

ARTHUR HENRIQUE GOMES DE PINHO 10379756
HENRIQUE PIRES DE MORAES AQUINO 10772543
PEDRO LEONEL GIANNONI DE OLIVEIRA 10335569
MURILO MARCELINO BONO 10274565

ANÁLISE DA MODELAGEM DA MECÂNICA DE UM PEIXE ROBÓTICO

São Paulo
30 de novembro de 2020

ARTHUR HENRIQUE GOMES DE PINHO 10379756
HENRIQUE PIRES DE MORAES AQUINO 10772543
PEDRO LEONEL GIANNONI DE OLIVEIRA 10335569
MURILO MARCELINO BONO 10274565

ANÁLISE DA MODELAGEM DA MECÂNICA DE UM PEIXE ROBÓTICO

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para conclusão de disciplina obrigatória do curso de Engenharia Mecânica.

Área de Concentração:

Modelagem de Sistemas Dinâmicas

Orientador:

Prof. Dr. Décio Donha

Prof. Dr. Agenor Fleury

São Paulo
30 de novembro de 2020

RESUMO

O trabalho visa a modelagem física e matemática de um peixe robótico. O tema exige um conhecimento profundo de múltiplas áreas do conhecimento da Engenharia Mecânica e permite avanços nos estudos voltados a Veículos Não-Tripulados Subaquáticos (AUVs). Inicialmente, foi feito o modelo físico e a modelagem matemática a partir das equações de Lagrange-Euler e das definições hidrodinâmicas de força de arrasto, de sustentação e de inércia. A partir das equações, posteriormente linearizadas por expansão em série de Taylor, foi possível verificar que o sistema, de sexta ordem, é marginalmente estável, e com comportamentos de ordens inferiores. Além disso, foram feitas simulações no domínio da frequência e do tempo, com uso dos diagramas de bode, dos sinais elementares e da matriz de transição, permitindo reafirmar a estabilidade marginal e compreender o comportamento do mecanismo.

Palavras-Chave – Peixe Robótico, Modelagem, Marginalmente Estável, Hidrodinâmica, Lagrange-Euler.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Protótipo de Peixe Robótico com Autopropulsão	p. 1
3.1	Modelo Físico Referência	p. 3
3.2	Modelo Físico proposto	p. 5
4.1	Parâmetros Dimensionais do Modelo	p. 6
4.2	Força de Sustentação no Peixe Robótico	p. 10
4.3	Força de Inércia no Peixe Robótico	p. 11
6.1	Diagrama de Blocos do Sistema	p. 18
8.1	Mapa de polos do sistema	p. 22
10.1	Diagrama de Bode para Saída \dot{x}_G e entrada F_{prop}	p. 27
10.2	Diagrama de Bode para Saída x_G e entrada F_{prop}	p. 27
10.3	Diagrama de Bode para Saída \dot{x}_G e entrada F_{Dcte}	p. 28
10.4	Diagrama de Bode para Saída x_G e entrada F_{Dcte}	p. 28
10.5	Diagrama de Bode para Saída $\dot{\theta}_2$ e entrada T	p. 29
10.6	Diagrama de Bode para Saída θ_2 e entrada T	p. 30
10.7	Diagrama de Bode para Saída $\dot{\theta}_3$ e entrada T	p. 30
10.8	Diagrama de Bode para Saída θ_3 e entrada T	p. 31
11.1	Resposta de x_G e \dot{x}_G para impulso de F_{prop}	p. 33
11.2	Resposta de x_G e \dot{x}_G para impulso de F_{Dcte}	p. 33
11.3	Resposta de θ_2 , $\dot{\theta}_2$, θ_3 e $\dot{\theta}_3$ para impulso de T	p. 34
11.4	Resposta de x_G para rampa de F_{prop}	p. 35
11.5	Resposta de \dot{x}_G para rampa de F_{prop}	p. 35
11.6	Resposta de x_G para rampa de F_{Dcte}	p. 36
11.7	Resposta de \dot{x}_G para rampa de F_{Dcte}	p. 36

11.8	Resposta de θ_2 e $\dot{\theta}_2$ para rampa de T	p. 37
11.9	Resposta de θ_3 e $\dot{\theta}_3$ para rampa de T	p. 37
11.10	Resposta de x_G para degrau de F_{prop}	p. 38
11.11	Resposta de \dot{x}_G para degrau de F_{prop}	p. 38
11.12	Resposta de x_G para degrau de F_{Dcte}	p. 39
11.13	Resposta de \dot{x}_G para degrau de F_{Dcte}	p. 39
11.14	Resposta de θ_2 , $\dot{\theta}_2$, θ_3 e $\dot{\theta}_3$ para degrau de T	p. 40
11.15	Resposta de x_G e \dot{x}_G para F_{prop} senoidal	p. 41
11.16	Resposta de x_G e \dot{x}_G para F_{Dcte} senoidal	p. 41
11.17	Resposta de θ_2 , $\dot{\theta}_2$, θ_3 e $\dot{\theta}_3$ para T senoidal	p. 42
11.18	Respostas transversais para condição inicial não nula	p. 44
11.19	Visualização da resposta transversal	p. 44
11.20	Respostas angulares para condição inicial não nula	p. 45
11.21	Simulação com tempo elevado	p. 46
11.22	Visualização da resposta angular	p. 46
11.23	Resposta de translação para variáveis angulares iniciais não nulas	p. 47
11.24	Respostas angulares para variáveis angulares iniciais não nulas	p. 48
11.25	Resposta de translação para variáveis angulares iniciais não nulas	p. 49
11.26	Respostas angulares para variáveis angulares iniciais não nulas	p. 49

LISTA DE TABELAS

7.1	Parâmetros numéricos do sistema	p. 19
8.1	Zeros do sistema	p. 23
9.1	Análise de estabilidade por Routh-Hurwitz.	p. 25
10.1	Características do Sistema no Domínio da Frequência	p. 26

SUMÁRIO

1	Introdução	p. 1
2	Objetivos e Justificativa	p. 2
2.1	Objetivos	p. 2
2.2	Justificativa	p. 2
2.3	Restrições de Projeto	p. 2
3	Modelo Físico	p. 3
3.1	Bibliografia base	p. 3
3.2	Variáveis de interesse para o sistema	p. 4
3.3	Hipóteses simplificadoras	p. 4
3.4	Modelo proposto	p. 5
4	Modelagem Matemática	p. 6
4.1	Parâmetros Dimensionais	p. 6
4.2	Equações Básicas do Mecanismo	p. 7
4.2.1	Aplicação para o Movimento Linear	p. 7
4.2.2	Aplicação para o Movimento Angular	p. 8
4.2.2.1	Substituição nas Equações de Lagrange Euler	p. 8
4.3	Avaliação das Forças Hidrodinâmicas	p. 9
4.3.1	Velocidade Relativa do Escoamento (U)	p. 9
4.3.2	Força de Sustentação	p. 10
4.3.2.1	Adaptação para caso particular	p. 10
4.3.3	Força de Inércia	p. 11
4.3.4	Força de Arrasto	p. 12

4.4	Equações de Movimento	p. 13
4.5	Linearização das Equações	p. 14
4.5.1	Ponto de Operação	p. 14
4.5.2	Equações Linearizadas	p. 14
4.5.3	Definição da Força de Propulsão	p. 15
5	Espaço de Estados	p. 16
5.1	Estruturação com vetor de estados	p. 16
5.2	Espaço de Estados Final	p. 17
6	Diagrama de Blocos do Sistema	p. 18
7	Valores dos Parâmetros	p. 19
8	Descrição no Domínio da Frequência	p. 20
8.1	Transformada de Laplace	p. 20
8.2	Determinação das Funções de Transferência	p. 20
8.3	Polos e Zeros	p. 21
8.3.1	Determinação dos Polos	p. 21
8.3.1.1	Polos Dominantes	p. 23
8.3.2	Determinação dos Zeros	p. 23
9	Análise de Estabilidade	p. 24
9.1	Análise do Mapa de Polos	p. 24
9.2	CrITÉrio de Routh-Hurwitz	p. 24
10	Respostas do Sistema no Domínio da Frequência	p. 26
10.1	Frequências Naturais e Coeficientes de Amortecimento	p. 26
10.2	Diagramas de Bode	p. 26
10.2.1	Respostas x_G e \dot{x}_G para as entradas F_{prop} e F_{Dcte}	p. 27

10.2.2	Respostas θ_2 e $\dot{\theta}_2$ para a entrada T	p. 29
10.2.3	Respostas θ_3 e $\dot{\theta}_3$ para a entrada T	p. 30
11	Respostas do Sistema no Domínio do Tempo	p. 32
11.1	Condições iniciais	p. 32
11.2	Resposta ao impulso	p. 33
11.3	Resposta à entrada em rampa	p. 34
11.4	Resposta ao degrau	p. 37
11.5	Resposta à entrada senoidal	p. 40
11.6	Matriz de Transição	p. 42
11.6.1	x_{G_0} e \dot{x}_{G_0} diferentes de zero	p. 43
11.6.2	θ_{2_0} , $\dot{\theta}_{2_0}$, θ_{3_0} e $\dot{\theta}_{3_0}$ diferentes de zero	p. 45
11.7	Comportamento do sistema não-linear	p. 47
11.7.1	Forças externas nulas	p. 47
11.7.2	Forças externas não nulas	p. 48
12	Verificação da hipótese inicial	p. 50
13	Conclusão	p. 51
	Referências	p. 53
	Anexo A – Códigos	p. 55

1 INTRODUÇÃO

“Trabalha com gosto e terá o gosto do trabalho.”

-- Benjamin Franklin

Em anos recentes, a fascinante abordagem robótica de comportamentos e movimentos biológicos têm sido cada vez mais explorada. Como um exemplo, observa-se o crescente desenvolvimento de animais biônicos pela empresa FESTO®, como o BionicKangaroo (GRAICHEN et al., 2015) e o AquaPenguin. Segundo a companhia, o estudo dos princípios da natureza traz inspiração e ideias para novas tecnologias e aplicações industriais.

Neste campo de estudo, destaca-se o foco dado a peixes e demais animais aquáticos, justificada pela motivação em se obter Veículos Não-Tripulados Subaquáticos (AUVs) com maior eficiência e manobrabilidade (YU; WANG, 2005). O estudo realizado por Duraisamy, Sidharthan e Santhanakrishnan (2019) apresenta um resumo dos principais aspectos e descobertas de pesquisas envolvendo o estudo de peixes robóticos.

Dentre as vertentes mais citadas no estudo dos peixes, encontra-se a capacidade de autopropulsão. Buscando, pois, compreender mais profundamente sua dinâmica, diversos pesquisadores se debruçaram sobre análises a respeito da modelagem e controle dos peixes robóticos e apresentaram, ainda, protótipos e dispositivos com características significativamente similares às encontradas na natureza (SHAO; WANG; YU, 2008; LIGHTHILL, 1960; KIM et al., 2008; VO et al., 2009), como o apresentado na Figura 1.1, desenvolvido por Malec, Morawski e Zajac (2010).

Figura 1.1: Protótipo de Peixe Robótico com Autopropulsão



Fonte: Malec, Morawski e Zajac (2010)

2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

2.1 Objetivos

Dado o cenário apresentado, o presente trabalho tem por intenção: **desenvolver a modelagem dinâmica de um peixe robótico com capacidade de autopropulsão, dada uma entrada conhecida de um atuador**. Como objetivos secundários, espera-se verificar a estabilidade do sistema e analisar as respostas individuais de cada saída frente à diferentes entradas, por meio de funções de transferência e simulação computacional, além de colaborar para o avanço dos estudos já existentes.

2.2 Justificativa

O estudo da modelagem de um peixe robótico, além de se enquadrar como um projeto completo quanto ao estudo de modelagem, promove um avanço no estudo do desenvolvimento e otimização de tecnologia subaquática, sendo, pois, de grande interesse e importância para o Engenheiro Mecânico.

2.3 Restrições de Projeto

Dado o objetivo proposto, é necessário que o projeto se enquadre em determinadas restrições, as quais serão confirmadas ao final do projeto:

- Modelo físico proposto deve se adequar à necessidade de obtenção de um modelo matemático analítico, com uso de fundamentos da mecânica clássica como Teoremas de Newton e Equações de Lagrange-Euler.
- Visando já um futuro controle, deve-se obter um modelo físico que não leve a um sistema instável por conveniência.

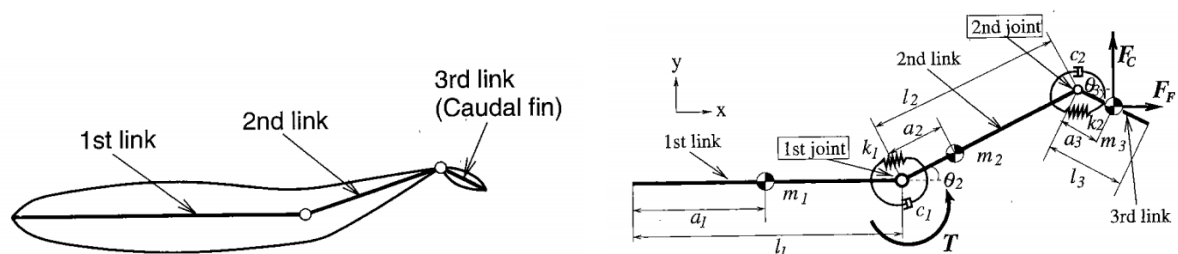
3 MODELO FÍSICO

3.1 Bibliografia base

A fim de se ter uma referência adequada para dar suporte ao projeto, buscou-se identificar propostas que se aproximassem dos objetivos deste trabalho. Despertou, pois, interesse o modelo físico sugerido por Nakashima, Ohgishi e Ono (2003), o qual remete ao estudo do peixe carangiforme. Este peixe possui um dos tipos básicos de nado apresentados por Duraisamy, Sidharthan e Santhanakrishnan (2019), o qual apresenta movimento oscilatório concentrado em 1/3 do corpo (parte traseira), sendo praticamente desprezível em sua parte dianteira. Além disso, este tipo de peixe dispõe do nado mais rápido, uma vez que tem pedúnculo caudal estreito e nadadeira caudal rígida, o que aumenta seu impulso e reduz as forças de resistência laterais.

Dadas tais características, Nakashima, Ohgishi e Ono (2003) propõem o estudo de um modelo de três barras rígidas com um único atuador, localizado entre a primeira e a segunda barra. Este modelo, apesar de simples, conta com uma abordagem completa do modelo, tratando de forças hidrodinâmicas responsivas ao movimento da cauda, como apresentado na Figura 3.1.

Figura 3.1: Modelo Físico Referência



Fonte: Nakashima, Ohgishi e Ono (2003)

3.2 Variáveis de interesse para o sistema

Apesar de completo, o estudo de Nakashima, Ohgishi e Ono (2003) limita-se apenas à análise das variáveis angulares das barras da cauda, desprezando o deslocamento transversal do peixe (direção x da Figura 3.1). O autor justifica a simplificação tratando o sistema como dentro de um tanque com fluxo constante de água em sentido contrário ao do peixe, de tal forma que é abordada uma dinâmica necessária para que o peixe se mantenha na mesma posição.

Este projeto também trará a abordagem de que o peixe nada contra uma correnteza, mantendo-se praticamente imóvel quanto ao deslocamento transversal. Porém, este estudo aprofundará esta abordagem, de tal forma a avaliar separadamente os deslocamentos e as velocidades na direção x do peixe. Ou seja, serão ainda utilizadas as aproximações para definição das variáveis angulares, porém será avaliado em paralelo o comportamento das variáveis lineares, verificando principalmente suas amplitudes. Com isso, espera-se verificar se estes deslocamentos são de fato desprezíveis, e, portanto, se tal aproximação não afeta significativamente o modelo. Dessa forma, entende-se que será possível aprimorar as pesquisas tomadas como base e contribuir para o avanço do estudo de robôs auto-propulsores.

Sendo assim, serão avaliadas as seguintes variáveis, melhores representadas posteriormente na Figura 3.2:

- x_G : deslocamento transversal do centro de massa do peixe;
- \dot{x}_G : velocidade transversal do centro de massa do peixe;
- θ_2 : ângulo da segunda barra;
- $\dot{\theta}_2$: velocidade angular da segunda barra;
- θ_3 : ângulo da terceira barra;
- $\dot{\theta}_3$: velocidade angular da terceira barra.

3.3 Hipóteses simplificadoras

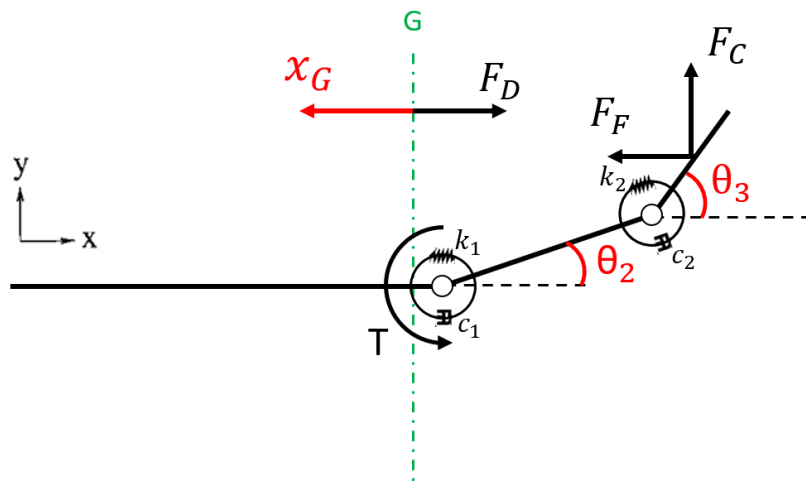
Baseando-se no modelo proposto por Nakashima, Ohgishi e Ono (2003), as seguintes hipóteses serão consideradas:

- Sistema composto por três barras rígidas unidimensionais, de massa concentrada no centro de massa;
- Primeira barra sem movimento angular (oscilação em $\approx 1/3$ do corpo) e sem deslocamento na direção do eixo y ;
- Forças hidrodinâmicas de inércia (F_J) e sustentação (F_V) aplicadas apenas na nadadeira caudal;
- Força de arrasto (F_D) resistiva aplicada no centro de massa do sistema;
- Influência desprezível da força de arrasto nos deslocamentos e velocidades angulares;
- Movimento no eixo z será desprezado (desprezados efeitos de gravidade e flutuação);
- Oscilações pequenas em torno do ponto de operação;
- Vibrações do atuador desprezíveis;
- Atuador com massa desprezível.

3.4 Modelo proposto

Por fim, obtém-se um modelo físico muito similar ao adotado na referência, porém com adição da análise do movimento transversal e da força de arrasto resistiva (Figura 3.2). São utilizadas molas nas uniões das barras de constantes k_1 e k_2 , necessárias para a auto-excitação do peixe, assim como amortecedores de coeficientes c_1 e c_2 . F_D representa a força de arrasto, enquanto F_F e F_C representam as resultantes das forças hidrodinâmicas nas direções de x e y . Por fim, o torque aplicado é representado por T , entre a primeira e segunda barra.

Figura 3.2: Modelo Físico proposto



Fonte: autores.

4 MODELAGEM MATEMÁTICA

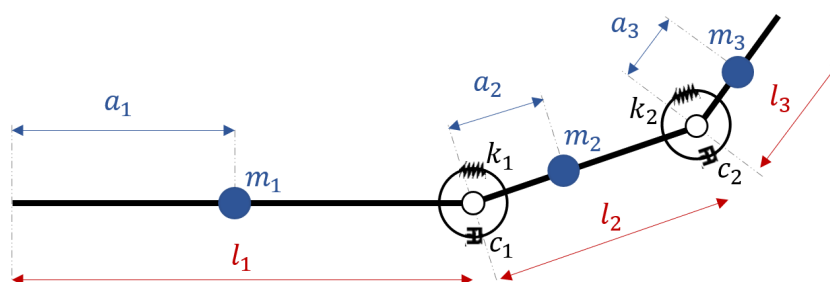
A partir do modelo físico apresentado, foi desenvolvida a modelagem matemática do sistema. Para tanto, foram aplicadas as Equações de Lagrange-Euler, bem como os conceitos de forças hidrodinâmicas de sustentação e de inércia. O intuito desta etapa certamente foi a compreensão profunda do mecanismo selecionado e a preparação matemática para futuras simulações da resposta do sistema para entradas díspares.

Esta modelagem será de grande utilidade tanto para o presente trabalho quanto para possíveis continuações, visando, por exemplo, o controle do sistema ou até mesmo o dimensionamento e prototipação.

4.1 Parâmetros Dimensionais

Inicialmente, serão esclarecidas as notações dos parâmetros dimensionais a serem utilizados nos cálculos posteriores. Estas variáveis são apresentadas visualmente na Figura 4.1, onde m representa a massa da barra, l representa o seu comprimento, a condiz com a distância entre o início da barra e o centro de massa e k e c são as constantes elástica e de amortecimento, como já mencionado. Além disso, os índices subscritos (1, 2 e 3) indicam a qual barra o parâmetro se refere, os quais serão utilizados mais adiante para demais notações.

Figura 4.1: Parâmetros Dimensionais do Modelo



Fonte: autores.

4.2 Equações Básicas do Mecanismo

Inicialmente, foi desenvolvido o equacionamento do sistema, mantendo ainda desconhecidas as forças hidrodinâmicas atuantes. Para o cálculo das variáveis angulares, utilizou-se das Equações de Lagrange-Euler, tais como descritas por Ogata (1982) e França e Matsumura (2011), representadas pelas Equação 4.1.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial N}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^{ext} \quad (4.1)$$

Sendo que:

- $L = T_c - V$: Lagrangeano;
- N : Energia de Amortecimento;
- V : Energia Potencial Total;
- Q_i^{ext} : Forças externas generalizadas;
- T_c : Energia Cinética Total;
- q_i e \dot{q}_i : Coordenadas generalizadas.

Para a definição do movimento linear, foi utilizada a equação que descreve a Segunda Lei de Newton, representada pela Equação 4.2.

$$M \cdot \ddot{x} = F_R \quad (4.2)$$

Onde F_R representa a força resultante aplicada, m refere-se à massa e a indica a aceleração adquirida pelo corpo.

4.2.1 Aplicação para o Movimento Linear

Primeiramente, obtém-se facilmente o comportamento que descreve o movimento linear, chegando à Equação 4.3. Destaca-se que as variáveis m_1 , m_2 e m_3 representam as massas das três barras e que é considerado o sentido positivo do eixo x para a direita.

$$(m_1 + m_2 + m_3) \cdot \ddot{x}_G = F_F + F_D \quad (4.3)$$

Já é perceptível, pois, que, para uma estabilização do peixe, é necessário que a força F_F seja aproximadamente o oposto da força de arrasto.

4.2.2 Aplicação para o Movimento Angular

Para aplicação do método de Lagrange-Euler, é necessário determinar o centro de massa e suas velocidades para cada barra, obtendo-se, pois, as relações apresentadas nas Equações 4.4 a 4.7.

$$G_2 = (l_1 + a_2 \cos \theta_2) \vec{i} + (a_2 \sin \theta_2) \vec{j} \quad (4.4)$$

$$\dot{G}_2 = (-a_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2) \vec{i} + (a_2 \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2) \vec{j} \quad (4.5)$$

$$G_3 = (l_1 + l_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \theta_3) \vec{i} + (l_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_3) \vec{j} \quad (4.6)$$

$$\dot{G}_3 = (-l_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 - a_3 \sin \theta_3 \cdot \dot{\theta}_3) \vec{i} + (l_2 \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 + a_3 \cos \theta_3 \cdot \dot{\theta}_3) \vec{j} \quad (4.7)$$

Com isso, chegou-se à equação da energia cinética, assim como, posteriormente, às demais equações, descritas de 4.8 a 4.12.

$$T_c = \frac{m_2 a_2^2 \dot{\theta}_2^2}{2} + \frac{m_3 a_3^2 \dot{\theta}_3^2}{2} + \frac{m_2}{2} ((-a_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2)^2 + (a_2 \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2)^2) + \\ + \frac{m_3}{2} ((-l_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 - a_3 \sin \theta_3 \cdot \dot{\theta}_3)^2 + (l_2 \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 + a_3 \cos \theta_3 \cdot \dot{\theta}_3)^2) \quad (4.8)$$

$$V = \frac{k_1 \theta_2^2}{2} + \frac{k_2 (\theta_3 - \theta_2)^2}{2} \quad (4.9)$$

$$N = \frac{c_1 \dot{\theta}_2^2}{2} + \frac{c_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2)^2}{2} \quad (4.10)$$

$$Q_{\theta_2}^{ext} = T - F_F \cdot l_2 \sin \theta_2 + F_C \cdot l_2 \cos \theta_2 \quad (4.11)$$

$$Q_{\theta_3}^{ext} = -F_F \cdot a_3 \sin \theta_3 + F_C \cdot a_3 \cos \theta_3 \quad (4.12)$$

Como, mencionado, para o cálculo destas, as variáveis x e \dot{x} foram desprezadas, assim como a força F_D .

4.2.2.1 Substituição nas Equações de Lagrange Euler

Por fim, substituindo as expressões nas equações de Lagrange-Euler e aplicando as derivadas parciais, chegamos às equações iniciais do movimento angular, apresentadas na Equação 4.13 já na forma matricial.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{3m_2a_2^2}{2} + m_3l_2^2 & m_3a_3l_2\cos(\theta_3 - \theta_2) \\ m_3a_3l_2\cos(\theta_3 - \theta_2) & \frac{3m_2a_2^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 0 & -m_3a_3l_2\sin(\theta_3 - \theta_2) \\ m_3a_3l_2\sin(\theta_3 - \theta_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T - F_F \cdot l_2\sin\theta_2 + F_C \cdot l_2\cos\theta_2 \\ -F_F \cdot a_3\sin\theta_3 + F_C \cdot a_3\cos\theta_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Como esperado, estes resultados são condizentes com os apresentados por Nakashima, Ohgishi e Ono (2003) para os movimentos angulares, o que valida a modelagem desenvolvida por Lagrange-Euler.

4.3 Avaliação das Forças Hidrodinâmicas

Partindo, pois, das equações básicas encontradas, faz-se necessário avaliar o comportamento das resultantes das forças hidrodinâmicas (F_F e F_C), as quais derivam das forças de sustentação e de inércia. Estas, como antes mencionado, não são definidas como forças externas, uma vez que surgem apenas perante movimentação do sistema.

Sua compreensão aprofundada será, portanto, imprescindível para a determinação do restante da modelagem.

4.3.1 Velocidade Relativa do Escoamento (U)

Antes da verificação das forças, é necessário definir a velocidade relativa do escoamento sobre o peixe, a qual será utilizada para as forças seguintes.

$$U^2 = U_m^2 + u^2 \tag{4.14}$$

A velocidade relativa será a soma vetorial da velocidade do escoamento externo (U_m) e da velocidade na direção y da terceira barra (u). O seu módulo é expresso conforme a Equação 4.14. Além disso, u é determinado conforme a Equação 4.15.

$$u = \dot{G}_3 \vec{j} = l_2 \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 + a_3 \cos \theta_3 \cdot \dot{\theta}_3 \quad (4.15)$$

4.3.2 Força de Sustentação

A primeira força envolvida no sistema é a força de sustentação. Destaca-se que esta força, a qual em aeronaves é responsável pela sustentação de fato, implica no peixe robótico uma ação lateral ao corpo do peixe e também contrária ao sentido do movimento transversal.

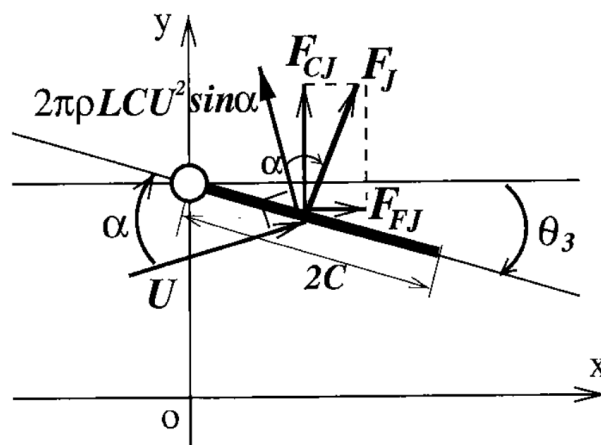
Sua definição matemática, utilizada por Nakashima, Ohgishi e Ono (2003) e autores posteriores como Vo et al. (2009) e Suebsaiprom e Lin (2012), derivam da equação primária de força de sustentação (F_L - *Lift Force*), tal como utilizado em modelagem aeronáutica. Esta equação, tal como definido por White (1962), é descrita pela Equação 4.16.

$$F_L = \frac{C_L \cdot \rho \cdot V^2 \cdot A_{ref}}{2} \quad (4.16)$$

Onde C_L se refere ao coeficiente de sustentação, o qual apresenta correlação direta com o ângulo de ataque do corpo em relação ao escoamento, ρ representa a massa específica do fluido, V é a velocidade do escoamento externo e A_{ref} é a área de referência adotada para aplicação da sustentação.

4.3.2.1 Adaptação para caso particular

Figura 4.2: Força de Sustentação no Peixe Robótico



Fonte: (NAKASHIMA; OHGISHI; ONO, 2003).

No estudo dos peixes robóticos, utiliza-se a referência F_J para indicação e faz-se uso de uma abordagem específica, a qual define a força vetorialmente como apresentado na Figura 4.2 e matematicamente como na Equação 4.17.

$$F_J = 2\pi\rho LCU^2 \text{sen}\alpha \text{ cos}\alpha \quad (4.17)$$

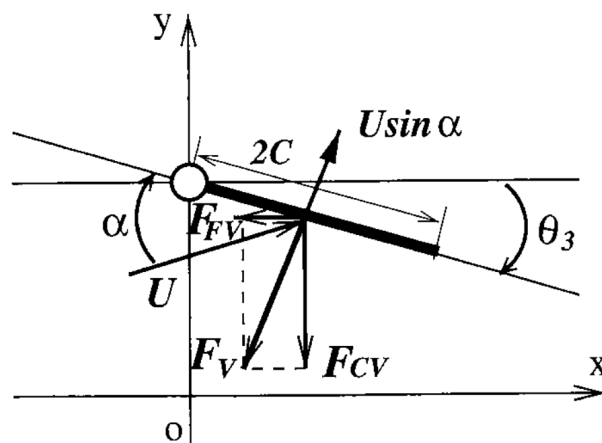
A Figura 4.2 apresenta apenas a barra referente à nadadeira caudal do peixe, uma vez que sua ação é considerada apenas neste elo. Nela, observamos um θ_3 suposto negativo e a força de sustentação inicialmente perpendicular à velocidade relativa do escoamento (U), definida como $2\pi\rho LCU^2 \text{sen}\alpha$. Com um ângulo de ataque α , é calculada a força que age perpendicularmente à barra, chegando, pois, à Equação 4.17.

Destaca-se que $2C$ indica o comprimento da nadadeira, enquanto L reflete o comprimento de sua corda (NAKASHIMA; OHGISHI; ONO, 2003). Com, isso, é calculada a área de referência como os dois lados de uma composição de duas elipses, cada qual com área $A_{elipse} = \pi LC$.

Por fim, a principal adaptação realizada é referente ao coeficiente C_L . Devido à constante variação do ângulo de ataque da nadadeira do peixe, a qual oscila rapidamente, faz-se possível e conveniente a aproximação de $C_L \approx \text{sen}\alpha$, a qual é utilizada não só por Nakashima, mas também por Vo et al. (2009), Shao, Wang e Yu (2008), Suebsaiprom e Lin (2012) e Kim et al. (2008).

4.3.3 Força de Inércia

Figura 4.3: Força de Inércia no Peixe Robótico



Fonte: (NAKASHIMA; OHGISHI; ONO, 2003).

A força de inércia, por sua vez, é definida como proporcional à aceleração do corpo, porém com sentido oposto. Neste caso, será a principal responsável pela auto-propulsão do mecanismo, levando, também, a forças laterais atuantes na nadadeira caudal.

A definição proposta pela revisão de Duraisamy, Sidharthan e Santhanakrishnan (2019) e aplicada por Nakashima, Ohgishi e Ono (2003) descreve a força matematicamente como na Equação 4.18, onde V_P a velocidade perpendicular à barra e, portanto, $\dot{V}_P = \dot{U} \operatorname{sen} \alpha + \dot{\alpha} U \operatorname{cos} \alpha$. Seu comportamento vetorial é graficamente observado na Figura 4.3.

$$F_V = \pi \rho L C^2 \dot{V}_P = \pi \rho L C^2 (\dot{U} \operatorname{sen} \alpha + \dot{\alpha} U \operatorname{cos} \alpha) \quad (4.18)$$

4.3.4 Força de Arrasto

Por fim, temos a força de arrasto, atuante na direção transversal do sistema e influente apenas nas variáveis lineares por conveniência. Esta força, semelhante ao caso de dinâmicas aéreas, implica em uma resistência ao movimento do corpo, proporcional ao quadrado da velocidade relativa do escoamento (WHITE, 1962), como apresentado na Equação 4.19, onde C_D é o coeficiente de arrasto.

$$F_D = \frac{C_D \rho V^2 A_{ref}}{2} \quad (4.19)$$

No estudo de Nakashima, Ohgishi e Ono (2003), esta força é citada e definida da mesma forma, porém não é empregada na análise.

Será utilizada para o presente projeto, como área de referência, a área total do peixe (A_T) para cálculo da F_D . Da mesma forma, utilizaremos a relação $V = U_m - \dot{x}_G$ para definir a velocidade relativa do escoamento externo. Assim, obtém-se a relação apresentada na Equação 4.20.

$$F_D = \frac{C_D \rho A_T}{2} (U_m - \dot{x}_G)^2 \quad (4.20)$$

4.4 Equações de Movimento

Por fim, substituindo as forças hidrodinâmicas nas equações básicas antes definidas, chega-se às equações finais de movimento, definidas pela Equação 4.21, já na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ 0 & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Onde:

- $M_{11} = m_1 + m_2 + m_3$
- $M_{12} = -\pi\rho LC^2 l_2 \theta_3$
- $M_{13} = -\pi\rho LC^2 a_3 \theta_3$
- $M_{22} = \frac{3m_2 a_2^2}{2} + m_3 l_2^2 - F_1 l_2^2 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) \cdot \cos\theta_2$
- $M_{23} = m_3 a_3 l_2 \cdot \cos(\theta_3 - \theta_2) - F_1 l_2 a_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) \cdot \cos\theta_3$
- $M_{32} = m_3 a_3 l_2 \cdot \cos(\theta_3 - \theta_2) - F_1 l_2 a_3 \cdot (\cos^2\theta_3 - \sin^2\theta_3) \cdot \cos\theta_2$
- $M_{33} = \frac{3m_3 a_3^2}{2} - F_1 a_3^2 \cdot (\cos^2\theta_3 - \sin^2\theta_3) \cdot \sin\theta_2$
- $N_1 = \frac{C_D \rho A_T}{2} (U_m - \dot{x}_G)^2$
- $N_2 = m_3 a_3 l_2 \cdot \sin(\theta_3 - \theta_2) \cdot \dot{\theta}_3^2 + F_2 l_2 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) + \tau_1 - \tau_2$
- $N_3 = -m_3 a_3 l_2 \cdot \sin(\theta_3 - \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2^2 + F_2 a_3 (\cos^2\theta_3 - \sin^2\theta_3) + \tau_2$

E:

- $F_1 = \frac{\pi\rho LC^2}{U^2} (u^2 \cos\theta_3 - U_m^2 \cos\theta_3 + 2uU_m \sin\theta_3)$
- $F_2 = -2\pi\rho LC (u \cdot \cos\theta_3 - U_m \sin\theta_3) \cdot (U_m \cos\theta_3 - u \cdot \sin\theta_3) - \pi\rho LC^2 [(u^2 \cos\theta_3 - U_m^2 \cos\theta_3 + 2uU_m \sin\theta_3) \cdot (l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2^2 + a_3 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2^2) \cdot \frac{1}{U^2} - \dot{\theta}_3 (U_m \cos\theta_3 - u \sin\theta_3)]$
- $\tau_1 = -k_1 \theta_2 - c_1 \dot{\theta}_2 + T$
- $\tau_2 = -k_2 (\theta_3 - \theta_2) - c_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2)$

4.5 Linearização das Equações

A linearização do sistema foi feita por meio da expansão em série de Taylor de primeira ordem, em torno de um ponto de operação conveniente. Esta técnica, altamente utilizada em projetos de modelagem e controle, é descrita pela Equação 4.22 (QUEIROZ, 2016).

$$\tilde{f} = f_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{f^{op}} \cdot (x_i - x_i^{op}) \quad (4.22)$$

Como se trata de uma modelagem multivariável, será necessário aplicar a somatória dos termos derivativos para cada variável.

4.5.1 Ponto de Operação

Dada a aproximação de que o peixe apresenta baixos deslocamentos e velocidades lineares, assim como oscila o movimento da cauda em torno da posição de repouso, será definido o ponto de operação com variáveis nulas, tal como na Equação 4.23.

$$\begin{bmatrix} x_{G_{op}} \\ \dot{x}_{G_{op}} \\ \theta_{2_{op}} \\ \dot{\theta}_{2_{op}} \\ \theta_{3_{op}} \\ \dot{\theta}_{3_{op}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

4.5.2 Equações Linearizadas

Isolando os termos de aceleração das equações de movimento e aplicando a expansão de Taylor, obtemos as equações de movimento definidas pela Equação 4.24.

$$\begin{bmatrix} M'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M'_{22} & M'_{23} \\ 0 & M'_{32} & M'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C'_{22} & C'_{23} \\ 0 & C'_{32} & C'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K'_{22} & K'_{23} \\ 0 & K'_{32} & K'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_G \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} \cdot \theta_3 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \\ B_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ F_{Dcte} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Sendo que:

- $M'_{11} = m_1 + m_2 + m_3$
- $M'_{22} = \frac{3m_2a_2^2}{2} + m_3l_3^2 + \pi\rho LC^2l_2^2$
- $M'_{23} = m_3a_3l_2 + \pi\rho LC^2l_2a_3$
- $M'_{32} = m_3a_3l_2 + \pi\rho LC^2l_2a_3$
- $M'_{33} = \frac{3m_3a_3^2}{2} + \pi\rho LC^2a_3^2$
- $C'_{11} = -C_D\rho A_T U_m$
- $C'_{22} = c_1 + c_2 + 2\pi\rho LCU_m l_2^2$
- $C'_{23} = -c_2 + \pi\rho LCU_m(2a_3 - C \cdot U_m)l_2$
- $C'_{32} = -c_2 + 2\pi\rho LCU_m l_2a_3$
- $B'_{11} = \frac{\pi\rho LC^2l_2}{M'_{22}} \cdot \left(1 - \frac{M'_{23}M'_{32}}{M'_{22}M'_{33} - M'_{23}M'_{32}}\right) + \pi\rho LC^2a_3 \left(\frac{M'_{32}M'_{32}}{M'_{22}M'_{33} - M'_{23}M'_{32}}\right)$
- $C'_{33} = c_2 + \pi\rho LCU_m(2a_3 - C \cdot U_m)a_3$
- $K'_{22} = k_1 + k_2$
- $K'_{23} = -k_2 + 2\pi\rho LCU_m^2l_2$
- $K'_{32} = -k_2$
- $K'_{33} = k_2 + 2\pi\rho LCU_m^2a_3$
- $B'_{12} = 1$
- $B'_{21} = 1$
- $B'_{31} = 1$
- $F_{D_{cte}} = \frac{C_D\rho A_T}{2} U_m^2$

Como se pode observar, as equações linearizadas já não apresentam dependência das variáveis auxiliares u e α , sendo somente referentes às variáveis de interesse.

4.5.3 Definição da Força de Propulsão

O mecanismo em análise, mesmo com aplicação da linearização anterior, ainda apresenta a multiplicação da entrada T pela variável θ_3 para determinar o comportamento do movimento em x , indicado junto ao fator B'_{11} .

Este impasse pode ser solucionado por meio da definição de uma nova entrada auxiliar, referente à força de propulsão do peixe, de valor $F_{prop} = T \cdot \theta_3$. Essa variável será considerada nas simulações e definições que se seguem.

Assim, serão tratadas três entradas para o sistema, tal como na Equação 4.25, e verificadas as respostas do sistema para diferentes valores aplicados. O controle propriamente dito será visado em trabalhos posteriores a este, cabendo aqui apenas a verificação do comportamento dinâmico.

$$[u_F] = \begin{bmatrix} F_{prop} \\ T \\ F_{D_{cte}} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

5 ESPAÇO DE ESTADOS

Com uso da expressão já descrita pela Equação 4.24, podemos expressar a dinâmica do movimento seguindo o formato apresentado pelas Equações 5.1 e 5.2.

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot u_F \quad (5.1)$$

$$y = C \cdot X + D \cdot u_F \quad (5.2)$$

O vetor de estados, o vetor de derivadas e o vetor de variáveis observadas são definidos tais como nas Equações 5.3 a 5.5.

$$X = \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ x_G \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_G \\ \dot{x}_G \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$y = \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ x_G \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

5.1 Estruturação com vetor de estados

$$\begin{bmatrix} M'_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M'_{22} & 0 & M'_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M'_{32} & 0 & M'_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ x_G \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C'_{22} & -K'_{22} & -C'_{23} & -K'_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C'_{32} & -K'_{32} & -C'_{33} & -K'_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ x_G \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B'_{11} & 0 & B'_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B'_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B'_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{prop} \\ T \\ F_{Dcte} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Primeiramente, podemos reorganizar a Equação 4.24 utilizando o vetor de estados X , de tal forma a obter a Equação 5.6.

5.2 Espaço de Estados Final

Para obter o sistema em espaço de estados, multiplica-se os dois lados da Equação 5.6 pela inversa da matriz de massas. Com isso, chega-se ao resultado definido pela Equação 5.7, na qual a matriz que acompanha o vetor de estados é a matriz A e a matriz que acompanha as entradas é a matriz B .

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_G \\ \dot{x}_G \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C''_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C''_{22} & K''_{22} & C''_{23} & K''_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C''_{32} & K''_{32} & C''_{33} & K''_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ x_G \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B''_{11} & 0 & B''_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B''_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B''_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{prop} \\ T \\ F_{Dcte} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Em que:

$$\begin{aligned} \bullet C''_{11} &= \frac{C'_{11}}{M'_{11}} & \bullet K''_{32} &= \frac{M'_{32}K'_{22} - M'_{22}K'_{32}}{M'_{33}M'_{22} - M'_{32}M'_{23}} \\ \bullet C''_{22} &= \frac{-M'_{33}C'_{22} + M'_{23}C'_{32}}{M'_{33}M'_{22} - M'_{32}M'_{23}} & \bullet K''_{33} &= \frac{M'_{32}K'_{23} - M'_{22}K'_{33}}{M'_{33}M'_{22} - M'_{32}M'_{23}} \\ \bullet C''_{23} &= \frac{-M'_{33}C'_{23} + M'_{23}C'_{33}}{M'_{33}M'_{22} - M'_{32}M'_{23}} & \bullet B''_{11} &= \frac{B'_{11}}{M'_{11}} \\ \bullet C''_{32} &= \frac{M'_{32}C'_{22} - M'_{22}C'_{32}}{M'_{33}M'_{22} - M'_{32}M'_{23}} & \bullet B''_{12} &= \frac{B'_{12}}{M'_{11}} \\ \bullet C''_{33} &= \frac{M'_{32}C'_{23} - M'_{22}C'_{33}}{M'_{33}M'_{22} - M'_{32}M'_{23}} & \bullet B''_{21} &= 1 - \frac{M'_{23}M'_{32}}{M'_{22}M'_{33} - M'_{23}M'_{32}} \\ \bullet K''_{22} &= \frac{-M'_{33}K'_{22} + M'_{23}K'_{32}}{M'_{33}M'_{22} - M'_{32}M'_{23}} & \bullet B''_{31} &= \frac{M'_{32}}{M'_{22}} \\ \bullet K''_{23} &= \frac{-M'_{33}K'_{23} + M'_{23}K'_{33}}{M'_{33}M'_{22} - M'_{32}M'_{23}} \end{aligned}$$

Além disso, definem-se as matrizes C e D de interesse para o projeto. Como já mencionado, serão adotadas as matrizes conforme as Equações 5.8 e 5.9.

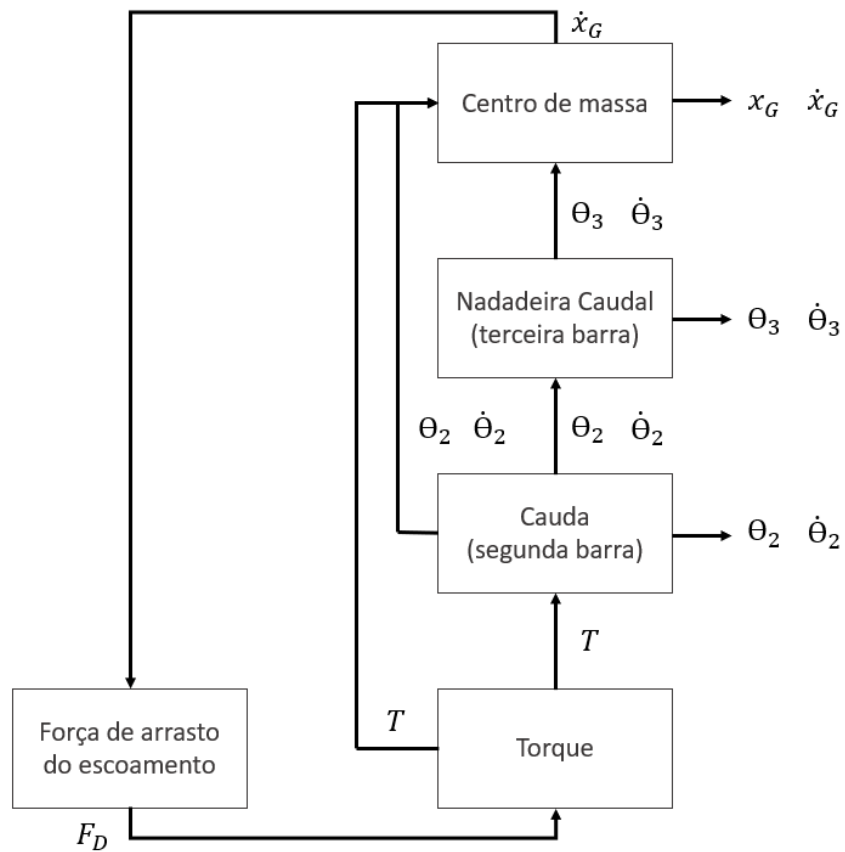
$$C = I_{6 \times 6} \quad (5.8)$$

$$D = 0_{6 \times 3} \quad (5.9)$$

6 DIAGRAMA DE BLOCOS DO SISTEMA

O diagrama de blocos do modelo físico pode ser descrito como na Figura 6.1. Nele, podemos observar a correlação entre as saídas e os elementos externos do escoamento envolvidos.

Figura 6.1: Diagrama de Blocos do Sistema



Fonte: autores.

7 VALORES DOS PARÂMETROS

Feito o estudo completo literal da modelagem, faz-se necessária a definição numérica adequada dos parâmetros utilizados. Dada a fundamentação deste trabalho sobre a bibliografia base de Nakashima, Ohgishi e Ono (2003), optou-se por utilizar dos valores numéricos por eles empregados, os quais podem ser conferidos na Tabela 7.1.

Tabela 7.1: Parâmetros numéricos do sistema

	Definição	Unidade	Magnitude
m_1	Massa da primeira barra	kg	0,40900
m_2	Massa da segunda barra	kg	0,10400
m_3	Massa da terceira barra	kg	0,00900
a_1	Distância do baricentro da primeira barra	m	0,09375
a_2	Distância do baricentro da segunda barra	m	0,02550
a_3	Distância do baricentro da terceira barra	m	0,01500
l_1	Comprimento da primeira barra	m	0,01875
l_2	Comprimento da segunda barra	m	0,06250
l_3	Comprimento da terceira barra	m	0,03000
c_1	Coefficiente de amortecimento da primeira união	Nms/rad	0,00030
c_2	Coefficiente de amortecimento da segunda união	Nms/rad	0,00010
k_1	Coefficiente elástico da primeira união	Nm/rad	0,04910
k_2	Coefficiente elástico da segunda união	Nm/rad	0,00354
ρ	Massa específica da água	kg/m^3	998
L	Comprimento de corda da nadadeira caudal	m	0,07500
C	Semi-comprimento da nadadeira caudal	m	0,01500
A_T	Área total do peixe	m^2	$0,07069 \cdot 10^{-2}$
C_D	Coefficiente de arrasto hidrodinâmico	-	0,50000
U_m	Velocidade aplicada ao escoamento externo	m/s	0,30000

Fonte: autores.

Vale ressaltar que foi realizada uma vasta pesquisa de validação, comparando estes valores com os empregados por demais autores. Duraisamy, Sidharthan e Santhanakrishnan (2019) apresenta, ainda, tabelas com valores típicos utilizados para atuadores e peixes robóticos, dentre os quais se encontram os valores aqui utilizados.

8 DESCRIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

8.1 Transformada de Laplace

Para transpor a análise do sistema, até então no domínio do tempo, para o domínio da frequência, faz-se uso da Transformada de Laplace, tal como apresentado por Ogata (1982). Aplicando a transformada nas Equações 5.1 e 5.2, obtém-se as Equações 8.1 e 8.2.

$$sX(s) - X(0) = sX(s) = A \cdot X(s) + B \cdot u_F(s) \quad (8.1)$$

$$y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot u_F(s) \quad (8.2)$$

8.2 Determinação das Funções de Transferência

A definição matemática da função de transferência ($G(s)$) pode ser calculada por meio do desenvolvimento das Equações 8.1 e 8.2, chegando à expressão definida pela Equação 8.3.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u_F(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D \quad (8.3)$$

O cálculo das funções foi feito com auxílio da função $tf()$ do programa *MATLAB 2015a*[®], cujos resultados são apresentados nas Equações 8.4 a 8.11.

Como o presente trabalho avalia seis saídas, com três entradas, o sistema em tese apresenta dezoito funções de transferência. Todavia, as dez funções de transferência não aqui apresentadas têm valores nulos, expressando uma ausência de correlação entre tais entradas e saídas.

$$G_{\dot{x}_G, F_{prop}} = \frac{15,01s^5 + 0,0654s^4 + 2,348s^3 + 1,1603 \cdot 10^{-3}s^2 + 12,248 \cdot 10^{-4}s}{s^6 + 0,11s^5 + 0,16s^4 + 0,017s^3 + 0,82 \cdot 10^{-4}s^2 + 0,86 \cdot 10^{-5}s} \quad (8.4)$$

$$G_{x_G, F_{prop}} = \frac{15,01s^4 + 0,0654s^3 + 2,348s^2 + 1,1603 \cdot 10^{-3}s + 12,248 \cdot 10^{-4}}{s^6 + 0,11s^5 + 0,16s^4 + 0,017s^3 + 0,82 \cdot 10^{-4}s^2 + 0,86 \cdot 10^{-5}s} \quad (8.5)$$

$$G_{\dot{\theta}_2, T} = \frac{-0,2723s^5 - 0,029s^4 + 0,0019s^3 + 2,05 \cdot 10^{-4}s^2}{s^6 + 0,11s^5 + 0,16s^4 + 0,017s^3 + 0,82 \cdot 10^{-4}s^2 + 0,86 \cdot 10^{-5}s} \quad (8.6)$$

$$G_{\theta_2, T} = \frac{-0,2723s^4 - 0,029s^3 + 0,0019s^2 + 2,05 \cdot 10^{-4}s}{s^6 + 0,11s^5 + 0,16s^4 + 0,017s^3 + 0,82 \cdot 10^{-4}s^2 + 0,86 \cdot 10^{-5}s} \quad (8.7)$$

$$G_{\dot{\theta}_3, T} = \frac{0,1539s^5 + 0,0163s^4 + 0,0197s^3 + 2,09 \cdot 10^{-3}s^2}{s^6 + 0,11s^5 + 0,16s^4 + 0,017s^3 + 0,82 \cdot 10^{-4}s^2 + 0,86 \cdot 10^{-5}s} \quad (8.8)$$

$$G_{\theta_3, T} = \frac{0,1539s^4 + 0,0163s^3 + 0,0197s^2 + 2,09 \cdot 10^{-3}s}{s^6 + 0,11s^5 + 0,16s^4 + 0,017s^3 + 0,82 \cdot 10^{-4}s^2 + 0,86 \cdot 10^{-5}s} \quad (8.9)$$

$$G_{\dot{x}_G, F_{Dcte}} = \frac{s^5 + 0,0044s^4 + 0,1564s^3 + 7,73 \cdot 10^{-5}s^2 + 0,8156 \cdot 10^{-4}s}{s^6 + 0,11s^5 + 0,16s^4 + 0,017s^3 + 0,82 \cdot 10^{-4}s^2 + 0,86 \cdot 10^{-5}s} \quad (8.10)$$

$$G_{x_G, F_{Dcte}} = \frac{s^4 + 0,0044s^3 + 0,1564s^2 + 7,73 \cdot 10^{-5}s + 0,8156 \cdot 10^{-4}}{s^6 + 0,11s^5 + 0,16s^4 + 0,017s^3 + 0,82 \cdot 10^{-4}s^2 + 0,86 \cdot 10^{-5}s} \quad (8.11)$$

8.3 Polos e Zeros

8.3.1 Determinação dos Polos

A determinação dos polos de um sistema pode ser realizada por meio do chamado polinômio característico. Este polinômio é determinado pela Equação 8.12, sendo coincidente com os denominadores de todas as funções de transferência, já antes listadas.

$$p_c(s) = | sI - A | = \det[sI - A] \quad (8.12)$$

Assim, temos que o polinômio característico do sistema em questão pode é descrito como na Equação 8.13.

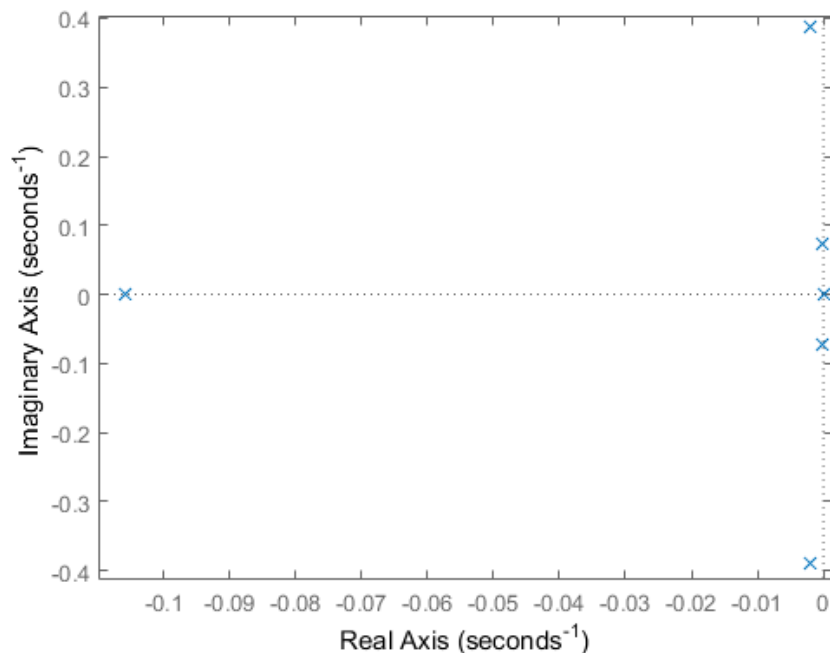
$$p_c(s) = s^6 + 0,11s^5 + 0,16s^4 + 0,017s^3 + 0,82 \cdot 10^{-4}s^2 + 0,86 \cdot 10^{-5}s \quad (8.13)$$

Os polos, então, são definidos como as raízes do polinômio p_c . Seus valores podem ser também calculados por meio da função $pole()$ do *MATLAB 2015a*[®], e são apresentados matricialmente na Equação 8.14.

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0020 + 0,3886i \\ -0,0020 - 0,3886i \\ -0,0002 + 0,0735i \\ -0,0002 - 0,0735i \\ -0,1058 + 0,0000i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

Para melhor visualização, os polos foram dispostos em um gráfico (Figura 8.1), o qual foi feito com auxílio do comando `pzmap()`. Observa-se que a magnitude do polo p_5 é muito superior (cerca de 50 vezes) aos demais polos, o que indica que a resposta esperada do sistema se aproxime de uma resposta de sistema de quinta ordem com ruídos relativos ao polo p_5 . Mais ainda, como os polos p_1 e p_2 tem módulos aproximadamente dez vezes superiores aos de p_3 e p_4 , espera-se que sejam observados certos comportamentos similares ao de um sistema de terceira ordem.

Figura 8.1: Mapa de polos do sistema



Fonte: autores.

8.3.1.1 Polos Dominantes

Os polos denominados dominantes são aqueles que se encontram mais próximos do eixo imaginário. Para defini-los, exclui-se usualmente os polos com valor real de módulo cinco vezes maior que os demais. Neste caso, os polos dominantes do sistema são:

$$p_3 = -0,0002 + 0,0735i \quad p_4 = -0,0002 - 0,0735i$$

8.3.2 Determinação dos Zeros

Quanto aos zeros do sistema, são eles diferentes para cada função de transferência escolhida. Isso, pois os zeros refletem as frequências para as quais determinada resposta será sempre nula, independente do valor de determinada entrada aplicada. Os seus valores podem ser obtidos encontrando as raízes dos polinômios dos numeradores de cada função de transferência, manualmente ou com o auxílio da função `zpkdata()`. Os valores dos zeros das funções de transferência apresentadas na Seção 8.2 são apresentados na Tabela 8.1.

Tabela 8.1: Zeros do sistema

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
$G_{\dot{x}_G, F_{prop}}$	0	-0,0020 + 0,3886i	-0,0020 - 0,3886i	-0,0002 + 0,0735i	-0,0002 - 0,0735i
$G_{x_G, F_{prop}}$	-	-0,0020 + 0,3886i	-0,0020 - 0,3886i	-0,0002 + 0,0735i	-0,0002 - 0,0735i
$G_{\dot{\theta}_2, T}$	0	0	-0,0843	0,0844	-1,058
$G_{\theta_2, T}$	-	0	-0,0843	0,0844	-1,058
$G_{\dot{\theta}_3, T}$	0	0	-0,0025 + 0,3582i	-0,0025 - 0,3582i	-1,058
$G_{\theta_3, T}$	-	0	-0,0025 + 0,3582i	-0,0025 - 0,3582i	-1,058
$G_{\dot{x}_G, F_{Dcte}}$	0	-0,0020 + 0,3886i	-0,0020 - 0,3886i	-0,0002 + 0,0735i	-0,0002 - 0,0735i
$G_{x_G, F_{Dcte}}$	-	-0,0020 + 0,3886i	-0,0020 - 0,3886i	-0,0002 + 0,0735i	-0,0002 - 0,0735i

9 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Foi realizada uma análise de estabilidade do sistema por meio de dois critérios: análise do mapa de polos; e critério de Routh-Hurwitz.

9.1 Análise do Mapa de Polos

A primeira análise pode ser feita por meio da observação do mapa de polos. Visualizando a Figura 8.1 e a Equação 8.14, verificamos que todos os polos se encontram no semiplano esquerdo, havendo um único polo localizado na origem.

Como um dos polos apresenta parte real nula, podemos afirmar que o sistema é marginalmente estável. Ou seja, para estados iniciais finitos X_0 , sem aplicação de torque, a resposta $X(t)$ é limitada. A diferença para um sistema assintoticamente estável é a de que, neste caso, além de limitada a resposta $X(t)$ tenderia a zero no infinito, o que não ocorre para todas as variáveis observadas.

Isso era esperado, uma vez que, para um valor inicial $x_G \neq 0$ ou $\dot{x}_G \neq 0$, a resposta \dot{x}_G tende a zero, porém x_G tende a um valor constante não necessariamente nulo. As demais variáveis angulares apresentam respostas todas limitadas e que tendem a zero.

9.2 Critério de Routh-Hurwitz

A avaliação por este critério se dá através da avaliação da Tabela de Routh-Hurwitz, a qual é desenvolvida a partir da Equação 8.13. Sua construção segue como na Tabela 9.1.

Tabela 9.1: Análise de estabilidade por Routh-Hurwitz.

s^6	1	0,157	0,001
s^5	0,110	0,017	$0,863 \cdot 10^{-4}$
s^4	0,006	$0,406 \cdot 10^{-4}$	
s^3	0,016	$0,863 \cdot 10^{-4}$	
s^2	$0,811 \cdot 10^{-5}$		
s^1	$0,863 \cdot 10^{-4}$		
s^0	0,010		

Fonte: autores.

Segundo o critério, o fato de que não há troca de sinais na primeira coluna da tabela indica que o sistema não é instável, como no critério anterior. Ainda, o fato de que há uma raiz do polinômio igual a zero, o sistema é dito marginalmente estável, novamente coerente com o já apresentado e esperado.

10 RESPOSTAS DO SISTEMA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

10.1 Frequências Naturais e Coeficientes de Amortecimento

Por meio dos polos definidos na Equação 8.14 e com auxílio da função *damp()* do programa *MATLAB 2015a*[®], são determinadas as frequências naturais (ω_n), os coeficientes de amortecimento (ζ) e as constantes de tempo (τ) do sistema, tais como apresentadas nas Tabela 10.1.

Tabela 10.1: Características do Sistema no Domínio da Frequência

Polo	ζ	ω_n (rad/s)	τ (s)
0,0	-	0,0	∞
$-0,0002 + 0,0735i$	$2,51 \cdot 10^{-3}$	$7,12 \cdot 10^{-4}$	$5,43 \cdot 10^3$
$-0,0002 - 0,0735i$	$2,51 \cdot 10^{-3}$	$7,12 \cdot 10^{-4}$	$5,43 \cdot 10^3$
$-0,0020 + 0,3886i$	$5,16 \cdot 10^{-3}$	$3,89 \cdot 10^{-1}$	$4,99 \cdot 10^2$
$-0,0020 - 0,3886i$	$5,16 \cdot 10^{-3}$	$3,89 \cdot 10^{-1}$	$4,99 \cdot 10^2$
-0,1058	1,00	$1,06 \cdot 10^{-1}$	$9,45 \cdot 10^2$

Fonte: autores.

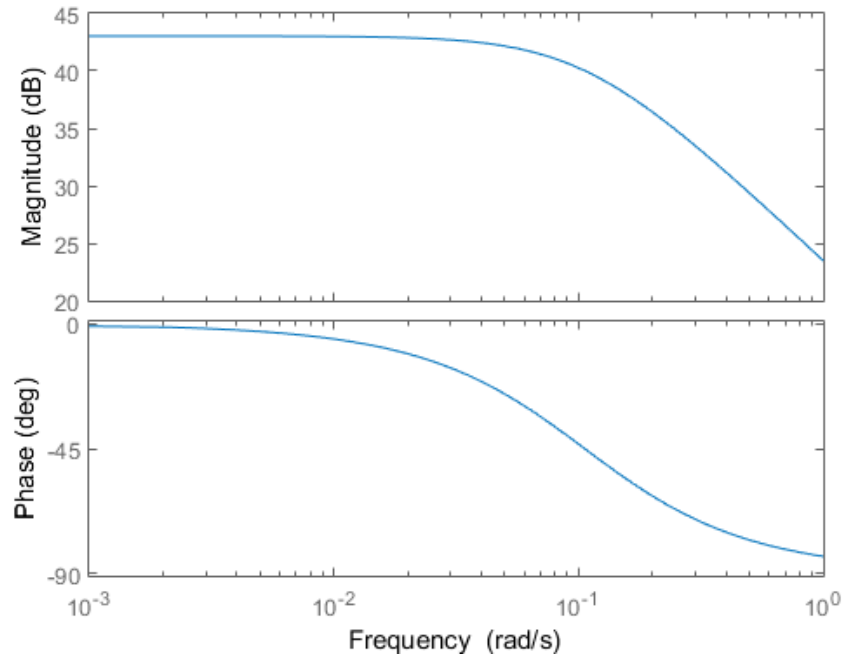
10.2 Diagramas de Bode

Os diagramas de Bode são utilizados como ferramenta visual da resposta do sistema no domínio da frequência, pois apresentam uma análise completa e decomposta, mostrando separadamente o comportamento do módulo da resposta e da sua fase. Claramente, cada função de transferência apresentará um diagrama diferente, trazendo a correlação de determinada saída com uma entrada específica. Assim, serão retratados a seguir os principais diagramas para a análise.

10.2.1 Respostas x_G e \dot{x}_G para as entradas F_{prop} e F_{Dcte}

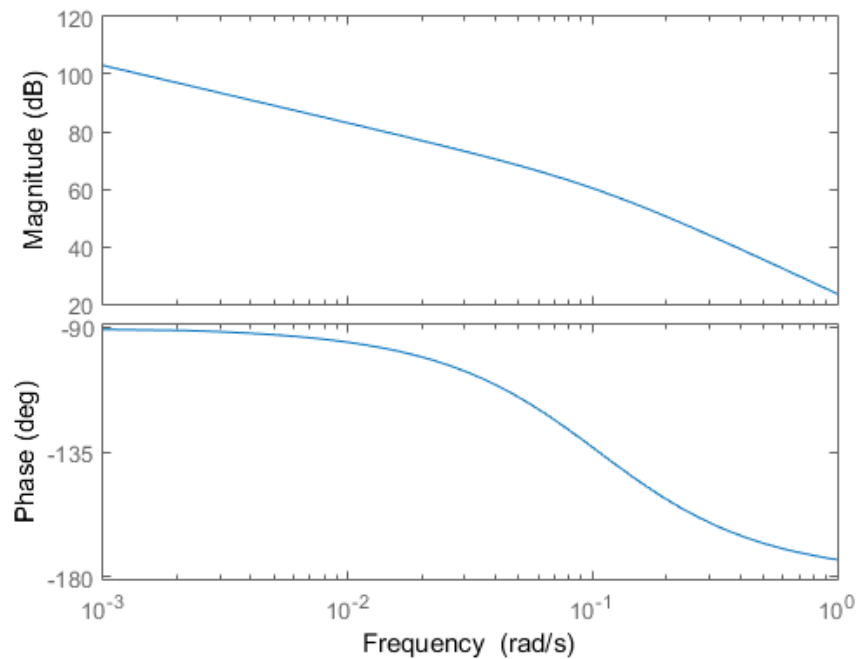
Inicialmente, foi verificado o comportamento das respostas translacionais em relação às entradas de interesse. Os resultados são apresentados nas Figuras 10.1 a 10.4.

Figura 10.1: Diagrama de Bode para Saída \dot{x}_G e entrada F_{prop}



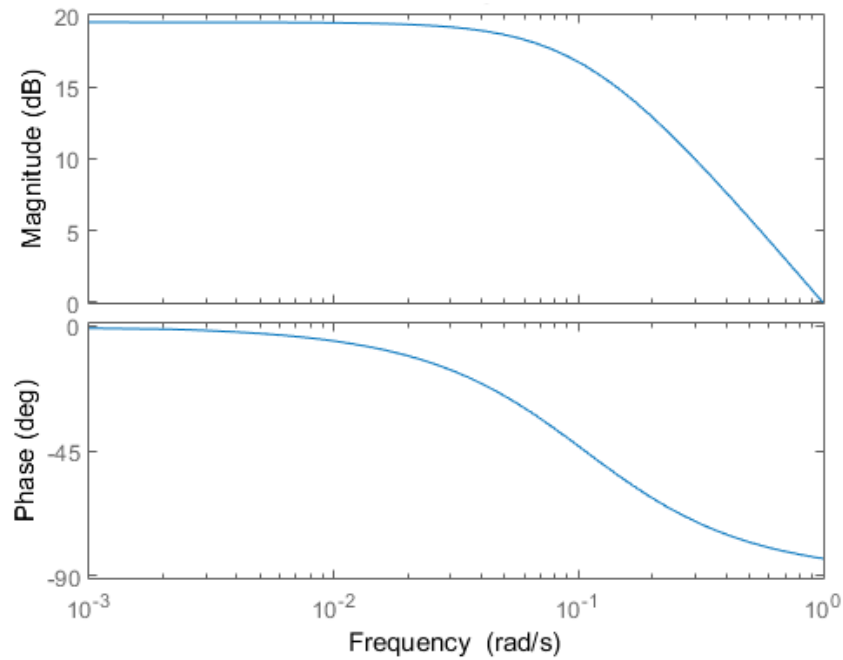
Fonte: autores.

Figura 10.2: Diagrama de Bode para Saída x_G e entrada F_{prop}



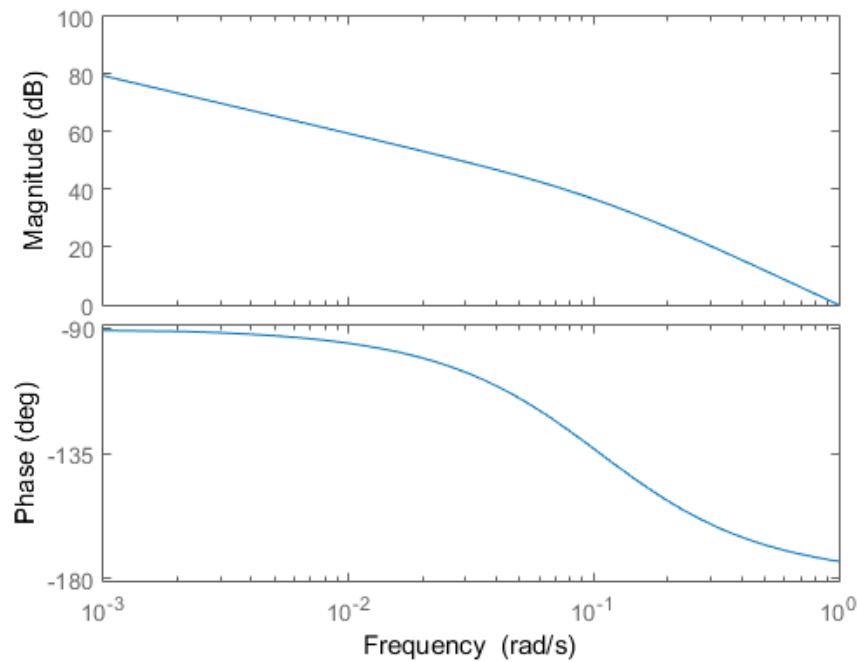
Fonte: autores.

Figura 10.3: Diagrama de Bode para Saída \dot{x}_G e entrada $F_{D_{cte}}$



Fonte: autores.

Figura 10.4: Diagrama de Bode para Saída x_G e entrada $F_{D_{cte}}$



Fonte: autores.

Como se pode observar, a frequência de corte para os quatro casos se mantém semelhante, próximo à 10^{-1} . A partir dela, observa-se um decaimento de 40dB por década nos casos de saída x_G , característico de sistemas de segunda ordem, e de 20dB por década nos casos de saída \dot{x}_G , como em sistemas de primeira ordem.

Esse comportamento era esperado, uma vez que a equação de movimento transversal

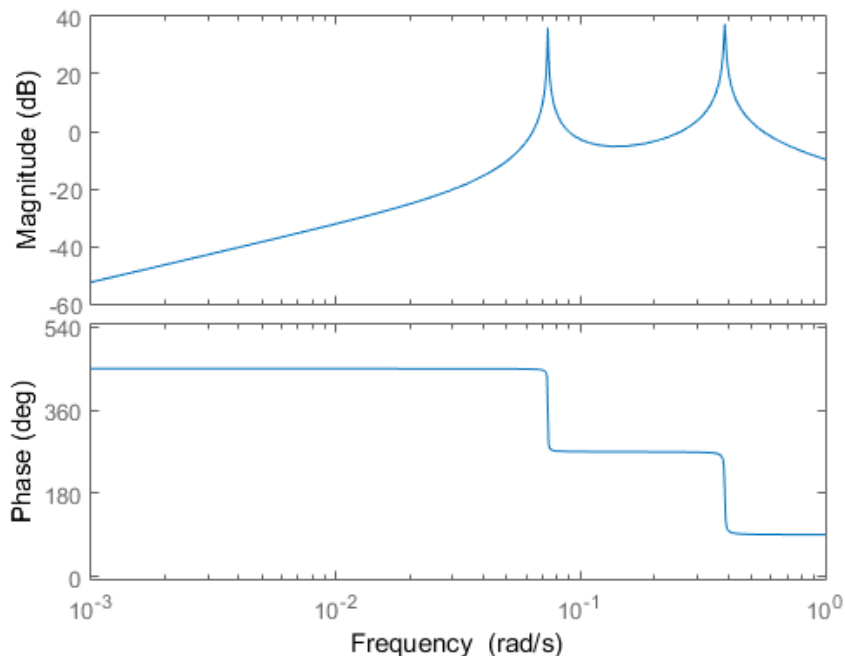
não depende das demais variáveis (dada a aplicação da força de propulsão), o que reduz a ordem do sistema avaliado.

Conclui-se, pois, que para a aplicação de frequências de entrada significativamente superiores à 0,1 rad/s, o sistema já não responderá adequadamente.

10.2.2 Respostas θ_2 e $\dot{\theta}_2$ para a entrada T

Em seguida, verificou-se o comportamento das respostas angulares da segunda barra em relação ao torque T aplicado. Os resultados são apresentados nas Figuras 10.5 e 10.6.

Figura 10.5: Diagrama de Bode para Saída $\dot{\theta}_2$ e entrada T

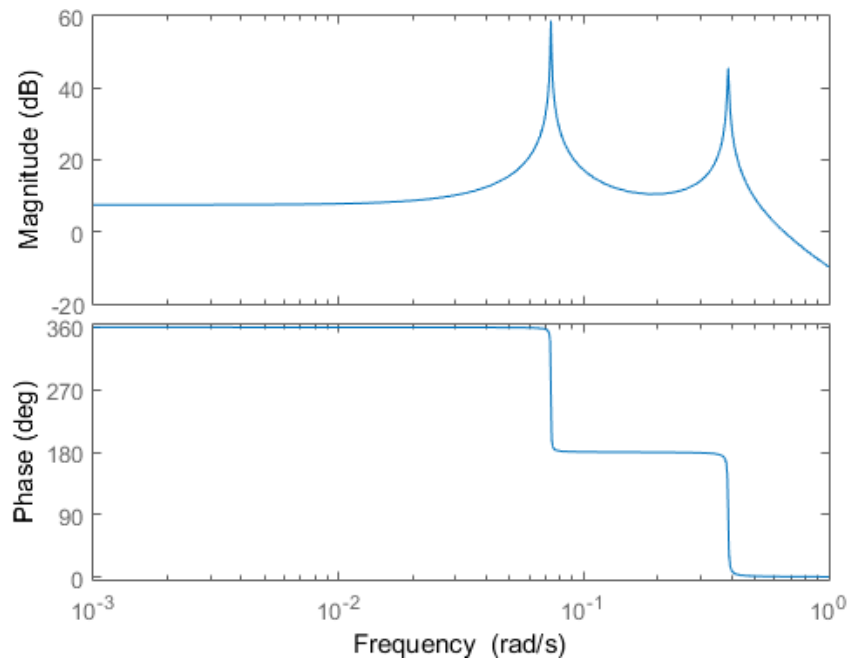


Fonte: autores.

A partir destes gráficos, fica evidente a interferência causada pelas frequências naturais de valores 0,106 rad/s e 0,389 rad/s, apresentadas na Tabela 10.1. Nestas, ocorre um pico de ganho e uma queda de fase, o que poderia refletir possíveis interferências indesejadas nas respostas próximas a esse valor de frequência.

Ademais, verifica-se que para valores muito inferiores à 0,1 rad/s, a resposta de $\dot{\theta}_2$ à entrada T é negativa, mostrando uma baixa responsividade para estes casos. Como o mesmo ocorre para frequências muito superiores à 0,4 rad/s para ambas as saídas, faz-se necessária a adesão de uma frequência não muito menor que 0,1 rad/s nem muito superior à 0,4 rad/s, porém evitando exatamente estas frequências para não ter problemas futuros de controle.

Figura 10.6: Diagrama de Bode para Saída θ_2 e entrada T

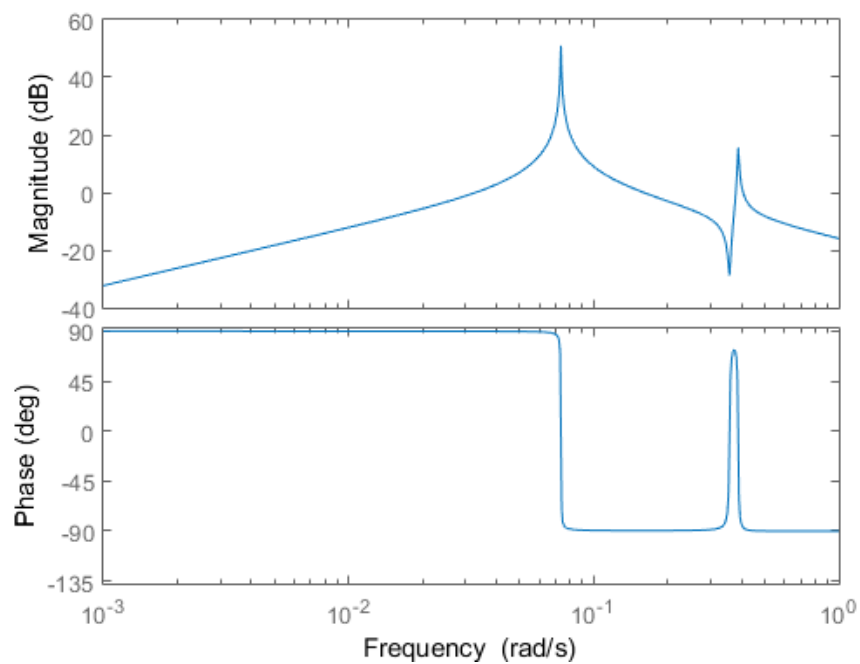


Fonte: autores.

10.2.3 Respostas θ_3 e $\dot{\theta}_3$ para a entrada T

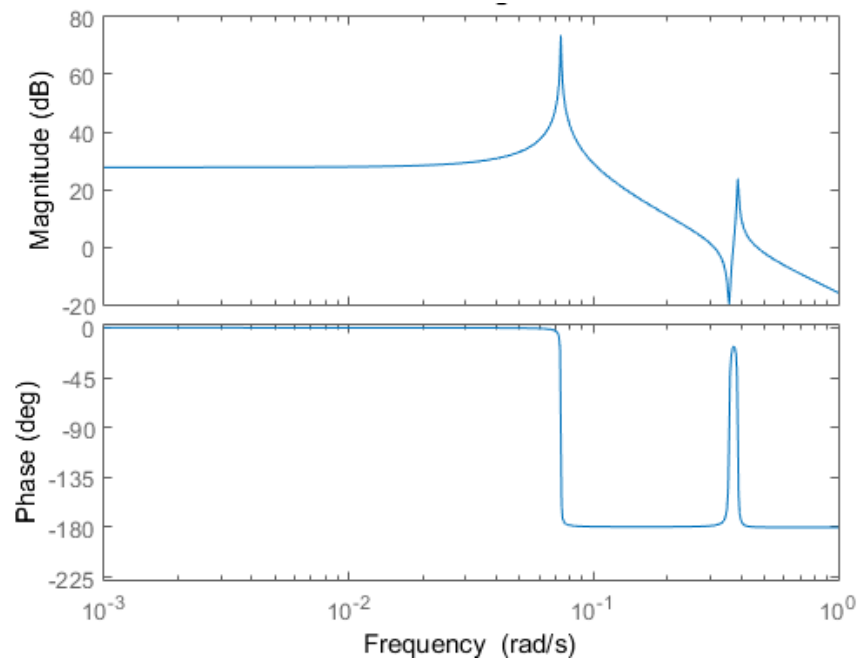
Por fim, verificou-se o comportamento das respostas angulares da segunda barra, também em relação ao torque T aplicado. Os resultados são apresentados nas Figuras 10.7 e 10.8.

Figura 10.7: Diagrama de Bode para Saída $\dot{\theta}_3$ e entrada T



Fonte: autores.

Figura 10.8: Diagrama de Bode para Saída θ_3 e entrada T



Fonte: autores.

Novamente, observamos um comportamento com picos de ganho e variações bruscas de fase para as frequências naturais de 0,106 rad/s e 0,389 rad/s. As afirmações, portanto, referentes às respostas da segunda barra.

Como diferença, verificamos a variação da fase e o decaimento, sendo que, para as saídas θ_3 e $\dot{\theta}_3$, é verificado um comportamento característico de sistemas de segunda ordem, enquanto para θ_2 e $\dot{\theta}_2$ verifica-se um comportamento de terceira ordem.

11 RESPOSTAS DO SISTEMA NO DOMÍNIO DO TEMPO

Uma segunda abordagem realizada para estudo do sistema é no próprio domínio do tempo. Essa abordagem nos traz o comportamento do sistema para definidas condições iniciais e uma determinada entrada. Com isso, torna-se possível comparar os resultados obtidos e avaliar as grandezas envolvidas.

Serão realizadas simulações inicialmente para os sinais elementares, tais como a entrada em impulso, em rampa e em degrau, assim como a entrada senoidal e a avaliação por matriz de transição para diferentes condições iniciais.

Por fim, será também avaliada a resposta do sistema não linearizado, buscando comparar as respostas e verificar a consistência da linearização.

11.1 Condições iniciais

Para as simulações dos sinais elementares e da entrada senoidal, foi utilizado o repouso como condição inicial, representado pelo vetor da Equação 11.1.

$$\begin{bmatrix} x_{G_0} \\ \dot{x}_{G_0} \\ \theta_{2_0} \\ \dot{\theta}_{2_0} \\ \theta_{3_0} \\ \dot{\theta}_{3_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

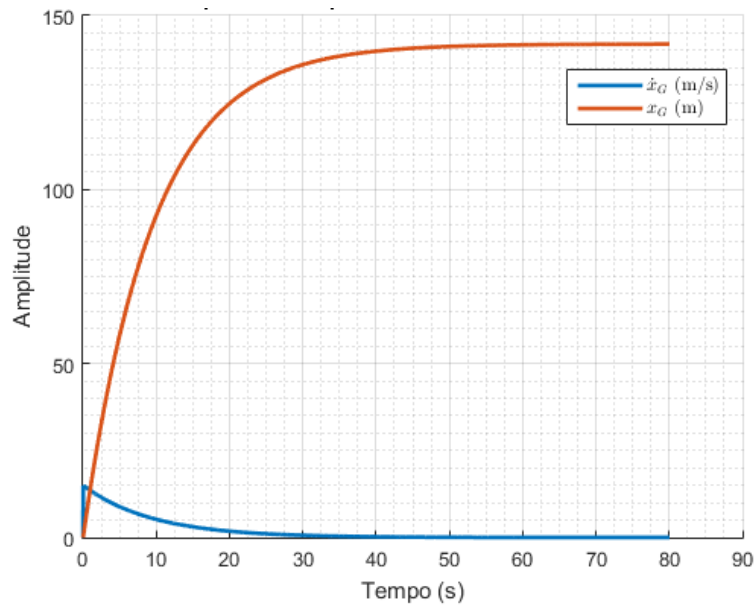
Condições iniciais diferentes serão utilizadas apenas para a simulação por matriz de transição.

11.2 Resposta ao impulso

Primeiramente, foi realizada a simulação da resposta ao impulso. Por definição, a entrada por impulso consiste em uma entrada com integral de sua função com valor 1, havendo um pico em um instante de tempo de $dt \rightarrow 0$ e valor nulo no restante do tempo.

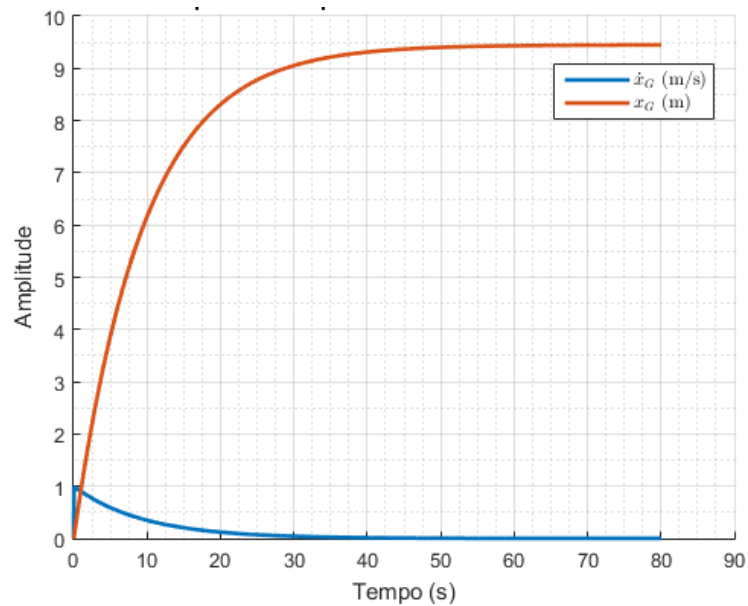
Essa função é facilmente obtida por meio da função *impulse()*, sendo que os resultados obtidos são descritos nas Figuras 11.1 a 11.3.

Figura 11.1: Resposta de x_G e \dot{x}_G para impulso de F_{prop}



Fonte: autores.

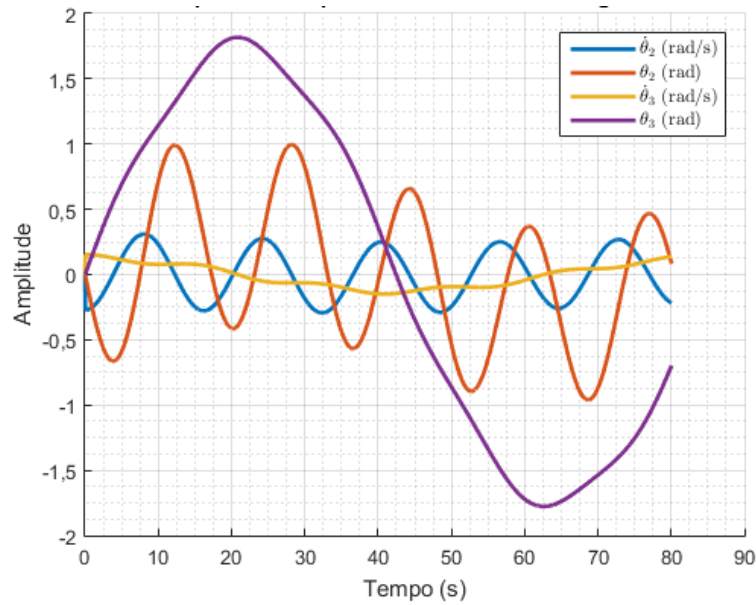
Figura 11.2: Resposta de x_G e \dot{x}_G para impulso de F_{Dcte}



Fonte: autores.

Como esperado, as respostas de translação apresentaram comportamento não oscilatório, já que não há presença de molas, mas tende a um valor constante, uma vez que amortece a velocidade para zero por meio da força de arrasto referente à \dot{x}_G . Já as saídas angulares apresentam comportamento oscilatório e amortecido.

Figura 11.3: Resposta de θ_2 , $\dot{\theta}_2$, θ_3 e $\dot{\theta}_3$ para impulso de T



Fonte: autores.

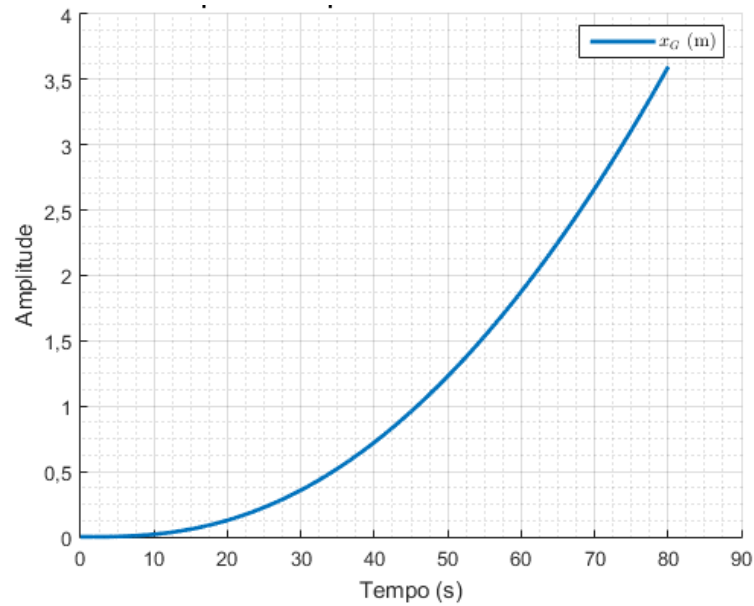
Fisicamente, a entrada em impulso não representa algo factível para o movimento de translação, uma vez que não haveria uma força de propulsão ou uma força de arrasto que apresentasse um pico inicial e reduzisse posteriormente para zero. Contudo, para o movimento angular, a entrada em impulso poderia indicar um movimento brusco desempenhado pelo peixe, representado por um pico de torque. Assim, faz sentido avaliar seu comportamento.

11.3 Resposta à entrada em rampa

A entrada em rampa, por sua vez, apresenta módulo crescente no tempo de forma linear, proporcional ao tempo decorrido. Por conveniência, foi definida a entrada em rampa como sendo $u_F = t$. Os resultados obtidos são descritos nas Figuras 11.4 a 11.9.

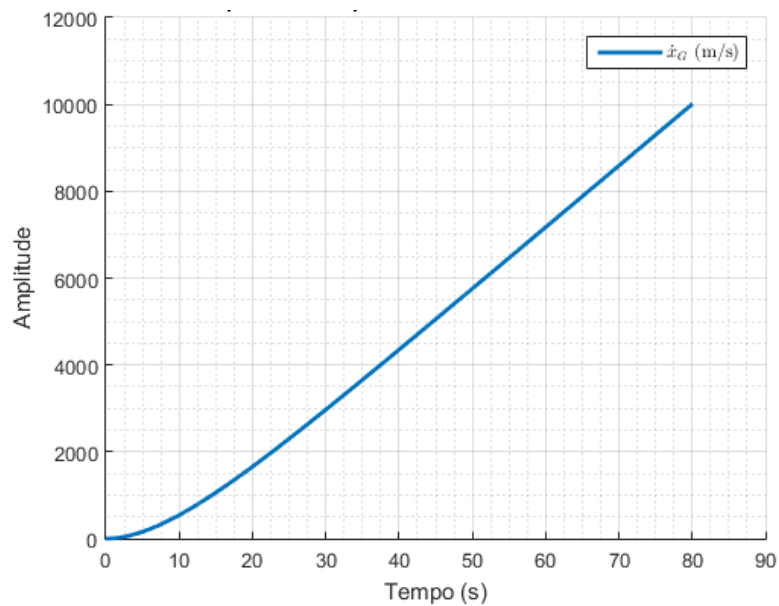
Como se nota, as saídas foram separadas em mais gráficos, uma vez que a discrepância das ordens de grandeza eram tamanha que prejudicava a visualização.

Figura 11.4: Resposta de x_G para rampa de F_{prop}



Fonte: autores.

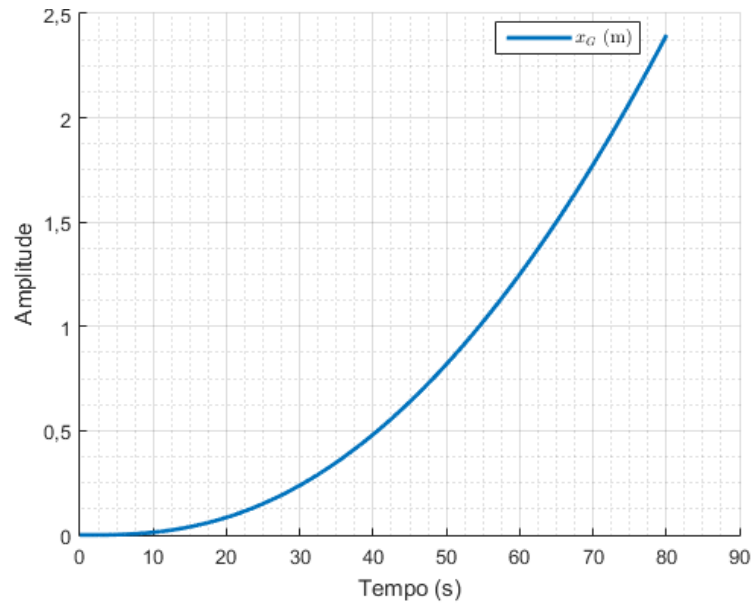
Figura 11.5: Resposta de \dot{x}_G para rampa de F_{prop}



Fonte: autores.

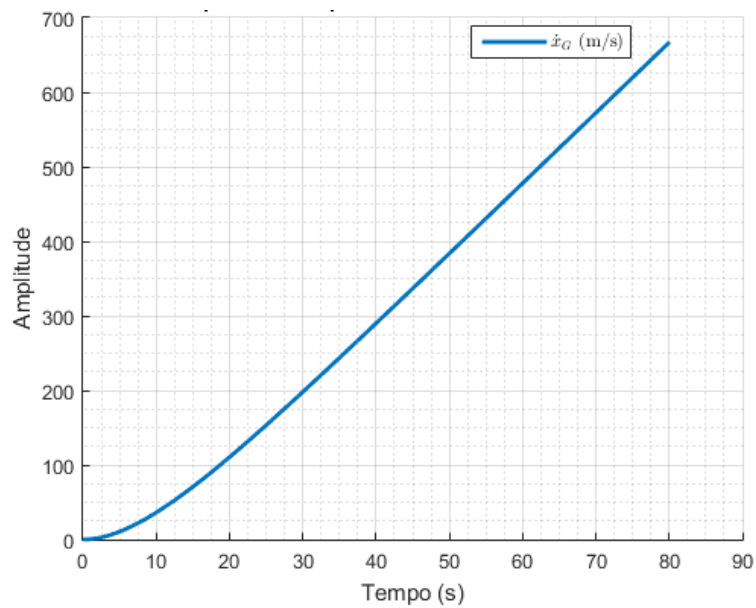
Nota-se, novamente, como na entrada em impulso, que as respostas de translação para as entradas F_{prop} e F_{Dcte} possuem o mesmo formato, mostrando comportamento semelhante, alterando apenas a magnitude.

Figura 11.6: Resposta de x_G para rampa de F_{Dcte}



Fonte: autores.

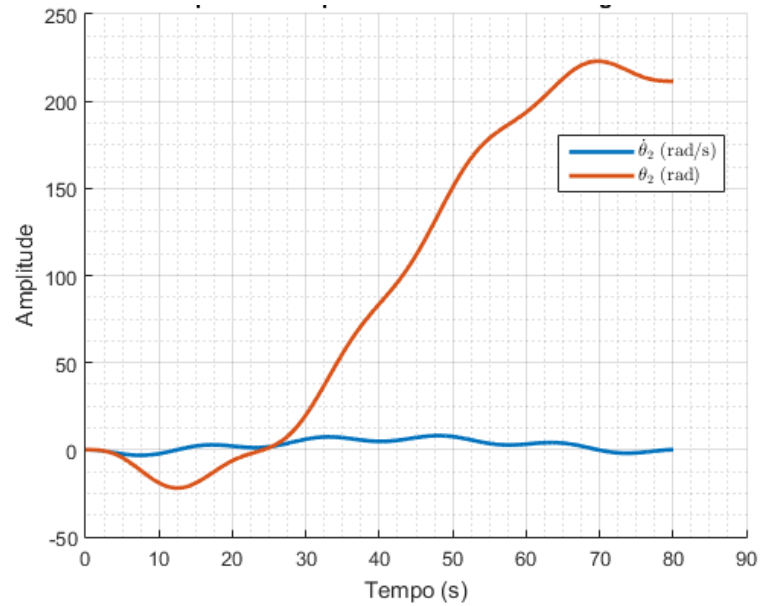
Figura 11.7: Resposta de \dot{x}_G para rampa de F_{Dcte}



Fonte: autores.

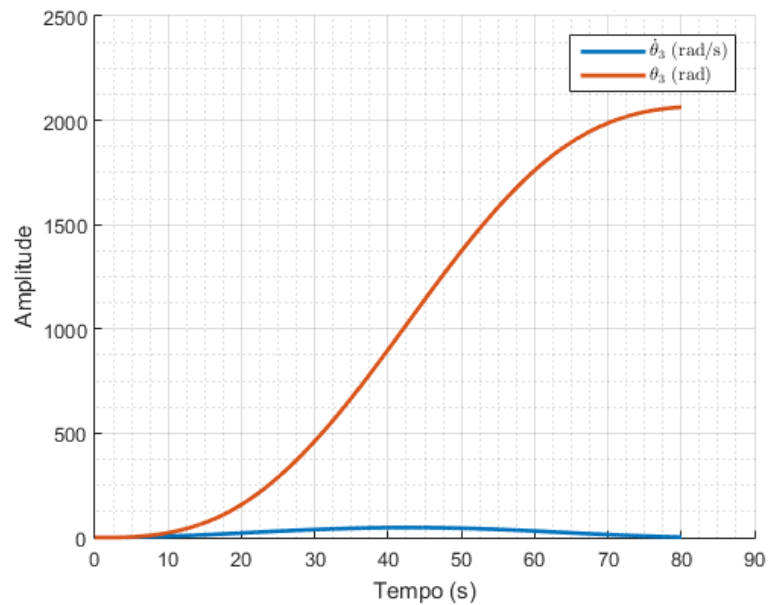
É verificado, pois, que os valores máximos obtidos para as respostas de uma entrada em rampa para todos os casos são muito elevados, fugindo totalmente da proposta de linearização em torno do ponto de operação. Todavia, esta entrada sequer têm respaldo físico para este mecanismo, uma vez que não será jamais aplicado um torque crescente em rampa, assim como o peixe não será capaz de desenvolver uma força de propulsão que cresce ilimitadamente.

Figura 11.8: Resposta de θ_2 e $\dot{\theta}_2$ para rampa de T



Fonte: autores.

Figura 11.9: Resposta de θ_3 e $\dot{\theta}_3$ para rampa de T



Fonte: autores.

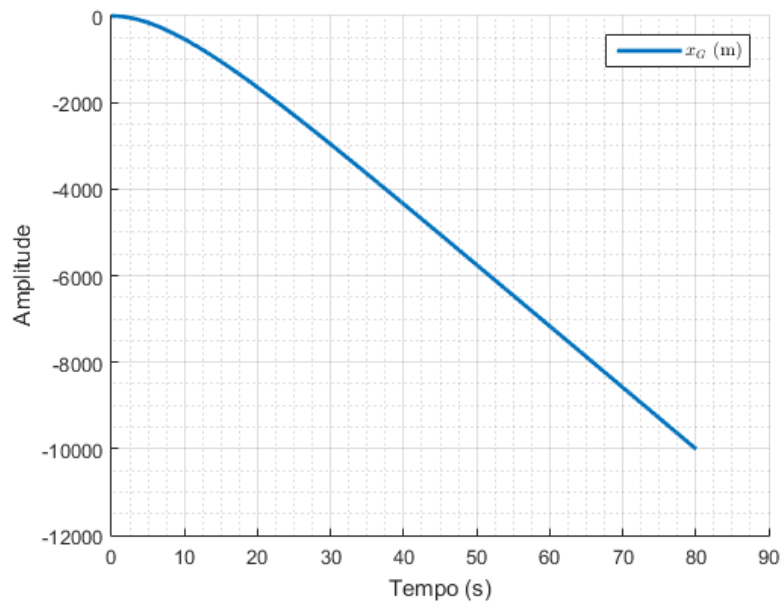
11.4 Resposta ao degrau

A análise em degrau foi feita com uso da aplicação de um valor constante na entrada do sistema. Pode ser calculada com uso da função $step()$ e tem seus resultados apresentados nas Figuras 11.10 a 11.17.

Este tipo de entrada é justamente a desejada e esperada para as forças de propulsão e de arrasto. Como a força de arrasto será constante para o valor de U_m pré-definido, será

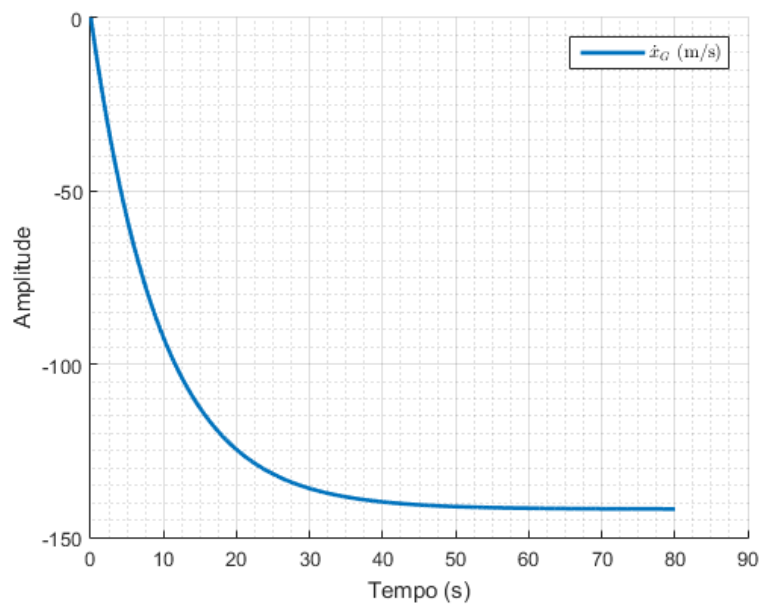
visado em projetos futuros de controle uma entrada de propulsão que gere uma aceleração de mesmo módulo e com sentido oposto. Assim, foi calculado um valor de entrada da força de propulsão com a definição $F_{Dcte} = C_D \rho U_m^2 A_T / 2 = 0,0159$. Já a força de propulsão, ainda não controlada, foi calculada como constante igual a -1 por conveniência (sentido esperado do movimento) e a entrada em torque foi definida como constante igual a $+1$.

Figura 11.10: Resposta de x_G para degrau de F_{prop}



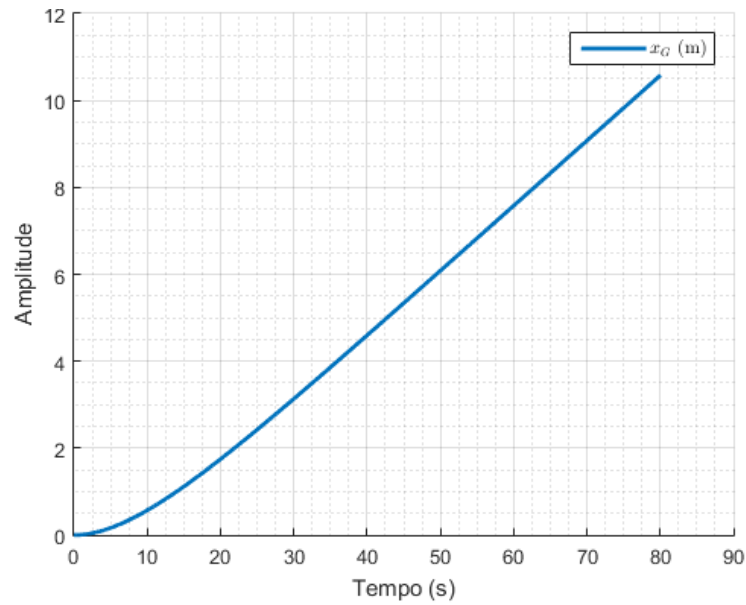
Fonte: autores.

Figura 11.11: Resposta de \dot{x}_G para degrau de F_{prop}



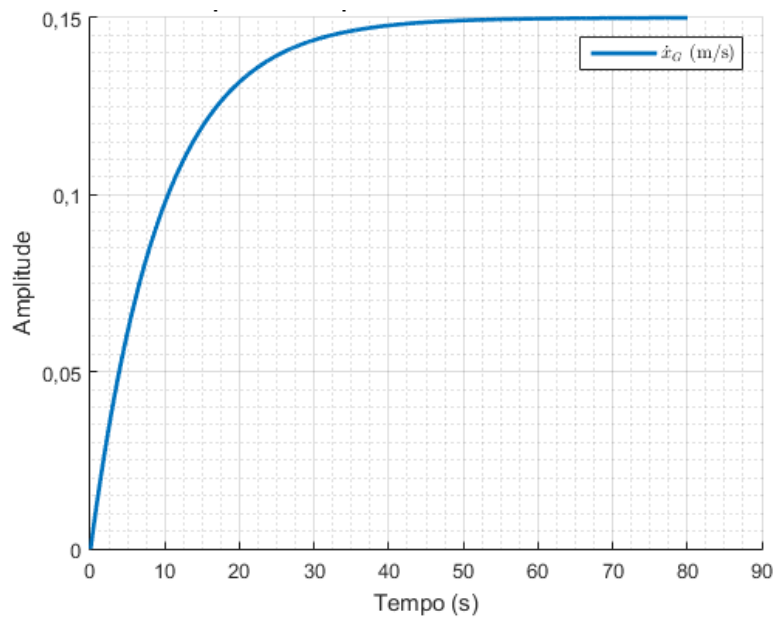
Fonte: autores.

Figura 11.12: Resposta de x_G para degrau de F_{Dcte}



Fonte: autores.

Figura 11.13: Resposta de \dot{x}_G para degrau de F_{Dcte}

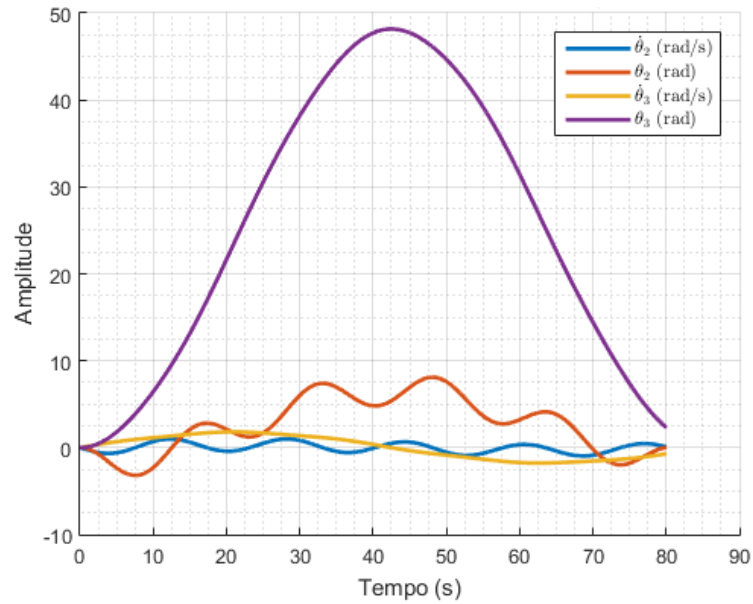


Fonte: autores.

Verifica-se novamente o comportamento similar para as entradas F_{prop} e F_{Dcte} , porém desta vez com respostas simétricas, além da diferença na magnitude.

Neste caso, a entrada em torque constante no mesmo sentido não faz ainda sentido físico, sendo esperada uma aplicação de torque oscilatória para permitir a auto-propulsão.

Figura 11.14: Resposta de θ_2 , $\dot{\theta}_2$, θ_3 e $\dot{\theta}_3$ para degrau de T



Fonte: autores.

11.5 Resposta à entrada senoidal

Por fim foi feita a aplicação de uma entrada senoidal. Esta entrada foi definida em função do tempo decorrido, de tal forma que as entradas de propulsão e arrasto foram definidas como na Equação 11.2.

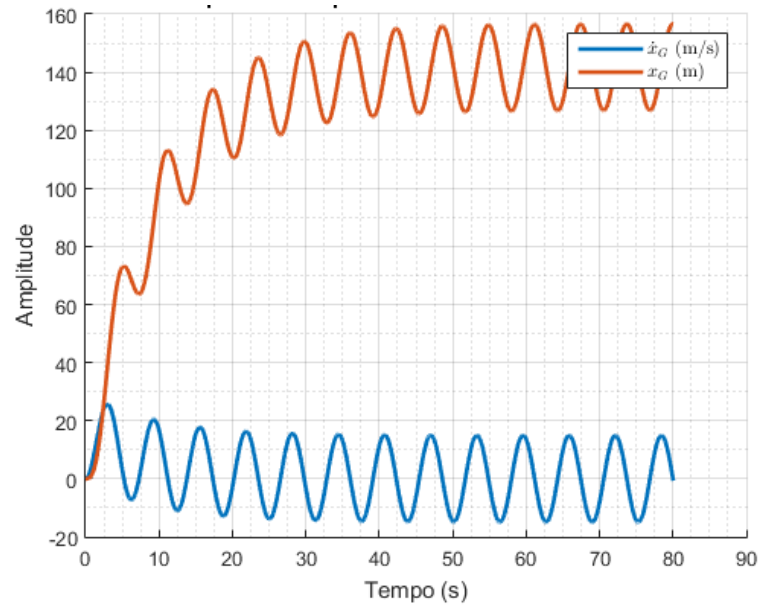
$$F_{prop_{sen}} = F_{D_{sen}} = sen(t) \quad (11.2)$$

Já o torque, por apresentar comportamento esperado oscilatório, foi calculado com uso de parâmetros também utilizados na pesquisa de Nakashima, Ohgishi e Ono (2003) e as frequências de interesse definidas pela análise dos diagramas de Bode já apresentadas. Assim, T foi definido conforme a Equação 11.3.

$$T_{sen} = 0,035 \cdot sen(0,2 \cdot t) \quad (11.3)$$

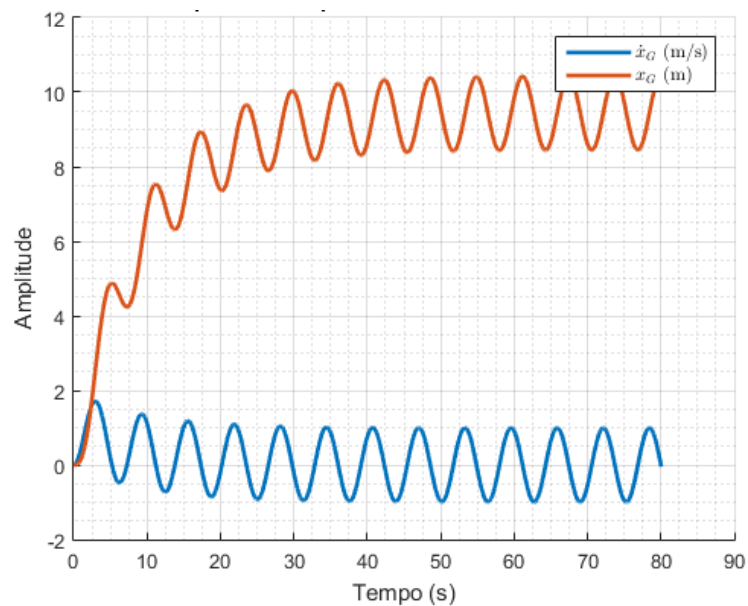
Com isso, obtiveram-se os resultados descritos nas Figuras 11.15 a 11.17.

Figura 11.15: Resposta de x_G e \dot{x}_G para F_{prop} senoidal



Fonte: autores.

Figura 11.16: Resposta de x_G e \dot{x}_G para F_{Dcte} senoidal

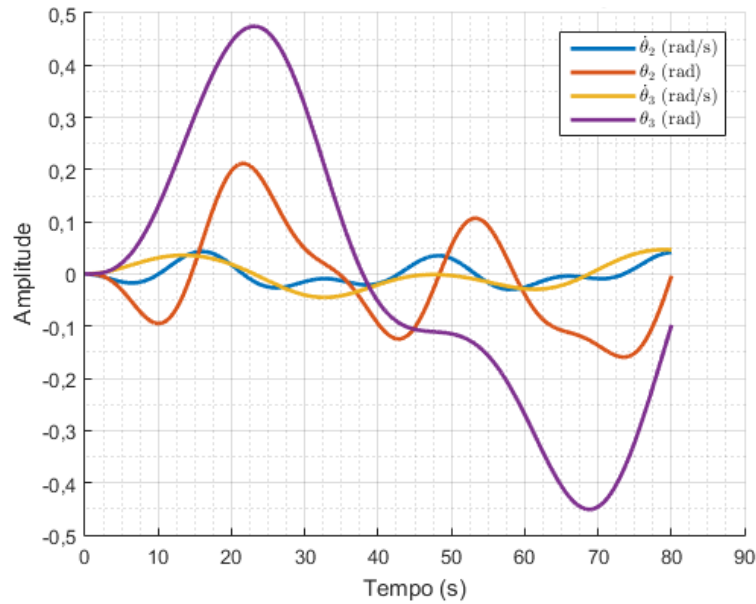


Fonte: autores.

Novamente é verificado um comportamento similar com magnitudes díspares para as saídas de translação.

A resposta oscilatória observada nas saídas angulares apresenta o curioso fato de que a frequência de oscilação é bastante baixa. Dado o estudo prévio realizado sobre a movimentação do peixe robótico, é esperada uma oscilação de menor período para as variáveis θ_2 e θ_3 . Esta abordagem será posteriormente tratada no Capítulo 12.

Figura 11.17: Resposta de θ_2 , $\dot{\theta}_2$, θ_3 e $\dot{\theta}_3$ para T senoidal



Fonte: autores.

11.6 Matriz de Transição

Outra abordagem utilizada foi a verificação do comportamento dinâmico do sistema por meio do uso da Matriz de Transição ($\Phi(t)$). Sua aplicação é feita juntamente com a chamada Matriz de Termos Forçantes ($\Gamma(t)$), a qual dispõe da integral de convolução do sistema. Suas definições são descritas pelas Equações 11.4 e 11.5.

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (11.4)$$

$$\Gamma(t) = \Delta t \int_0^t e^{A(t-\tau)} dt \quad (11.5)$$

Porém, seus valores numéricos podem ser obtidos numericamente também por meio da aproximação com as expressões em série representadas nas Equações 11.6 e 11.7.

$$\Phi(\Delta t) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k \Delta t^k}{k!} \quad (11.6)$$

$$\Gamma(\Delta t) \approx \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k \Delta t^k}{(k+1)!} \quad (11.7)$$

Utilizando-se pois da montagem destas equações no ambiente do *MATLAB 2015a*[®], chegou-se aos valores das matrizes, apresentados nas Equações 11.8 e 11.9, utilizando

$n = 150$ e $\Delta t = 0,05s$.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.9947 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0499 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9996 & -0.0074 & 0.0001 & 0.0013 \\ 0 & 0 & 0.0500 & 0.9998 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 0.0006 & 1.0000 & -0.0004 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0500 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.0499 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0012 & 0.0500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0500 & -0.0002 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0.0012 & 0.0500 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0500 & -0.0000 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0012 & 0.0500 \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

Com elas definidas, faz-se possível a simulação do sistema de forma iterativa. Isso é interessante para poder avaliar o comportamento do sistema sem aplicação de forças externas, mas apenas condições iniciais diferentes. Isso auxilia, inclusive, na validação da definição de estabilidade marginal do sistema.

Dada a independência do movimento linear em relação ao angular, serão simulados dois casos: com condições iniciais x_{G_0} e \dot{x}_{G_0} diferentes de zero; e com condições iniciais θ_{2_0} , $\dot{\theta}_{2_0}$, θ_{3_0} e $\dot{\theta}_{3_0}$ diferentes de zero.

Vale ressaltar que os mesmos casos foram simulados com a função pronta *lsim()* do *MATLAB 2015a*[®], de tal forma que foram obtidos os mesmos valores, validando a avaliação pela matriz de transição.

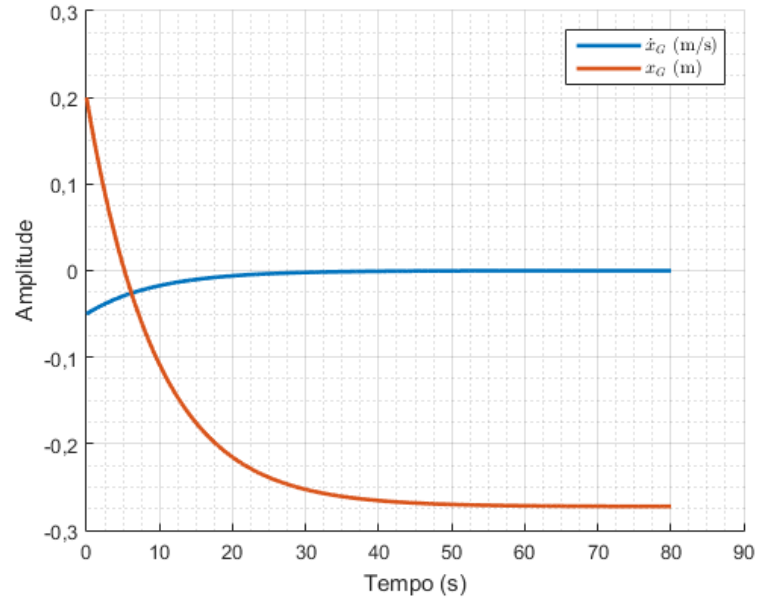
11.6.1 x_{G_0} e \dot{x}_{G_0} diferentes de zero

Serão empregadas as seguintes condições iniciais ao problema, apresentadas na Equação 11.10 matricial, onde x_{G_0} é definido em metros e \dot{x}_{G_0} em m/s.

$$\begin{bmatrix} x_{G_0} \\ \dot{x}_{G_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ -0,05 \end{bmatrix} \quad (11.10)$$

Com as forças mantidas nulas, foram obtidas as respostas das saídas, tal como apresentado na Figura 11.18.

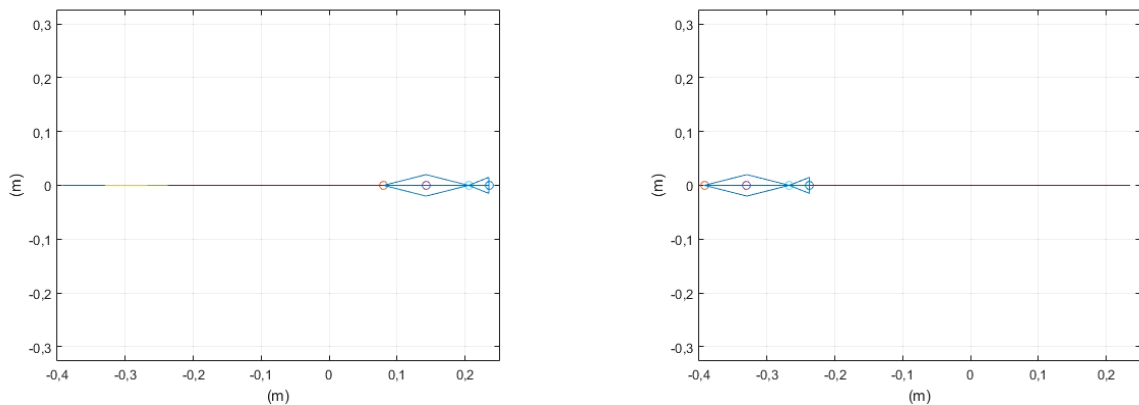
Figura 11.18: Respostas transversais para condição inicial não nula



Fonte: autores.

Como esperado, a resposta da velocidade é amortecida, retornando a zero em aproximadamente 40 segundos, sendo que, a partir deste momento, o valor da posição se torna constante, porém diferente de zero. Este comportamento é, como já mencionado, característico de sistemas marginalmente estáveis, validando novamente essa afirmativa.

Figura 11.19: Visualização da resposta transversal



Fonte: autores.

Foi desenvolvida também uma simulação gráfica visual do comportamento do peixe ao longo do tempo, a qual foi simulada com estas condições e representam os valores

apresentados na Figura 11.18. O estado inicial e final, respectivamente, desta simulação podem ser vistos na Figura 11.19, na qual os eixos são ambos em metros e representam a posição no plano do movimento.

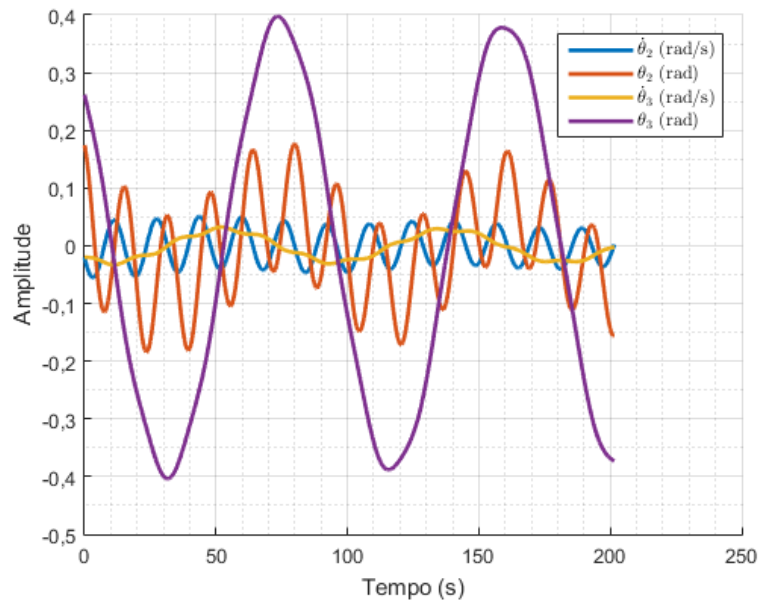
11.6.2 θ_{2_0} , $\dot{\theta}_{2_0}$, θ_{3_0} e $\dot{\theta}_{3_0}$ diferentes de zero

Serão empregadas, pois, as condições iniciais apresentadas na Equação 11.11 matricial, onde as derivadas dos ângulos são dadas em rad/s e os ângulos iniciais em radianos.

$$\begin{bmatrix} \theta_{2_0} \\ \dot{\theta}_{2_0} \\ \theta_{3_0} \\ \dot{\theta}_{3_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/18 \\ -0,02 \\ \pi/12 \\ -0,02 \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

Com as forças mantidas nulas, foram obtidas as respostas das saídas, tal como apresentado na Figura 11.20.

Figura 11.20: Respostas angulares para condição inicial não nula

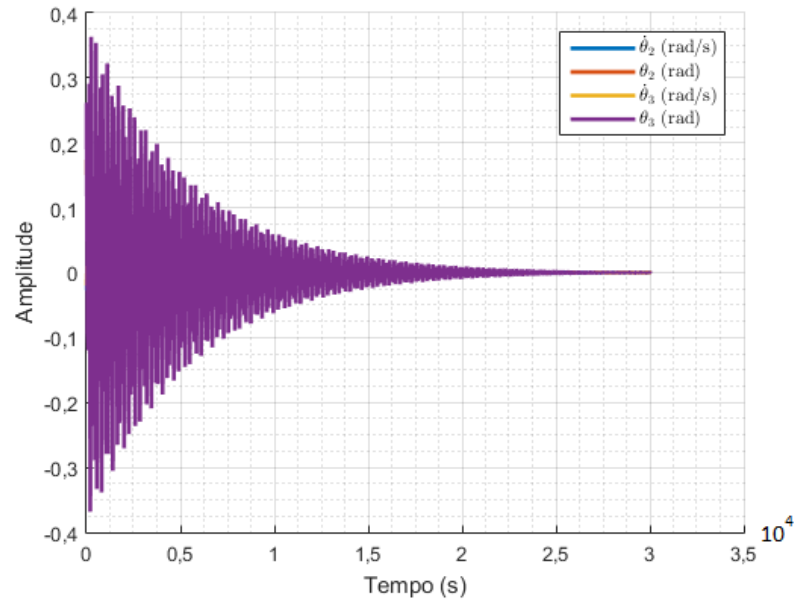


Fonte: autores.

Neste caso, é verificado o comportamento oscilatório do sistema, fruto da presença das molas. O amortecimento esperado do sistema não é facilmente observado na Figura 11.20, pois os coeficientes de amortecimento são muito baixos e o tempo para retornar a zero é muito grande.

Foi, pois, feita a representação gráfica em tempo mais elevado, visando observar o tempo que leva para amortecer (Figura 11.21). Com isso, verifica-se que o amortecimento ocorre, porém em um tempo de 25000 segundos.

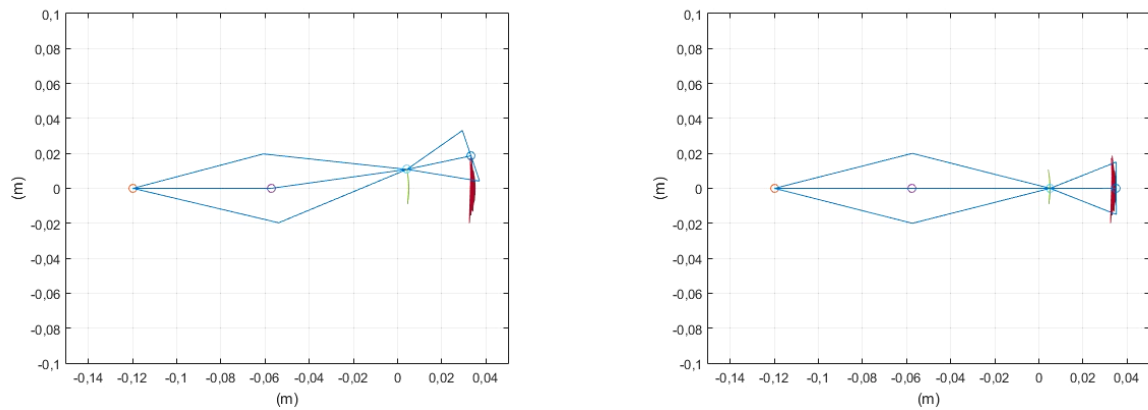
Figura 11.21: Simulação com tempo elevado



Fonte: autores.

Por fim, foi desenvolvida novamente a simulação visual do comportamento do peixe ao longo do tempo, cujo estado inicial e final, respectivamente, podem ser vistos na Figura 11.22, na qual os eixos são ambos em metros e representam a posição no plano do movimento.

Figura 11.22: Visualização da resposta angular



Fonte: autores.

11.7 Comportamento do sistema não-linear

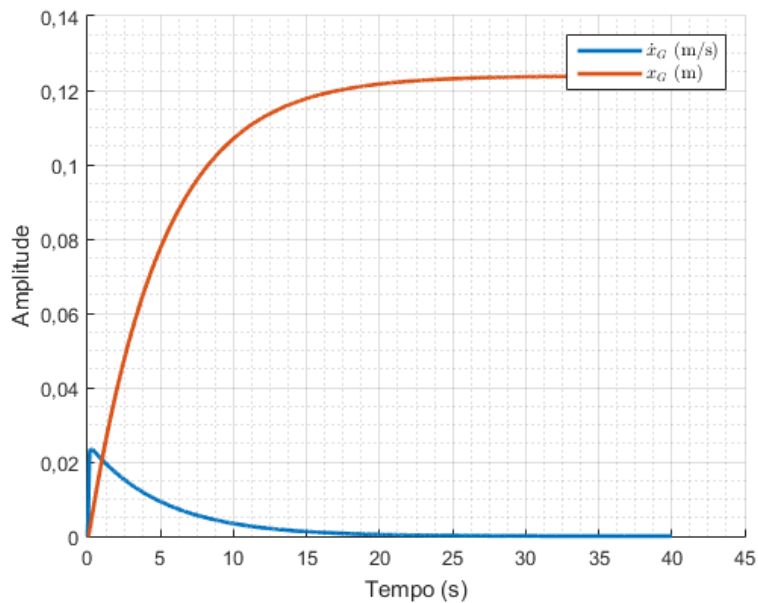
Para avaliação da linearização adotada, foi feita a simulação do sistema não-linear, utilizando a Equação 4.21. Para tanto, foi feito uso da função *ode45()*, sendo que foi permitida a simulação sem a necessidade da definição da força de propulsão. Com isso, torna-se possível avaliar o comportamento das variáveis lineares e angulares concomitantemente.

Foram simulados dois casos: forças externas nulas e variáveis iniciais angulares iguais aos da Equação 11.11; e variáveis iniciais todas nulas com aplicação de força de arrasto constante e torque senoidal como nas Equações 11.2 e 11.3.

11.7.1 Forças externas nulas

As respostas do sistema podem ser observados nas Figuras 11.23 e 11.24.

Figura 11.23: Resposta de translação para variáveis angulares iniciais não nulas

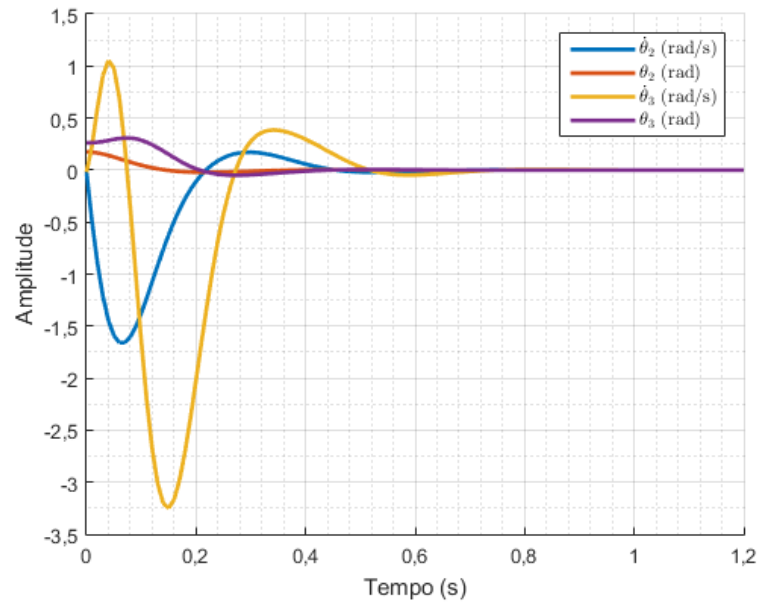


Fonte: autores.

Como observado, neste caso o tempo de amortecimento dos valores angulares é muito inferior. Isso reflete que, na linearização, termos que favoreciam o rápido amortecimento do sistema foram eliminados. Isso não é de todo um problema, uma vez que não é o objetivo central deste mecanismo retornar ao repouso. É, inclusive, necessária uma movimentação constante para que possa competir com o escoamento externo.

Já a resposta de x_G e \dot{x}_G são muito semelhantes ao comportamento da resposta ao im-

Figura 11.24: Respostas angulares para variáveis angulares iniciais não nulas



Fonte: autores.

pulso. Isso ocorre pois a primeira movimentação do mecanismo antes de voltar ao repouso gera uma pequena força de propulsão que leva a esse deslocamento. Após o amortecimento angular, as variáveis de translação se tornam constantes (sendo a velocidade igual a zero).

11.7.2 Forças externas não nulas

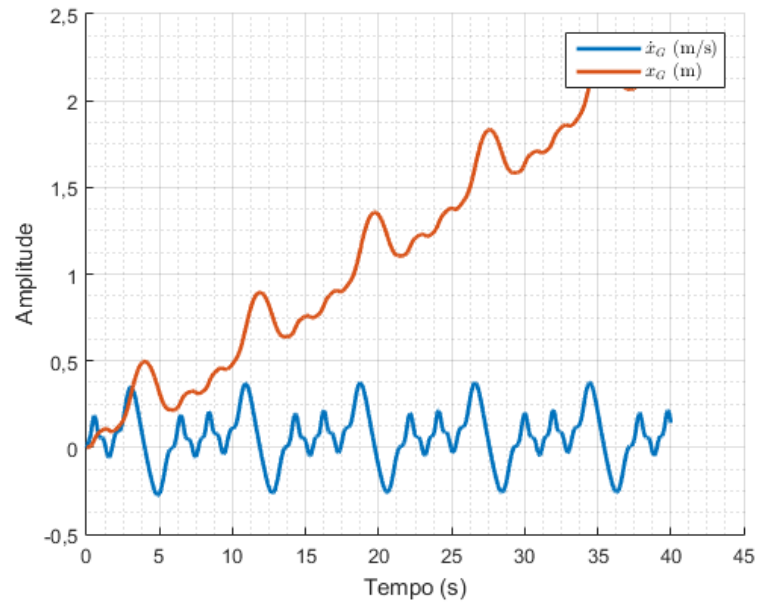
Os valores aplicados para a força de arrasto e para o torque são tais como definidos nas Equações 11.12 e 11.13.

$$F_{Dcte} = \frac{C_D \rho U_m^2 A_T}{2} = 0,0159N \quad (11.12)$$

$$T = 0,35 \cdot \text{sen}(0,4t) \quad (11.13)$$

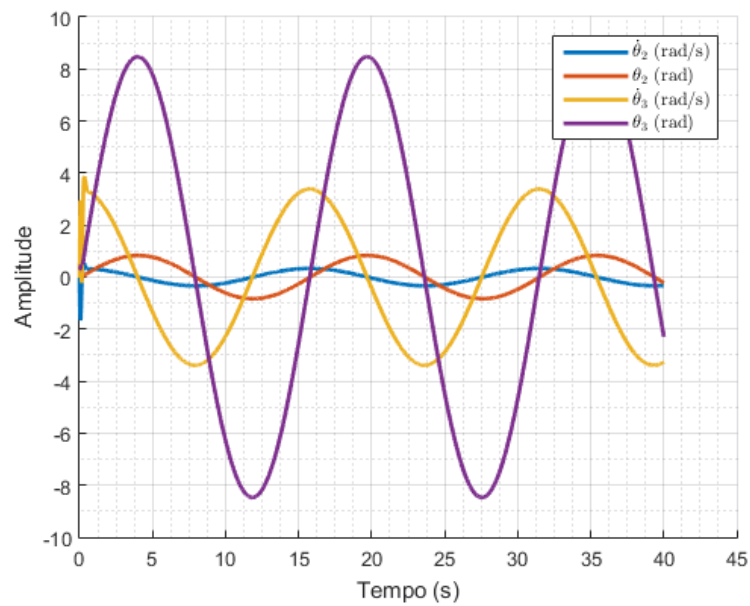
As respostas do sistema podem ser observados nas Figuras 11.25 e 11.26.

Figura 11.25: Resposta de translação para variáveis angulares iniciais não nulas



Fonte: autores.

Figura 11.26: Respostas angulares para variáveis angulares iniciais não nulas



Fonte: autores.

Observa-se, como esperado, um movimento oscilatório das variáveis angulares. Quanto às variáveis de translação, observa-se uma oscilação da velocidade e um crescimento oscilatório do deslocamento. Esse crescimento não é tão acelerado.

12 VERIFICAÇÃO DA HIPÓTESE INICIAL

Como verificada na seção anterior, foi observado que, para a aplicação de um torque tal como o da Equação 11.13, temos que a velocidade linear do centro de massa é oscilatória, de módulo não muito elevado.

Devido ao fato de a média dos valores da velocidade é levemente positivo, o deslocamento do centro de massa é crescente. Vale ressaltar que, neste caso com x_G crescendo positivamente, o peixe estaria indo para trás.

Dessa forma, acredita-se ser possível determinar um ganho de controle ou método mais adequado que leve a uma oscilação mais baixa da velocidade linear e uma oscilação em torno de zero do deslocamento também. Ou seja, com um controle adequado, seria possível sim utilizar-se da simplificação de que a velocidade e o deslocamento lineares são praticamente desprezíveis.

13 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma análise completa sobre a modelagem de um peixe robótico. Entende-se facilmente a importância do estudo de tais mecanismos, ainda mais quando os relacionam com o desenvolvimento de Veículos Não-Tripulados Subaquáticos (AUVs), e destaca-se o profundo interesse dos autores do projeto neste estudo.

Foi inicialmente determinado o modelo físico adotado para o sistema e realizada a sua modelagem matemática. Com uso de conceitos de mecânica clássica e hidrodinâmica, foi possível desenvolver uma complexa equação de movimento, satisfazendo, pois a primeira restrição imposta ao projeto, tal como na Seção 2.3.

O modelo obtido inicialmente era altamente não-linear. Foi, pois, empregada a linearização por expansão em Série de Taylor, obtendo pois uma equação linear que descreve o movimento em torno do repouso, considerado o ponto de operação do sistema. Dada a inevitável não-linearidade no termo que multiplicava o torque no movimento transversal, foi necessária a definição de uma força auxiliar que representava a força de propulsão do peixe. Essa adaptação permitiu uma análise mais completa do sistema.

Foi então definido o espaço de estados do sistema, suas funções de transferência e seus polos e zeros. Com isso, permitiu-se verificar que o sistema é marginalmente estável, satisfazendo, pois, a segunda restrição imposta inicialmente. Estas características eram esperadas e foram condizentes com os resultados apresentados em literatura, especialmente com o estudo de Nakashima, Ohgishi e Ono (2003), o qual se tornou bibliografia base do projeto.

A resposta no domínio da frequência, então avaliado deixou bem evidente as características acarretadas pelos polos dominantes e os picos de ressonância nas frequências naturais. Assim, foi possível inferir faixas frequências de interesse para o desenvolvimento do projeto, lembrando que não se procuravam respostas que fossem atenuadas pelo sistema.

Na posterior análise no domínio do tempo, foi então verificado o comportamento do

sistema para múltiplas entradas, cada qual com uma determinada característica. Com destaque para as entradas em degrau e senoidais (de maior interesse para o sistema), foram apresentados resultados condizentes com o esperado, porém a entrada senoidal com os parâmetros determinados por Nakashima, Ohgishi e Ono (2003) e Duraisamy, Sidharthan e Santhanakrishnan (2019) levaram a uma frequência de oscilação abaixo do esperado.

A posterior análise por matriz de transição foi de grande valia para reafirmação da estabilidade marginal do sistema e para verificar o amortecimento natural do sistema. Observou-se que, sem a aplicação de esforços externos, o tempo para o sistema amortecer é extremamente alto, o que reflete a baixa magnitude dos coeficientes de amortecimento.

Por fim, foi realizada a simulação do sistema com as equações não lineares, de tal forma que foi possível validar a linearização realizada e observar a correlação entre as variáveis angulares e de translação.

Espera-se que, como continuidade do projeto, seja possível pesquisar e desenvolver métodos de controle ao sistema, capazes de manter os valores da força de propulsão próximos do necessário para manter o peixe sem grande deslocamento transversal.

REFERÊNCIAS

- DURASAMY, P.; SIDHARTHAN, R. K.; SANTHANAKRISHNAN, M. N. Design, modeling, and control of biomimetic fish robot: A review. *Journal of Bionic Engineering*, Springer, v. 16, n. 6, p. 967–993, 2019.
- FRANÇA, L.; MATSUMURA, A. *Mecânica geral*. Edgard Blücher, 2011. ISBN 9788521203414. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=IUnSAwAACA AJ>>.
- GRAICHEN, K. et al. Control design for a bionic kangaroo. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 42, p. 106–117, 2015.
- KIM, H.-S. et al. A study on optimization of fish robot velocity using genetic algorithm. In: IEEE. *2008 International Conference on Smart Manufacturing Application*. [S.l.], 2008. p. 441–446.
- LIGHTHILL, M. Note on the swimming of slender fish. *Journal of fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 9, n. 2, p. 305–317, 1960.
- MALEC, M.; MORAWSKI, M.; ZAJĄC, J. Fish-like swimming prototype of mobile underwater robot. *Journal of Automation Mobile Robotics and Intelligent Systems*, v. 4, p. 25–30, 2010.
- NAKASHIMA, M.; OHGISHI, N.; ONO, K. A study on the propulsive mechanism of a double jointed fish robot utilizing self-excitation control. *JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, The Japan Society of Mechanical Engineers, v. 46, n. 3, p. 982–990, 2003.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Prentice Hall do Brasil, 1982. ISBN 9788587918239. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=fXmIPQAACA AJ>>.
- QUEIROZ, F. C. de. *Linearização de sistemas de controle*. Dissertação (Mestrado) — Brasil, 2016.
- SHAO, J.; WANG, L.; YU, J. Development of an artificial fish-like robot and its application in cooperative transportation. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 16, n. 5, p. 569–584, 2008.
- SUEBSAIPROM, P.; LIN, C.-L. Fish-tail modeling for fish robot. In: IEEE. *2012 International Symposium on Computer, Consumer and Control*. [S.l.], 2012. p. 548–551.
- VO, T. Q. et al. A study on optimization of fish robot maximum velocity using the combination of genetic-hill climbing algorithm. In: IEEE. *2009 ICCAS-SICE*. [S.l.], 2009. p. 2280–2285.
- WHITE, F. M. *Mecânica dos fluidos*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 1962.

YU, J.; WANG, L. Parameter optimization of simplified propulsive model for biomimetic robot fish. In: IEEE. *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. [S.l.], 2005. p. 3306–3311.

ANEXO A – CÓDIGOS

```

%%% Trabalho Modelagem 2020 %%%

clc
format
clear
close all
set(groot, 'defaultLegendInterpreter','latex');

%% Definição dos Parâmetros Iniciais %%

m1=0.409; % massa da primeira barra (kg)
m2=0.104; % massa da segunda barra (kg)
m3=0.009; % massa da terceira barra – cauda (kg)
a1=0.09375; % distância do baricentro da primeira barra (m)
a2=0.0255; % distância do baricentro da segunda barra (m)
a3=0.015; % distância do baricentro da terceira barra (m)
l1=0.1875; % comprimento da primeira barra (m)
l2=0.0625; % comprimento da segunda barra (m)
l3=0.03; % comprimento da terceira barra (m)
rho=998; % densidade da água (kg/m³)
L=0.075; % Corda da cauda (m)
C_c=0.03/2; % Semi-comprimento da cauda (m)
pi_t=pi; % pi
c1=3e-4; % Coeficiente de amortecimento da primeira união (N*m*s/rad)
c2=1e-4; % Coeficiente de amortecimento da segunda união (N*m*s/rad)
k1=4.91e-2; % Coeficiente elástico da primeira união (N*m/rad)
k2=3.54e-3; % Coeficiente elástico da segunda união (N*m/rad)
Um=0.3; % Velocidade do escoamento (m/s)
Cd=0.5; % Coeficiente de arrasto hidrodinâmico
S=7.069e-4; % área total do peixe (m²)
Fd=0.5*Cd*rho*Um^2*S; % Força de arrasto hidrodinâmico (N)

%% Definição das Equações de Movimento não Lineares
%% Definição dos vetores
h=0.01; % step
t_f=(40+0.01);
t=0:h:t_f; % vetor tempo
x_2_pontos=zeros(size(t)); % vetor da aceleração em x
x_ponto=zeros(size(t)); % vetor da velocidade em x
x=zeros(size(t)); % vetor da posição em x
theta2_2_pontos=zeros(size(t)); % vetor da aceleração em theta2
theta2_ponto=zeros(size(t)); % vetor da velocidade em theta2

```



```

theta2=zeros(size(t)); % vetor da posição em theta2
theta3_2_pontos=zeros(size(t)); % vetor da aceleração em theta3
theta3_ponto=zeros(size(t)); % vetor da velocidade em theta3
theta3=zeros(size(t)); % vetor da posição em theta3
X=[x_ponto; x; theta2_ponto; theta2; theta3_ponto; theta3];

%Vetor de entradas - variações para simulação de diferentes entradas
    %step
    %T_theta=-ones(size(t));
    %T_theta(1)=0;
    %T=ones(size(t));
    %T(1)=0;
    Fd=ones(size(t))*Fd;
    %Fd(1)=0;

    %impulse
    T_theta=zeros(size(t));
    %T_theta(1)=1/h;
    %T=zeros(size(t));
    %T(1)=1/h;
    %Fd=zeros(size(t));
    %Fd(1)=1/h;

    %ramp
    %T_theta=t;
    %T=t;
    %Fd=t;

    %senoidal
    %T_theta=sin(t);
    T=0.35*sin(0.4*t);
    %Fd=sin(t);

u = [T_theta; T; Fd];
ut = t;

%Definição dos valores iniciais
x(1)=0;
x_ponto(1)=0;
theta2(1)=pi_t/18;
theta2_ponto(1)=-0.02;
theta3(1)=pi_t/12;
theta3_ponto(1)=-0.02;
%vetor com condições iniciais
X0 = [x_ponto(1), x(1), theta2_ponto(1), theta2(1), theta3_ponto(1), theta3(1)];

%Variáveis auxiliares
J2=m2*a2^2;
J3=m3*a3^2;
M11=J2+m2*a2^2+m3*l2^2+pi_t*ro*L*C_c^2*l2^2;
M12=m3*a3*l2+pi_t*ro*L*C_c^2*l2*a3;
M21=m3*a3*l2+pi_t*ro*L*C_c^2*l2*a3;
M22=J3+m3*a3^2+pi_t*ro*L*C_c^2*a3^2;
C_11=c1+c2+2*pi_t*ro*L*C_c*Um*l2^2;

```

```

C_12=-c2+pi_t*ro*L*C_c*Um*(2*a3-C_c*Um)*l2;
C_21=-c2+2*pi_t*ro*L*C_c*Um*l2*a3;
C_22=c2+pi_t*ro*L*C_c*Um*(2*a3-C_c*Um)*a3;
K_11=k1+k2;
K_12=-k2+2*pi_t*ro*L*C_c*Um^2*l2;
K_21=-k2;
K_22=k2+2*pi_t*ro*L*C_c*Um^2*a3;
alfa=pi_t*ro*L*C_c^2;
C22=(-M22*M11*C_11+M12*M11*C_21)/(M22*M11-M21*M12);
C23=(-M22*M11*C_12+M12*M11*C_22)/(M22*M11-M21*M12);
K22=(-M22*M11*K_11+M12*M11*K_21)/(M22*M11-M21*M12);
K23=(-M22*M11*K_12+M12*M11*K_22)/(M22*M11-M21*M12);
C32=(M21*C_11/M11-C_21);
C33=(M21*C_12/M11-C_22);
K32=(M21*K_11/M11-K_21);
K33=(M21*K_12/M11-K_22);
beta=(M22*M11-2*M21*M12)/(M22*M11-M21*M12);

%Integra o com ODE45
tspan=t;
[tode,y] = ode45(@ (t,y)
funcao_derivada(y,u,ut,beta,pi_t,l2,a3,m1,m2,m3,Cd,S,C_c,L,ro,Um,M11,M12,M21,M22,C22,C23,C32,C33,K22,
Xode = y';
tode = tode';

%Avalia o grafica linear pelo comando ode45
figure()
hold on
plot(tode,Xode(1,:), 'LineWidth',2);
plot(tode,Xode(2,:), 'LineWidth',2);
hold off
legend(' $\dot{x}_G$(m/s)', '$x_G$(m)');
xlabel('Tempo(s)')
ylabel('Amplitude')
trocar();
grid on;
grid minor

figure()
hold on
plot(tode,Xode(3,:), 'LineWidth',2);
plot(tode,Xode(4,:), 'LineWidth',2);
plot(tode,Xode(5,:), 'LineWidth',2);
plot(tode,Xode(6,:), 'LineWidth',2);
hold off
legend(' $\dot{\theta}_2$(rad/s)', '$\theta_2$(rad)', '$\dot{\theta}_3$(rad/s)', '$\theta_3$(rad)');
xlabel('Tempo(s)')
ylabel('Amplitude')
trocar();
grid on;
grid minor

%% Defini o do Espao de Estados com Equaes Linearizadas

```

```

M=[m1+m2+m3, 0, 0, 0, 0, 0;
   0, 1, 0, 0, 0, 0;
   0, 0, M11,0, 0, 0;
   0, 0, 0, 1, 0, 0;
   0, 0, 0, 0, M22-(M12*M21/M11), 0;
   0, 0, 0, 0, 0, 1];

A=[ -Cd*ro*Um*S, 0, 0, 0, 0, 0;
    1, 0, 0, 0, 0, 0;
    0, 0, C22, K22, C23, K23;
    0, 0, 1, 0, 0, 0;
    0, 0, C32, K32, C33, K33;
    0, 0, 0, 0, 1, 0];

B=[alfa*12*beta/M11+alfa*a3*M21/(M22*M11-M12*M21), 0, 1;
   0, 0, 0;
   0, 0, beta, 0;
   0, 0, 0, 0;
   0, 0, M21/M11,0;
   0, 0, 0, 0];

C=eye(6);
D = zeros(6,3);

sys_ss = ss(A,B,C,D);

%Polin mio caracter stico
P_c = poly(A);

% Autovalores
autovalores = eig(A);

%% Avalia o do comportamento no dom nio da frequ ncia
%Obten o das fun es de transfer ncia
sys_tf = tf(sys_ss);

%Obten o dos valores de polos, zeros e ganhos
[z,p,k] = zpndata(sys_ss);
pole(sys_ss)

%Avalia o gr fica dos polos do sistema
figure
pzmap(sys_ss)

%Obten o das frequ ncias naturais e dos coeficientes de amortecimento
damp(sys_tf)

%Diagramas de bode
figure
bode(sys_ss)
xlim([0.001 1])

%% Avalia o do comportamento no dom nio do tempo
%Avalia o gr fica da resposta do sistema ao impulso
figure

```

```

impulse(sys_ss(1,1))

% Avalia o grfica da resposta do sistema ao step
% figure
% step(sys_ss)

% Integra o com lsim
Xlsim = lsim(sys_ss,u,t,X0);
Xlsim = Xlsim';

% Avalia o grfica linear pelo comando lsim
figure();
hold on
plot(t,Xlsim(1,:), 'LineWidth', 2);
plot(t,Xlsim(2,:), 'LineWidth', 2);
hold off
legend(' $\dot{x}_G$(m/s)', '$x_G$(m)');
xlabel('Tempo(s)')
ylabel('Amplitude')
trocar();
grid on;
grid minor

% Avalia o grfica angular pelo comando lsim
figure();
hold on
plot(t,Xlsim(3,:), 'LineWidth', 2);
plot(t,Xlsim(4,:), 'LineWidth', 2);
plot(t,Xlsim(5,:), 'LineWidth', 2);
plot(t,Xlsim(6,:), 'LineWidth', 2);
hold off
legend(' $\dot{\theta}_2$(rad/s)', '$\theta_2$(rad)', '$\dot{\theta}_3$(rad/s)', '$\theta_3$(rad)');
xlabel('Tempo(s)')
ylabel('Amplitude')
trocar();
grid on;
grid minor

% Integra o por matriz de transi o e termos for antes
max=150;

phi = zeros(size(A));
for i=1:max
    aux = (A^(i-1))*(h^(i-1))/factorial(i-1);
    phi = phi+aux;
end

gamma = zeros(size(A));
for i=1:max
    aux = (A^(i-1))*(h^(i-1))/factorial(i);
    gamma = gamma+aux;
end
gamma=h*gamma;

```

```

Xmt(:,1)=X0';
for j=1:size(t)-1
    Xmt(:,j+1) = phi*Xmt(:,j)+gamma*B*u(:,j);
end

% Avalia o grafica do sistema por matriz de transi o
figure();
hold on
plot(t,Xmt(1,:), 'LineWidth',2);
plot(t,Xmt(2,:), 'LineWidth',2);
hold off
legend(' $\dot{x}$ _G$(m/s)$ ', '$x$ _G$(m)$ ');
xlabel('Tempo$(s)$')
ylabel('Amplitude')
trocar();
grid on;
grid minor

%% Anima o grafica da resposta
Xv=Xmt;
%Xv=Xode;

figure
xA = -((11-a1)*(m2+m3)+(m2*a2+m3*13)*cos(Xv(4,:))+m3*a3*cos(Xv(6,:)))/(m1+m2+m3)+Xv(2,:)-a1;
yA = zeros(1,length(xA));
xB = xA+12;
yB = yA;
xC = xB+12*cos(Xv(4,:));
yC = 12*sin(Xv(4,:));
xD = xC+13*cos(Xv(6,:));
yD = yC+13*sin(Xv(6,:));
n=length(xA);
v = VideoWriter('C:\Users\Usuario\Google Drive\Modelagem\videos\GIF.avi');
v.Quality = 95;
v.FrameRate = 1/h;
open(v);
for i=1:n
Pxa = [ xA(i), xB(i) ];
Pya = [ yA(i), yB(i) ];
Pxb = [ xB(i), xC(i) ];
Pyb = [ yB(i), yC(i) ];
Pxc = [ xC(i), xD(i) ];
Pyc = [ yC(i), yD(i) ];
Pxd = [ xD(i)+0.015*sin(Xv(6,i)), xD(i)-0.015*sin(Xv(6,i))];
Pyd = [ yD(i)-0.015*cos(Xv(6,i)), yD(i)+0.015*cos(Xv(6,i))];
Pxe = [ xD(i)+0.015*sin(Xv(6,i)), xC(i)];
Pye = [ yD(i)-0.015*cos(Xv(6,i)), yC(i)];
Pxf = [ xD(i)-0.015*sin(Xv(6,i)), xC(i)];
Pyf = [ yD(i)+0.015*cos(Xv(6,i)), yC(i)];
Pxg = [ xB(i)+0.02*sin(Xv(4,i)), xC(i)];
Pyg = [ yB(i)-0.02*cos(Xv(4,i)), yC(i)];
Pxh = [ xB(i)-0.02*sin(Xv(4,i)), xC(i)];
Pyh = [ yB(i)+0.02*cos(Xv(4,i)), yC(i)];
Pxi = [ xB(i)+0.02*sin(Xv(4,i)), xA(i)];

```

```

Pyi = [ yB(i)-0.02*cos(Xv(4,i)), yA(i)];
Pxj = [ xB(i)-0.02*sin(Xv(4,i)), xA(i)];
Pyj = [ yB(i)+0.02*cos(Xv(4,i)), yA(i)];
plot(xA, yA, xA(i),yA(i),
'o', xB, yB, xB(i),yB(i), 'o', xC, yC, xC(i),yC(i), 'o', xD, yD, xD(i),yD(i), 'o')
axis([-0.4 0.25 -0.325 0.325])
xlabel(' (m) ')
ylabel(' (m) ')
grid on
line(Pxa, Pya)
line(Pxb, Pyb)
line(Pxc, Pyc)
line(Pxd, Pyd)
line(Pxe, Pye)
line(Pxf, Pyf)
line(Pxg, Pyg)
line(Pxh, Pyh)
line(Pxi, Pxi)
line(Pxj, Pyj)
trocar()
frame = getframe(gcf);
writeVideo(v, frame);
end
close(v)

```