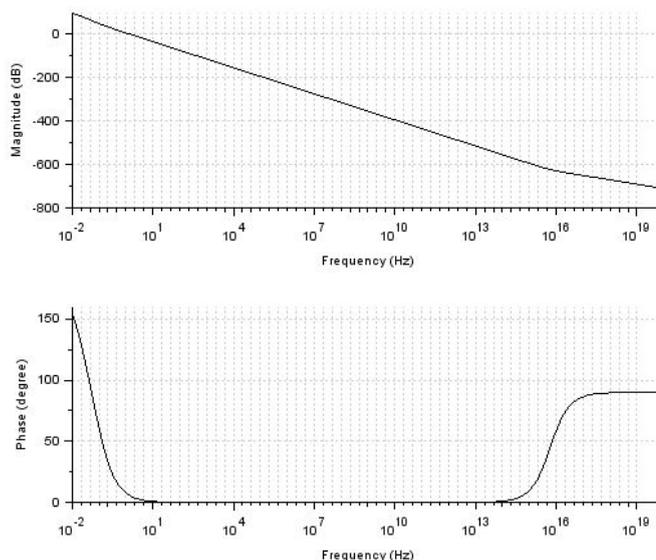
### Entrada $T_\theta$ saída z



No caso da saída z para a entrada  $T_\theta$  a variação da fase em relação à frequência apresenta um comportamento de parábola na primeira década, com pico em 110°, se estabilizando em 90° a partir dos 10 Hz de frequência. Já a magnitude se mantém em declive linear entre 100 e -250 dB.

## 9.2.3. ANÁLISE 3

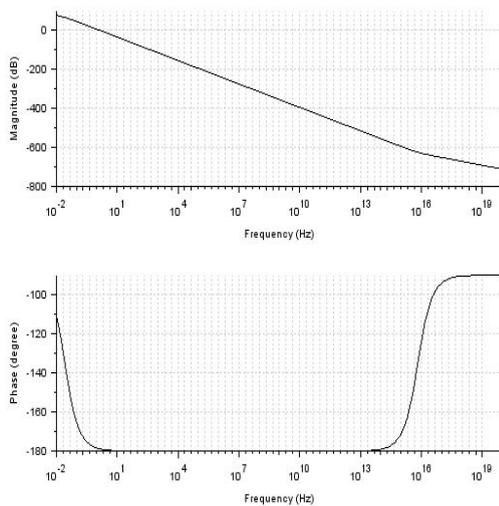
### Entrada $T_\theta$ saída u



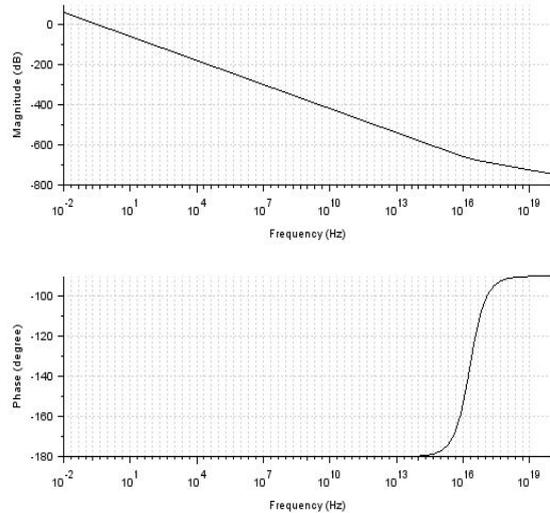
Analisando os diagramas de Bode para a entrada  $T_\theta$  com saída u podemos observar a queda da fase durante a primeira década da análise, e observamos o aumento da fase de 0° para 90° e observamos esta mudança também no gráfico da magnitude representado na décima sexta década pela pequena variação na inclinação do gráfico de magnitude.

## 9.2.4. ANÁLISE 4

Entrada  $T_\theta$  saída w



Entrada  $T_\theta$  saída  $\theta$

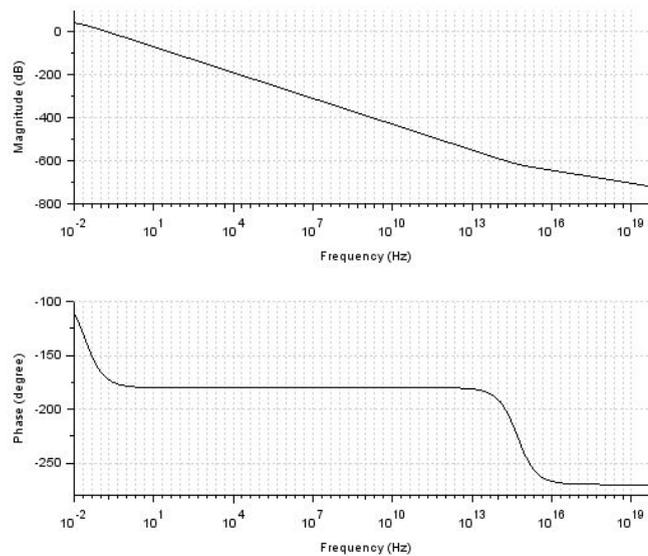


Analisando os diagramas de Bode para a entrada  $T_\theta$  com saída w podemos observar a queda da fase durante as três primeiras décadas da análise, e observamos a volta da fase de  $-180^\circ$  para  $-90^\circ$  e observamos esta mudança também no gráfico da magnitude representado na décima sexta década pela pequena variação na inclinação do gráfico de magnitude, essa análise se assemelha à anterior demonstrando que para variações de  $T_\theta$  envolvendo as velocidades deve-se dar atenção a posição relativa a 16 década.

Nos diagramas de Bode para a entrada  $T_\theta$  e saída  $\theta$  observa-se comportamento semelhante ao da saída w, que resulta na mesma análise, diferindo apenas que no início da análise a fase encontra-se em  $-180^\circ$ , mas a partir da década 1 é observado exatamente o mesmo comportamento.

## 9.2.4. ANÁLISE 5

### Entrada F saída z



Nesse caso observa-se que inicialmente a fase do sistema é de  $-90^\circ$  mas está em decréscimo, até se estabilizar em  $-180^\circ$  após aproximadamente três décadas, mantendo-se constante até começar a decair na década 13, fato que pode ser observado pela angulação presente no gráfico da magnitude, o decréscimo de fase continua até se estabilizar em  $270^\circ$ .

## 10. CONCLUSÃO

A proposição deste trabalho referiu-se a simulação de um quadricóptero que teria movimentos translacionais no plano vertical  $xz$  e rotacionais em  $\theta$  no qual o ângulo de arfagem seria de  $15^\circ$ , fato que proporciona uma simplificação trigonométrica, trabalhando-se por fim com pequenos ângulos.

Com o desenvolvimento das equações diferenciais obteve-se algumas formulações para descrever o comportamento do quadricóptero, nas quais pela expansão em série de Taylor foi possível verificar suas formas linearizada em torno do ponto zero, em que por conseguinte descobriu-se o espaço de estados referente às mesmas.

Posteriormente analisou-se com o apoio da ferramenta computacional Scilab uma análise gráfica entre as variáveis de estado pelo tempo de duas formas distintas, na qual primeiramente desconsidera-se qualquer perturbação no meio e posteriormente considera-se o arrasto, pela qual verificou-se nesta última uma tendência de estabilização da velocidade em  $x$  e  $z$  com o passar do tempo. Após estas análises obteve-se as funções de transferência e os diagramas de bode que demonstraram que o sistema modelado, testado em duas diferentes condições, é criticamente estável. Afere-se portanto a validade do modelo.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRESCIANNI, T. **Modelling, Identification and Control of a Quadcopter Helicopter**. 2008. 180f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica). Department of Automatic Control, Lund University, Lund.

BALLAS, C. **Modelling and Linear Control of a Quadrotor**. Cranfield University, 2007. 138 p.

CARLOS ESPIÚCA MONTEIRO, João. **Modelagem e Controle de um Veículo Quadricóptero**. Orientador: Liu Hsu. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Engenharia de Controle e Automação) - Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, [S. l.], 2015.

CAVALLARO, Silvio Luis Hori. **Modelagem, simulação e controle de um VANT do tipo quadricóptero**. 2019. 153 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3152/tde-01032019-155058/pt-br.php>. Acesso em: 9 nov. 2020.

GEISERT, M.; MANSARD, N. **Trajectory Generation for Quadrotor Based Systems using Numerical Optimal Control**. International Conference of Robotics and Automation, 2016. 10 p.

H. HUANG, G. M. HOFFMANN, S. L. WASLANDER, and C. J. TOMLIN, **“Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering”** IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3277–3282, May 2009

KOKRON RODRIGUES, Henrique. **Elaboração de Projeto para Construção de Quadricóptero Autônomo Eficiente**. Orientador: Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa. 2014. Relatório (Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade de São Paulo, [S. l.], 201-.

LIMA, Gabriela Vieira; DE SOUZA, Rafael M.J.; DE MORAIS, Aniel Silva; DE MORAIS, Josué Silva. **Modelagem dinâmica de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero**. Uberlândia, MG, Brasil, Julho 2014.

PHILLIPS, W. F. **Mechanics of Flight**. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2009. 1152 p.

SHUKLA, Dhwanil; KOMERATH, Narayanan. **Multirotor Drone Aerodynamic Interaction Investigation**. School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, [S. l.], p. 1-13, 3 dez. 2018.

T. MADANI and A. BENALLEGUE, **“Backstepping control for a quadrotor helicopter”**. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 3255–3260, 2006.

# Apêndice A

## 1 Código para o caso sem arrasto T1.1.sce

```
1 // Massa do quadrotor
2 mt=0.76105;
3
4 // Momentos de inercia
5 Ix=0.2;
6 Iy=0.2;
7 Iz=0.03;
8
9 // Gravidade
10 g=-9.81;
11
12 // Areas frontal (Ax) e lateral
13 Ax=0.008553265;
14 Ay=Ax;
15 Az=0.0131505375;
16
17 // Coeficientes de arrasto
18 Cdx=0.13
19 Cdy=Cdx;
20 Cdz=0.27;
21
22 // Densidade do ar
23 ro=1.2041;
24
25 // Forcas
26 Fsus=7.4659005 // Forca de sustentacao
27 Fmax=8.277 // Forca maxima
28
29 // Tempo
30 t0 = 0;
31 tfinal = 5;
32 tpasso = 0.1;
33
34 t = [t0:tpasso:tfinal];
35
36 //-----
37
38 // Matriz A
39
40 A= [0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
41     0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
42     0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
43     0 0 0 0 0 0 0 0 -g 0 0 0;
```

```

44     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
45     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
46     0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;
47     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;
48     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1;
49     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
50     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
51     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
52
53 // Matriz B
54
55
56 B=[
57 0 0 0 0 0;
58 0 0 0 0 0;
59 0 0 0 0 0;
60 0 0 0 0 0;
61 0 0 0 0 0;
62 0 0 0 1/mt g;
63 0 0 0 0 0;
64 0 0 0 0 0;
65 0 0 0 0 0;
66 0 0 0 0 0;
67 0 1/Iy 0 0 0;
68 0 0 0 0 0;
69 ]
70
71 // Matriz C
72
73 C = [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
74      0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
75      0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
76      0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
77      0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
78      0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
79      0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
80      0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
81      0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
82      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
83      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
84      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
85
86 // Matriz D
87
88 D=[0 0 0 0 0;
89     0 0 0 0 0;
90     0 0 0 0 0;
91     0 0 0 0 0;
92     0 0 0 0 0;
93     0 0 0 0 0;
94     0 0 0 0 0;
95     0 0 0 0 0;
96     0 0 0 0 0;
97     0 0 0 0 0;
98     0 0 0 0 0;
99     0 0 0 0 0;]
100

```

```

101 // Sistema linear
102 sistema = syslin('c',A,B,C,D);
103
104 //-----
105
106 // Funcoes de transferencia
107 G1=ss2tf(sistema);
108
109 // Mostra as funcoes de transferencia no terminal
110 disp(G1)
111
112 // Definicao de s
113 s = poly(0, 's');
114
115 // Remover o comentario da funcao desejada para obter os diagramas
116
117 // Entrada Ttheta
118 h = syslin('c', (49.5-(7.105e-15)*s -(2.665e-15)*(s^2)-1.776e-15*(s
^3))/(s^4)); // Saida x
119 //h = syslin('c', (49.5-(3.553e-15)*s -(8.882e-16)*(s^2))/(s^3));
// Saida u
120 //h = syslin('c', (5)/(s^2)); // Saida theta
121
122 // Entrada F
123 //h = syslin('c', (1.3139741-(2.220e-16)*s)/(s^2)); // Saida z
124 //h = syslin('c', (1.3139741)/(s)); // Saida w
125
126 // Diagrama de polos
127 f10=scf(1);
128 plzr(h)
129
130 // Diagrama de bode
131 f10=scf(2);
132 clf(); bode(h, 0.01, 1e20);
133
134 //-----
135
136 // Entradas
137 // Torque em phi
138 u1=zeros (t);
139 u1(:)=0;
140
141 // Torque em theta
142 u2=zeros (t);
143 u2(:)=0.01;
144
145 // Torque em psi
146 u3=zeros (t);
147 u3(:)=0;
148
149 // Forca
150 u4=zeros (t);
151 u4(:)=Fmax;
152
153 // Entrada unitaria
154 u5=zeros (t);
155 u5(:)=1;

```

```

156
157 // Matriz U
158 U = [u1; u2; u3; u4; u5];
159
160 // Condições iniciais
161 x0e = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]; // Possível condição em
      theta (x0e(8)): 15*%pi/180
162
163
164 // Simulação
165 [y,x] = csim (U, t, sistema, x0e);
166
167 //-----
168
169 // Variáveis para o plot
170 X = x(1,:);
171 Y = x(2,:);
172 Z = x(3,:);
173 u = x(4,:);
174 v = x(5,:);
175 w = x(6,:);
176 phi = x(7,:);
177 theta = x(8,:);
178 psi = x(9,:);
179 p = x(10,:);
180 q = x(11,:);
181 r = x(12,:);
182
183 // Plot dos gráficos de deslocamento e velocidade
184 f10=scf(3);
185 subplot(231)
186 plot(t,X);
187 title("Deslocamento eixo x","fontsize", 3);
188 xlabel("tempo [s]","fontsize",3);
189 ylabel("deslocamento [m]","fontsize",3);
190
191 subplot(232)
192 plot(t,Y);
193 title("Deslocamento no eixo y","fontsize", 3);
194 xlabel("tempo [s]","fontsize", 3);
195 ylabel("deslocamento [m]","fontsize",3);
196
197 subplot(233)
198 plot(t,Z);
199 title("Deslocamento no eixo z","fontsize", 3);
200 xlabel("tempo [s]","fontsize", 3);
201 ylabel("deslocamento [m]","fontsize",3);
202
203 subplot(234)
204 plot(t,u);
205 title("Velocidade no eixo x","fontsize", 3);
206 xlabel("tempo [s]","fontsize", 3);
207 ylabel("velocidade [m/s]","fontsize",3);
208
209 subplot(235)
210 plot(t,v);
211 title("Velocidade no eixo y","fontsize", 3);

```

```

212 xlabel("tempo[s]","fontsize", 3);
213 ylabel("velocidade[m/s]","fontsize",3);
214
215 subplot(236)
216 plot(t,y(6,:));
217 title("Velocidade no eixo z","fontsize", 3);
218 xlabel("tempo[s]","fontsize", 3);
219 ylabel("velocidade[m/s]","fontsize",3);
220
221 // Plot dos graficos de deslocamento e velocidade angular
222 f10=scf(4);
223 subplot(231)
224 plot(t,phi);
225 title("Deslocamento angular no eixo x","fontsize", 3);
226 xlabel("tempo[s]","fontsize",3);
227 ylabel("${\phi}[rad]$", "fontsize",4);
228
229 subplot(232)
230 plot(t,theta);
231 title("Deslocamento angular no eixo y","fontsize", 3);
232 xlabel("tempo[s]","fontsize", 3);
233 ylabel("${\theta}[rad]$", "fontsize",4);
234
235 subplot(233)
236 plot(t,psi);
237 title("Deslocamento angular no eixo z","fontsize", 3);
238 xlabel("tempo[s]","fontsize", 3);
239 ylabel("${\psi}[rad]$", "fontsize",4);
240
241 subplot(234)
242 plot(t,p);
243 title("Velocidade angular no eixo x","fontsize", 3);
244 xlabel("tempo[s]","fontsize", 3);
245 ylabel("${\dot{\varphi}}[rad/s]$", "fontsize",4);
246
247 subplot(235)
248 plot(t,q);
249 title("Velocidade angular no eixo y","fontsize", 3);
250 xlabel("tempo[s]","fontsize", 3);
251 ylabel("${\dot{\theta}}[rad/s]$", "fontsize",4);
252
253 subplot(236)
254 plot(t,r);
255 title("Velocidade angular no eixo z","fontsize", 3);
256 xlabel("tempo[s]","fontsize", 3);
257 ylabel("${\dot{\psi}}[rad/s]$", "fontsize",4);

```

## 2 Código para o caso com arrasto T1.2.sce

```
1 // Massa do quadrotor
2 mt=0.76105;
3
4 // Momentos de inercia
5 Ix=0.2;
6 Iy=0.2;
7 Iz=0.03;
8
9 // Gravidade
10 g=-9.81;
11
12 // Areas frontal (Ax) e lateral
13 Ax=0.008553265;
14 Ay=Ax;
15 Az=0.0131505375;
16
17 // Coeficientes de arrasto
18 Cdx=0.13
19 Cdy=Cdx;
20 Cdz=0.27;
21
22 // Densidade do ar
23 ro=1.2041;
24
25 // Forcas
26 Fsus=7.4659005 // Forca de sustentacao
27 Fmax=8.277 // Forca maxima
28
29 // Tempo
30 t0 = 0;
31 tfinal = 100;
32 tpasso = 0.1;
33
34 t = [t0:tpasso:tfinal];
35
36 //-----
37
38 // Matriz A
39
40 A= [0 0 0 1 0 0 0 -15 0 0 0 0;
41     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
42     0 0 0 0 0 1 0 15 0 0 0 0;
43     0 0 0 -30*ro*Az*Cdz/mt 0 0 0 -g 0 0 -15 0;
44     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
45     0 0 0 0 -30*ro*Az*Cdz/mt 0 0 0 0 15 0;
46     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
47     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;
48     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
49     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
50     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
51     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
52
53 // Matriz B
54
55 B=[
```

```

56 0 0 0 0 0;
57 0 0 0 0 0;
58 0 0 0 0 0;
59 0 0 0 0 225*ro*Ax*Cdx/mt;
60 0 0 0 0 0;
61 0 0 0 1/mt g+225*ro*Ax*Cdx/mt;
62 0 0 0 0 0;
63 0 0 0 0 0;
64 0 0 0 0 0;
65 0 0 0 0 0;
66 0 1/Iy 0 0 0;
67 0 0 0 0 0;
68 ]
69
70 // Matriz C
71
72 C = [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
73      0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
74      0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
75      0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
76      0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
77      0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
78      0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
79      0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
80      0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
81      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
82      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
83      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
84
85 // Matriz D
86
87 D=[0 0 0 0 0;
88     0 0 0 0 0;
89     0 0 0 0 0;
90     0 0 0 0 0;
91     0 0 0 0 0;
92     0 0 0 0 0;
93     0 0 0 0 0;
94     0 0 0 0 0;
95     0 0 0 0 0;
96     0 0 0 0 0;
97     0 0 0 0 0;
98     0 0 0 0 0;]
99
100 // Sistema linear
101 sistema = syslin('c',A,B,C,D);
102
103 //-----
104
105 // Funcoes de transferencia
106 G1=ss2tf(sistema);
107
108 // Mostra as funcoes de transferencia no terminal
109 disp(G1)
110
111 // Definicao de s
112 s = poly(0, 's');

```

```

113
114 // Remover o comentario da funcao desejada para obter os diagramas
115
116 // Entrada Ttheta
117 h = syslin('c', (36.410231-150*s +(2.960e-14)*(s^2)-(7.827e-15)*(s
^3))/(((0.1685303*s^3)+s^4))); // Saida x
118 //h = syslin('c', (12.639769+150*s +(4.607e-14)*(s^2)+(3.636e-15)*(
s^3))/(((0.1685303*s^3)+s^4))); // Saida z
119 //h = syslin('c', (49.05-75*s -(1.998e-15)*(s^2))/(((0.1685303*s^2)
+s^3))); // Saida u
120 //h = syslin('c', (75 +(1.804e-15)*(s))/(((0.1685303*s)+s^2))); //
Saida w
121 //h = syslin('c', (5 +(3.925e-17)*(s))/(s^2)); Saida theta
122
123 // Entrada F
124 //h = syslin('c', (1.3139741 -(4.163e-16)*(s))/(((0.1685303*s)+s^2)
)); // Saida z
125 //h = syslin('c', (1.3139741 )/(((0.1685303)+s))); // Saida w
126
127 // Diagrama de polos
128 f10=scf(1);
129 plzr(h)
130
131 // Diagrama de bode
132 f10=scf(2);
133 clf(); bode(h, 0.01, 1e20);
134
135 //-----
136
137 // Entradas
138 // Torque em phi
139 u1=zeros (t);
140 u1(:)=0;
141
142 // Torque em theta
143 u2=zeros (t);
144 u2(:)=0;
145
146 // Torque em psi
147 u3=zeros (t);
148 u3(:)=0;
149
150 // Forca
151 u4=zeros (t);
152 u4(:)=Fmax;
153
154 // Entrada unitaria
155 u5=zeros (t);
156 u5(:)=1;
157
158 // Matriz U
159 U = [u1; u2; u3; u4; u5];
160
161 // Condiçoes iniciais
162 x0e = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 15*%pi/180; 0; 0; 0; 0];
163
164

```

```

165 // Simulacao
166 [y,x] = csim (U, t, sistema, x0e);
167
168 //-----
169
170 // Variaveis para o plot
171 X = x(1,:);
172 Y = x(2,:);
173 Z = x(3,:);
174 u = x(4,:);
175 v = x(5,:);
176 w = x(6,:);
177 phi = x(7,:);
178 theta = x(8,:);
179 psi = x(9,:);
180 p = x(10,:);
181 q = x(11,:);
182 r = x(12,:);
183
184 // Plot dos graficos de deslocamento e velocidade
185 f10=scf(3);
186 subplot(231)
187 plot(t,X);
188 title("Deslocamento eixo x","fontsize", 3);
189 xlabel("tempo[s]","fontsize",3);
190 ylabel("deslocamento[m]","fontsize",3);
191 rect=[0,0,100,1400];
192 plotframe(rect)
193
194 subplot(232)
195 plot(t,Y);
196 title("Deslocamento no eixo y","fontsize", 3);
197 xlabel("tempo[s]","fontsize", 3);
198 ylabel("deslocamento[m]","fontsize",3);
199
200 subplot(233)
201 plot(t,Z);
202 title("Deslocamento no eixo z","fontsize", 3);
203 xlabel("tempo[s]","fontsize", 3);
204 ylabel("deslocamento[m]","fontsize",3);
205
206 subplot(234)
207 plot(t,u);
208 title("Velocidade no eixo x","fontsize", 3);
209 xlabel("tempo[s]","fontsize", 3);
210 ylabel("velocidade[m/s]","fontsize",3);
211
212 subplot(235)
213 plot(t,v);
214 title("Velocidade no eixo y","fontsize", 3);
215 xlabel("tempo[s]","fontsize", 3);
216 ylabel("velocidade[m/s]","fontsize",3);
217
218 subplot(236)
219 plot(t,y(6,:));
220 title("Velocidade no eixo z","fontsize", 3);
221 xlabel("tempo[s]","fontsize", 3);

```

```

222 ylabel("velocidade[m/s]", "fontsize", 3);
223
224 // Plot dos graficos de deslocamento e velocidade angular
225 f10=scf(4);
226 subplot(231)
227 plot(t, phi);
228 title("Deslocamento angular no eixo x", "fontsize", 3);
229 xlabel("tempo[s]", "fontsize", 3);
230 ylabel("${\phi}[rad]", "fontsize", 4);
231
232 subplot(232)
233 plot(t, theta);
234 title("Deslocamento angular no eixo y", "fontsize", 3);
235 xlabel("tempo[s]", "fontsize", 3);
236 ylabel("${\theta}[rad]", "fontsize", 4);
237 rect=[0, -1, 100, 1];
238 plotframe(rect)
239
240 subplot(233)
241 plot(t, psi);
242 title("Deslocamento angular no eixo z", "fontsize", 3);
243 xlabel("tempo[s]", "fontsize", 3);
244 ylabel("${\psi}[rad]", "fontsize", 4);
245
246 subplot(234)
247 plot(t, p);
248 title("Velocidade angular no eixo x", "fontsize", 3);
249 xlabel("tempo[s]", "fontsize", 3);
250 ylabel("${\dot{\varphi}}[rad/s]", "fontsize", 4);
251
252 subplot(235)
253 plot(t, q);
254 title("Velocidade angular no eixo y", "fontsize", 3);
255 xlabel("tempo[s]", "fontsize", 3);
256 ylabel("${\dot{\theta}}[rad/s]", "fontsize", 4);
257 rect=[0, -1, 100, 1];
258 plotframe(rect)
259
260 subplot(236)
261 plot(t, r);
262 title("Velocidade angular no eixo z", "fontsize", 3);
263 xlabel("tempo[s]", "fontsize", 3);
264 ylabel("${\dot{\psi}}[rad/s]", "fontsize", 4);

```