

EMARANHAMENTO QUÂNTICO

O emaranhamento quântico foi descoberto com estudos motivados pelo questionamento proposto por Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) em seu artigo "Can Quantum-Mechanical Description of ^{physical} reality be considered complete?".

Nesse paper são usados os conceitos a seguir:

1. Correção: grau de concordância entre conclusões da teoria e a realidade humana.
(Correctness)
2. Completude: todo elemento da realidade física deve ter correspondente na teoria física.
(Completeness)
3. Separabilidade: dois sistemas dinamicamente independentes têm seus próprios estados separadamente.
(Separability)
4. Critério de realidade física - CRF: se, sem perturbar o sistema de maneira alguma, podemos prever com probabilidade de 1 o valor de uma quantidade física, então existe um elemento de realidade física correspondente a essa quantidade física.
(Criterion of physical reality)
5. Observáveis não comutáveis: não podem ser medidos simultaneamente

$$(4) + (1) \Rightarrow \text{MQ incompleta} \quad (?)$$

Deuando em consideração o critério de realidade física e ~~e~~ que a teoria da mecânica quântica é correta, eles argumentam que a teoria não pode estar completa.

Para isso, é mostrado como exemplo um sistema S , com subsistemas S_1 e S_2 , como 2 partículas que interagiram entre t_1 e t_2 :

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \underbrace{\psi_p(x_2)}_{\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar}(x_2 - x_1)p}} \underbrace{\varphi_p(x_1)}_{\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar} p x_1}} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar} p x_1}$$

Nesse sistema, é feito o seguinte procedimento:

a') Medição local do momento em $S_1 \leadsto p'$
(da posição) x'

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x_2) \phi(x_1)$$

$$\phi_x(x_1) = \delta(x_1 - x)$$

b') O estado é reduzido para: $\Psi_{p'}(x_2) \phi_{p'}(x_1)$

$$\Psi_x(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{\frac{i}{\hbar}(x - x_2 + x_0)p} = \hbar \delta(x - x_2 + x_0)$$

c') Evidentemente, S_2 ~~deve~~ deve estar no estado $\Psi_{p'}$, predito com certeza absoluta

d') Resultado obtido sem perturbação de S_2 (assumindo separabilidade)

e') "c" + "d" + "CRF" $\Rightarrow \hat{p}_x^{(2)}$ é elemento da realidade

2) Conclusões incompatíveis com (5), uma vez que posição e momento não comutam.

Assim, há duas opções, de acordo com (i):

OU * A descrição quântica da realidade é incompleta

** Quando os operadores correspondentes a duas realidades físicas não comutam, tais quantidades não podem ter realidade ~~simultânea~~ simultânea

Após o exemplo, pode-se ver que se (*) é falso, ~~que~~ é provado que (**) é falso. Então, (*) deve ser verdadeiro e, de acordo com o argumento EPR, a MQ não pode ser completa.

||

Críticas de Bohr e Schrödinger a EPR

Bohr: rejeição da condição suficiente de realidade

O Gedankenexperiment proposto por EPR exclui a interação física do sistema com o aparato de medida. Bohr critica isso, uma vez que o processo de medida influencia o sistema e a definição dos observáveis físicos. É possível determinar experimentalmente as medições de posição ou momento de uma partícula determine automaticamente posição ou momento da outra, mas esses experimentos são incompatíveis.

Na visão de Bohr, observáveis, ainda que não comutem, são elementos da realidade. Seus autovalores, no entanto, são elementos da realidade apenas após um evento (medição). Assim, a crítica de Bohr não é suficiente para derrubar o argumento de EPR.

Schrödinger: rejeição do princípio de separabilidade de

Schrödinger é quem introduz o conceito de emaranhamento, que evita atribuição de propriedades a um sistema na ausência de eventos e, ao mesmo tempo, permite, quando há um evento, a atribuição de propriedades de forma classicamente desconhecida.

Ele também acreditava que o emaranhamento era "muito estranho" para ser realidade. Foi dessa cadeia de estudos que surgiu o Gedankenexperiment do gato de Schrödinger.

A partir das respostas de Bohr e Schrödinger ao artigo de EPR a MQ foi desenvolvida em busca de solucionar o paradoxo EPR: ou a MQ é incompleta (EPR) ou o princípio da separabilidade é violado.

Contribuição de Bohm

Se as diferentes soluções do paradoxo têm significado físico, devem levar a diferentes previsões. Assim, podem ser experimentalmente testadas. Bohm contribuiu com uma melhor definição do problema e uma tentativa de superar a incompletude da MQ (teoria das variáveis ocultas).

Para o desenvolvimento de sua teoria, Bohm usa um exemplo de variáveis discretas: $|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\uparrow\rangle - |1\downarrow\rangle)$

O estado considerado é invariante por rotação e pode ser gerado, por exemplo, no decaimento de uma partícula.

A utilização de observáveis discretos é vantajosa por possibilitar mais facilmente a realização de experimentos e evidenciar a não-localidade como consequência do emaranhamento.

Na tentativa de tornar a Mecânica Quântica completa, Bohm deu origem à teoria das variáveis ocultas, que consideram a existência de variáveis que não conhecemos e explicariam os fenômenos quânticos de maneira satisfatória.

* A teoria T contém observáveis $\{\hat{O}\}$ que descrevem o sistema S . As variáveis $\{\lambda_{HV}\}$ sobre S não são acessíveis com experimentos contemplados por T e os valores de cada $\hat{O}$ são obtidos com operações ponderadas sobre algumas variáveis ocultas λ_{HV} .

estado quântico $\hat{\rho} = \int_{\Omega} d\mu(\lambda_{HV}) \hat{\rho}_{\lambda_{HV}}(\hat{P})$

$\int_{\Omega}$ → espaço de medida
 $d\mu(\lambda_{HV})$ → medida normalizada ($\mu(\Omega) = 1$)
 $\hat{\rho}_{\lambda_{HV}}(\hat{P})$ → estados livres de dispersão
 $\hat{P}$ → observáveis têm variância zero
 $\hat{\rho}$ → PVM → projection-valued measure: projeções autoadjuntas norm. espaço de Hilbert específico

A teoria das variáveis ocultas é determinística e completa.

Bohm critica a descrição da realidade por funções de onda ~~por~~ devido a seu indeterminismo. Como de Broglie, Bohm propõe a presença de ondas e partículas, mas acrescenta o conceito de potencial quântico:

$\psi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) e^{\frac{i}{\hbar} \phi(\vec{r})}$

$\varphi(\vec{r})$ → amplitude
 $\phi(\vec{r})$ → fase
 $\psi(\vec{r})$ → dens. de prob.

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \left[\frac{(\nabla \phi)^2}{2m} + V(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \varphi}{\varphi} \right] \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{1}{2m} [\varphi \nabla^2 \phi + 2 \nabla \varphi \cdot \nabla \phi] \end{cases}$$

~ Hamilton - Jacobi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\nabla \phi)^2}{2m} + V(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{\nabla^2 \varphi}{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \varphi)^2}{\varphi^2} \right] = 0 \rightarrow \text{Eq. de Bohm - Jacobi}$$

$$V_Q(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{\nabla^2 \varphi}{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \varphi)^2}{\varphi^2} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \varphi}{\varphi}$$

$$V_Q(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{\nabla^2 p}{p} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla p)^2}{p^2} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \varphi}{\varphi}$$

- Cada partícula tem posição causalmente determinada, bem-definida, e contínua.
- A partícula está sempre imersa num "campo quântico" que satisfaz a equação de Schrödinger e desenvolve as ideias de de Broglie
- Eq. de movimento: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla V(\vec{r}) - \nabla V_Q(\vec{r}) \rightarrow$ "força quântica"
- Momento: $\vec{p} = \nabla \phi$

Problemas:

- * O potencial quântico independe da magnitude do campo
- * A força não diminui com a distância
- * Trajetórias de Bohm diferem das observadas
- * No modelo de Bohm, uma partícula pode excitar um detector num ~~em~~ caminho do interferômetro pelo qual não passaria devido ao potencial quântico.

Efeito Aharonov-Bohm: partícula puntiforme eletricamente carregada é afetada por campo eletromagnético mesmo confinada em região onde campos elétrico e magnético são nulos. O efeito é explicado pela interferência entre o potencial vetor ($\vec{A} \neq 0$) e a fase da função de onda.

Contribuição de Bell

- Responsável por começar discussão quantitativa do artigo EPR ↗ permite testes experimentais
- Quântica é completa com teoria das variáveis ocultas?
 - Separabilidade e não-localidade
- ↳ principais estudos de Bell

Estudando estados livres de dispersão e usando que para sistemas quânticos cujo estado é representado por um vetor em $\mathcal{H}$ de dimensão mínima 3, $\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}} = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O})$, Bell chegou ao seguinte corolário:

Para $\mathcal{H}$ para um sistema quântico com dimensão pelo menos 3, a existência de estados livres de dispersão é incompatível com a condição de aditividade para valores esperados de operadores que comutam.

$$\hat{P}_{\xi} |\psi\rangle = \frac{|\xi\rangle \langle \xi | \psi\rangle}{\langle \xi | \xi \rangle}$$

$$\sum_j \hat{P}_{\xi_j} = \mathbb{I}$$

$$\sum_j \langle \psi | \hat{P}_{\xi_j} | \psi \rangle = \sum_j \underbrace{\langle \hat{P}_{\xi_j} \rangle_{\psi}}_{\text{não-negativo}} = 1$$

$\Rightarrow$ Se $\langle \hat{P}_{\xi} \rangle_{\psi} = 1$, então $\langle \hat{P}_{\eta} \rangle_{\psi} = 0 \quad \forall |\psi\rangle \perp |\xi\rangle$

• Se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são outra base ortogonal para o subespaço gerado por $|\xi\rangle$ e $|\xi_2\rangle$:
 (possivelmente comb. linear de $|\psi_1\rangle$)

$$\langle \hat{P}_{\psi_1} \rangle_{\psi} + \langle \hat{P}_{\psi_2} \rangle_{\psi} = 1 - \sum_{j=1,2} \langle \hat{P}_{\xi_j} \rangle_{\psi} \quad \text{ou} \quad \langle \hat{P}_{\psi_1} \rangle_{\psi} + \langle \hat{P}_{\psi_2} \rangle_{\psi} = \langle \hat{P}_{\xi_1} \rangle_{\psi} + \langle \hat{P}_{\xi_2} \rangle_{\psi}$$

• Se $\langle \hat{P}_{\xi_1} \rangle_{\psi} = \langle \hat{P}_{\xi_2} \rangle_{\psi} = 0 \Rightarrow \langle \hat{P}_{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2} \rangle_{\psi} = 0$

• $|\xi\rangle$ e $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$; $\dim(\mathcal{H}) \geq 3$

$$\langle \hat{P}_{\psi} \rangle_{\psi} = 1 \quad \langle \hat{P}_{\xi} \rangle_{\psi} = 0 \quad \rightarrow \quad \| |\xi\rangle - |\psi\rangle \| = \frac{1}{2} \| |\psi\rangle \|$$

$\rightarrow$ ortogonal a $|\psi\rangle$ e normalizado

Prova: $|\psi'\rangle = \frac{|\psi\rangle}{\| |\psi\rangle \|} \quad \leadsto \quad |\xi'\rangle = |\psi'\rangle + \epsilon |\psi_{\perp}\rangle, \quad |\xi'\rangle = \frac{|\xi\rangle}{\| |\psi\rangle \|}$

$$\begin{array}{l|l} \langle \hat{P}_{\psi_{\perp}} \rangle_{\psi} = 0 & \text{e } \langle \hat{P}_{\psi_{\perp\perp}} \rangle_{\psi} = 0 \\ \text{ortogonal} & \\ \langle \hat{P}_{\xi} \rangle_{\psi} = 0 \rightarrow \langle \hat{P}_{\xi'} + \alpha' \epsilon \psi_{\perp\perp} \rangle_{\psi} = 0 & \begin{array}{l} \langle \hat{P}_{\epsilon \psi_{\perp} + \alpha \epsilon \psi_{\perp\perp}} \rangle_{\psi} = 0 \\ |\xi'\rangle + \alpha' \epsilon |\psi_{\perp\perp}\rangle \text{ e } -\epsilon |\psi_{\perp}\rangle + \alpha \epsilon |\psi_{\perp\perp}\rangle \\ \text{são ortogonais} \\ \rightarrow \langle \hat{P}_{\psi'} + \epsilon (a + \alpha') \psi_{\perp\perp} \rangle_{\psi} = 0 \end{array} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & \\ c_1 = 1 \quad c_2 = \epsilon/a & \end{array}$$

$$\rightarrow \text{Se } \epsilon < 1/2, \exists a \in \mathbb{R}; \epsilon(a + \alpha') = \pm 1 \rightarrow a = \frac{1}{2\epsilon} \pm \sqrt{\frac{1}{4\epsilon^2} - 1}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{P}_{\psi' + \psi_{\perp\perp}} \rangle_{\psi} = \langle \hat{P}_{\psi' - \psi_{\perp\perp}} \rangle_{\psi} = 0, \quad \psi' \pm \psi_{\perp\perp} \text{ são ortogonais}$$

$$\rightarrow \text{Somando-os: } \langle \hat{P}_{\psi'} \rangle_{\psi} = 0 \quad \times \quad \Rightarrow \| |\xi'\rangle - |\psi'\rangle \| > \frac{1}{2} \| \psi_{\perp} \|$$

Daí, é obtido o corolário.

Não-localidade:

↳ Bell mostrou que não é possível uma teoria de variáveis ocultas local determinística que seja capaz de fazer previsões compatíveis com a mecânica quântica.

Gedankenexperiment:

Parâmetro oculto λ_{HV} tal que resultado A_a da medição de spin na direção $\vec{a}$ depende apenas de λ_{HV} e $\vec{a}$ ($\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$). O mesmo vale para B_b .

$$(A_a B_b)(\lambda_{HV}) = A_a(\lambda_{HV}) B_b(\lambda_{HV}); \quad A_a(\lambda_{HV}) = \pm 1 \\ \downarrow \text{separabilidade} \quad B_b(\lambda_{HV}) = \pm 1$$

$$\langle (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}) \rangle \equiv \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \int_{\Lambda_{HV}} d\lambda_{HV} \rho(\lambda_{HV}) A_a(\lambda_{HV}) B_b(\lambda_{HV}); \quad \int d\lambda_{HV} \rho(\lambda_{HV}) = 1$$

$\nearrow$ distribuição de probabilidade de λ_{HV}

$$\leadsto -1 \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq 1 \quad \nearrow |\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \rightarrow \text{invariante per rotação} \\ \rightarrow \text{spins opostos}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_{\Psi_0} = \langle \Psi_0 | (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}) | \Psi_0 \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$* \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_{\Psi_0} = -1 \rightarrow \text{fato experimental}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1 \Leftrightarrow A_a(\lambda_{HV}) = -B_a(\lambda_{HV})$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = - \int d\lambda_{HV} \rho(\lambda_{HV}) A_a(\lambda_{HV}) A_b(\lambda_{HV}) \quad * \lambda = \lambda_{HV}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = - \int d\lambda \rho(\lambda) [A_a(\lambda) A_b(\lambda) - A_a(\lambda) A_c(\lambda)] \quad + [A_b(\lambda)]^2 = 1$$

$$= \int d\lambda \rho(\lambda) A_a(\lambda) A_b(\lambda) [A_b(\lambda) A_c(\lambda) - 1] = \pm \int d\lambda \rho(\lambda) \underbrace{[1 - A_b(\lambda) A_c(\lambda)]}_{\substack{\uparrow 1 \\ \downarrow 20}} \quad \pm 1$$

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A_b(\lambda) A_c(\lambda)]$$

$$\Rightarrow |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle| \leq \underbrace{\int d\lambda \rho(\lambda)}_1 - \underbrace{\int d\lambda \rho(\lambda) A_b(\lambda) A_c(\lambda)}_{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}$$

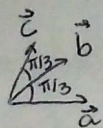
$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle| \leq 1 - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

Teorema de Bell:

Uma teoria determinística de variáveis ocultas, que contemple o princípio de separabilidade, deve satisfazer a desigualdade anterior. No entanto, as predições da mecânica quântica a violam.

Prova:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ coplanares



$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\|\vec{b}\| \|\vec{c}\|} \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\|\vec{a}\| \|\vec{c}\|} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}$$

$$* \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_{\psi_0} = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_{\psi_0} - \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle_{\psi_0}| = \left| -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = 1$$

$$1 + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle_{\psi_0} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$1 > \frac{1}{2} \rightarrow$ não satisfaz desigualdade

O que é não-localidade quântica?

Teorema de Eberhard:

Correlações quânticas não implicam violação da localidade como expressa em

$$\sum_{a,b} p(a,a; b,b) = p(a,a); \quad \sum_a p(a,a; b,b) = p(b,b)$$

↑ configuração "b" do experimento

↓ configuração "a" do experimento

Prova:

$$\hat{P}_{a,a; b,b} = |0_{a,b}^{S_1}\rangle \langle 0_{a,b}^{S_2}|$$

$$p(a,a) = \text{tr} [\hat{P}_{a,a} \hat{\rho}]$$

$$\hat{\rho} \xrightarrow{\hat{O}_1} \hat{\rho}' = \frac{\hat{P}_{a,a} \hat{\rho} \hat{P}_{a,a}}{p(a,a)}; \quad p'(b,b|a,a) = \text{tr} \left[\frac{\hat{P}_{b,b} \hat{P}_{a,a} \hat{\rho} \hat{P}_{a,a}}{p(a,a)} \right]$$

$$p(a,a; b,b) = p(a,a) p'(b,b|a,a) = p(a,a) \frac{\text{tr} [\hat{P}_{b,b} \hat{P}_{a,a} \hat{\rho} \hat{P}_{a,a}]}{p(a,a)}$$

$$\sum_a p(a,a; b,b) = \text{tr} \sum_a (\hat{P}_{b,b} \hat{P}_{a,a} \hat{\rho} \hat{P}_{a,a}) = \text{tr} [\hat{P}_{b,b} \hat{\rho}] = p(b,b)$$

→ não há violação de localidade, mas de separabilidade

Informação quântica

Entropia de Von Neumann: $S_{VN}(\hat{\rho}) = -\text{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$
 $= -\sum_j r_j \ln r_j$
 $\hookrightarrow$ autovalores

Para uma mistura completa, a entropia é máxima: $S_{\text{MAX}}^{(n)} = \ln(n)$

Para estado puro, a entropia é nula ($S_{VN} = 0$)

A entropia de Von Neumann está relacionada à informação que temos sobre o sistema.

Propriedades:

• Não-negativa: $S_{\text{MAX}}^{(n)} \geq S(\hat{\rho}) \geq 0$
 $\downarrow$
igualdade
pl estado puro

• Invariável por transformações unitárias: $S(\hat{\rho}) = S(\hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger)$

• Concauidade: a mistura de estados puros tem entropia maior do que a soma das entropias desses estados puros $S(\sum_j \omega_j \hat{\rho}_j) \geq \sum_j \omega_j S(\hat{\rho}_j)$
 $\hookrightarrow \omega_j \geq 0$

• Subaditividade: $\hat{\rho} \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, $\hat{\rho}_A = \text{tr}_B \hat{\rho} \in \mathcal{H}_A$ e $\hat{\rho}_B = \text{tr}_A \hat{\rho} \in \mathcal{H}_B$ $\sum_j \omega_j = 1$

$$S(\hat{\rho}) \leq S(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) = S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B)$$

$\hookrightarrow$ igualdade para $\hat{\rho} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$

Emaranhamento e informação:

• Embaranhamento entre sistemas 1 e 2: $E(1,2) = -[S(1,2) - (S(1) + S(2))]$
 $= S(1) + S(2) - S(1,2)$

• Embaranhamento é uma forma de informação mútua: dois sistemas emaranhados ~~estão~~ estão correlacionados por compartilharem informação que não é prevista classicamente.

Inf. mútua clássica: $I(J;K) = S(J) - S(J|K) = S(K) - S(K|J) = S(J) + S(K) - S(J,K)$

$$S(J|K) = -\sum_{j,k} p(j,k) \ln p(j|k) \quad S(J,K) = -\sum_{j,k} p_{j,k} \ln p_{j,k}$$

Embaranhamento relativo a observáveis: $S(\hat{O}_1, \hat{O}_2) = -\sum_{j,k} \langle j| \hat{\rho}_1 |j\rangle \langle k| \hat{\rho}_2 |k\rangle \ln \langle j| \hat{\rho}_1 |j\rangle \langle k| \hat{\rho}_2 |k\rangle$ $\in E(1,2)$

$$S(\hat{O}_1, \hat{O}_2) = -\sum_j \sum_k \langle jk| \hat{\rho} |jk\rangle \ln \langle jk| \hat{\rho} |jk\rangle \rightsquigarrow E(\hat{O}_1, \hat{O}_2) = S(\hat{O}_1) + S(\hat{O}_2) - S(\hat{O}_1, \hat{O}_2) \quad q/12$$

Medida e informação

Estado inicial: $\hat{\rho}_i^{12} = \hat{\rho}_i^1 \otimes \hat{\rho}_i^2 \rightarrow$ dois sistemas isolados

$$S(\hat{\rho}_i^{12}) = S(\hat{\rho}_i^1) + S(\hat{\rho}_i^2) = S(\hat{\rho}_f^{12}) \leq S(\hat{\rho}_f^1) + S(\hat{\rho}_f^2)$$

↳ possível correlação

$$E(\hat{\rho}_f^{12}) = S(\hat{\rho}_f^1 \otimes \hat{\rho}_f^2) - S(\hat{\rho}_f^{12})$$

$$I_m = -\Delta S = S(\hat{\rho}_f^1 \otimes \hat{\rho}_f^2) - S(\hat{\rho}_m)$$

$$\hat{\rho}_{SAE}(t_0) = \hat{\rho}_{SA}(t_0) \hat{\rho}_E(t_0) \xrightarrow{t} S_E(S, A, E) + S_E(A) \leq S_E(S, A) + S_E(A, E)$$

$$S_{t_0}(S, A, E) = S_t(S, A, E)$$

$$S_{t_0}(S, A, E) = S_{t_0}(S, A) + S_{t_0}(E)$$

$$\underbrace{S_E(S) + S_E(A) - S_E(S, A)}_{E_E(S, A)} \leq \underbrace{S_E(S) + S_E(A, E) - S_E(S, A, E)}_{E_{t_0}(S, A)}$$

$$S_t(S) = S_{t_0}(S) ; S_t(A, E) = S_{t_0}(A, E)$$

$$S_{t_0}(A, E) = S_{t_0}(A) + S_{t_0}(E)$$

$$E_t(S, A) \leq E_{t_0}(S, A)$$

Limite para informação:

Holevo: limite superior para informação que pode ser extraída de um sistema quântico

↑ inf. média ↑ output

$$I_u(\eta; x) = S(\eta) - S(\eta|x), \quad S(\eta|x) = - \int dx p(x) \int d\eta p(\eta|x) \ln p(\eta|x)$$

↑ input

$$p_{\hat{\rho}}(dx) = \text{tr}(\hat{E}(dx)\hat{\rho}) ; \quad \hat{\rho} = \int \hat{P}_{\eta} p(d\eta)$$

Teorema de Holevo: a informação que pode ser obtida de um sistema considerado está sujeita ao seguinte limite:

$$I_u(\eta; x) \leq S(\hat{\rho}) - \int d\eta p(d\eta) S(\hat{P}_{\eta})$$

↑ igualdade quando todos os $\hat{P}_{\eta}$'s comutam

↳ Confirmação da impossibilidade de medir a matriz de densidade de um único sistema, que representa a máxima informação sobre um sistema.

Computação Quântica

Qubits: substituição dos bits 0 e 1 por um sistema de dois níveis:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Superposição: $|\Psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$

• n-qubits: $|j_1\rangle |j_2\rangle |j_3\rangle \dots |j_n\rangle$

Exemplo: $|\Psi\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$

• Emaranhamento: $|\Psi\rangle = c_\alpha |00\rangle + c_\beta |11\rangle$

* $|\Psi\rangle = c_\alpha |00\rangle + c_\beta |11\rangle$ não é emaranhado
 $= |0\rangle \otimes (c_\alpha |0\rangle + c_\beta |1\rangle)$

Teleporte: transferência de um estado de input para um de output distante.

Estado a ser teleportado: $|j\rangle_1 = c|\uparrow\rangle_1 + c'|\downarrow\rangle_1$

Alice e Bob recebem um par de estados emaranhados (canal quântico):

$$|\Psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3 - |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3)$$

Alice Bob

Alice também recebe a partícula 1 e faz medida de Bell no sistema 12

$$\hat{B} = \hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2 (\hat{\sigma}_2 \cdot \vec{b} + \hat{\sigma}_2 \cdot \vec{b}') + \hat{\sigma}_3 \cdot \hat{\sigma}_2 (\hat{\sigma}_2 \cdot \vec{b} - \hat{\sigma}_2 \cdot \vec{b}')$$

Antes da medida:

$$|\Psi\rangle_{123} = \frac{c}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3 - |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3) + \frac{c'}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3 - |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3)$$

Estados de Bell

$$\begin{cases} |\Psi^-\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\Psi^+\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\Phi^-\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle) \\ |\Phi^+\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (c|\uparrow\uparrow\rangle_{12} |\downarrow\rangle_3 - c'|\downarrow\downarrow\rangle_{12} |\uparrow\rangle_3) - \frac{1}{\sqrt{2}} (c|\uparrow\downarrow\rangle_{12} |\uparrow\rangle_3 - c'|\downarrow\uparrow\rangle_{12} |\downarrow\rangle_3)$$

$$= \frac{c}{2} (|\Phi^+\rangle_{12} + |\Phi^-\rangle_{12}) |\downarrow\rangle_3 - \frac{c'}{2} (|\Phi^+\rangle_{12} - |\Phi^-\rangle_{12}) |\uparrow\rangle_3 - \frac{c}{2} (|\Psi^+\rangle_{12} + |\Psi^-\rangle_{12}) |\uparrow\rangle_3 + \frac{c'}{2} (|\Psi^+\rangle_{12} - |\Psi^-\rangle_{12}) |\downarrow\rangle_3$$

$$= \frac{1}{2} [|\Psi^-\rangle_{12} (-c|\uparrow\rangle_3 - c'|\downarrow\rangle_3) + |\Psi^+\rangle_{12} (-c|\uparrow\rangle_3 + c'|\downarrow\rangle_3) + |\Phi^-\rangle_{12} (c|\downarrow\rangle_3 + c'|\uparrow\rangle_3) + |\Phi^+\rangle_{12} (c|\downarrow\rangle_3 - c'|\uparrow\rangle_3)]$$

$$\hat{U}_k |k\rangle_3 = |j\rangle_1$$

$$\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \hat{U}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \hat{U}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \hat{U}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Com essas operações, Bob pode recuperar o estado inicial, sabendo o resultado da medida de Alice (canal clássico).

Criptografia quântica:

Princípios básicos:

- Qualquer medida perturba o sistema
- Impossível distinguir dois estados não-ortogonais com uma única medida
- Impossível clonar um estado quântico

Protocolo BB84:

Alice recebe bit aleatório, mede na base X ou Z e envia a Bob.

Bob mede na base X ou Z .

Se mediram na mesma base, compartilham um bit, 0 ou 1, caso contrário, não compartilham.

No fim, eles têm uma sequência de bits que forma a chave quântica.

Protocolo Ekert 91:

Alice e Bob usam 2 qubits num estado com emaranhamento máximo:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \rightarrow \text{mesmas bases} \rightarrow \text{mesmos resultados} \rightarrow \text{chave}$$

2a Possibilidade de verificar a segurança do protocolo, já que tem terceira escolha de base, podem testar a desigualdade de Bell e verificar que o estado está realmente emaranhado.

$$|\langle a_3 b_1 \rangle + \langle a_1 b_3 \rangle + \langle a_2 b_2 \rangle - \langle a_1 b_2 \rangle| = 2\sqrt{2} \rightarrow \text{estado singlete}$$

