Enzo C. Zugliani – 10333741

Exercício para casa 0)

Fazer os diagramas de Bode do exercício de identificação usando o comando *bode* dos softwares numéricos, admitindo que os zeros são reais e iguais à 2450 e verificando que os zeros devem ser um par de zeros complexos como na solução apresentada.

Função de transferência da solução apresentada (expandindo a FT dos slides):

$$\mathrm{FT_{original}} = \frac{s^2 + 772.3\,s + 6002500}{6002500\,s^2 + 12185075 \cdot 10^4\,s + 36015 \cdot 10^9}$$

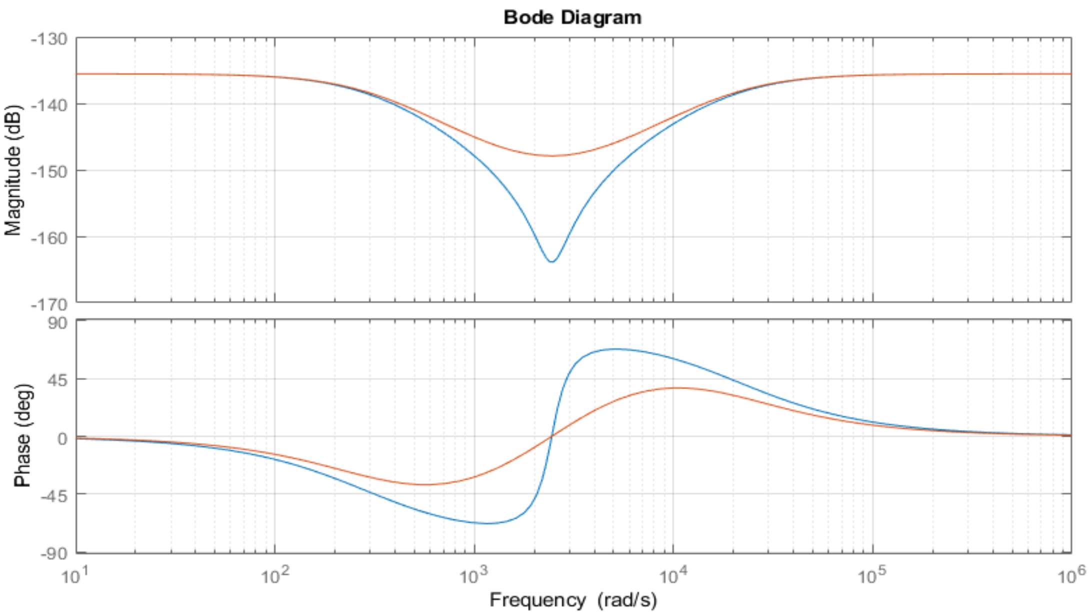
Função de transferência da solução admitindo zeros reais e iguais:

$$\mathrm{FT_{mod}} = \frac{s^2 + 4900\,s + 6002500}{6002500\,s^2 + 12185075 \cdot 10^4\,s + 36015 \cdot 10^9}$$

O diagrama de bode de ambos os casos está apresentado na figura 1.

A FT original identificada em aula está em azul, enquanto a FT modificada está em laranja.

Figura 1 : Diagrama de Bode para ambas as Funções de transferência



Nota-se claramente que caso o sistema tivesse zeros reais e iguais, os diagramas de bode seriam diferentes, com um decaimento de 20dB por década (e não 40), um pico muito menor, e variação de fase de 90 graus, e não 180.

Enzo C. Zugliani - 10833741

1) $\cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$\cdot\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

a) Estabilidade:

• Autovalores da matriz do sistema.

$\cdot (sI - A) = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 12 & s+4 \end{bmatrix}$

$\cdot \det(sI - A) = s\cdot(s+4) - (-2)\cdot 12 =$

$= s^2 + 4s + 24 = 0$

• Autovalores são os polos do sistema:

$p_1 = -2 + 2\sqrt{5}i$

$p_2 = -2 - 2\sqrt{5}i$, • Parte Real, Sistema Estável

• Efetuando a multiplicação matricial:

$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -12x_1 - 4x_2 + u \end{cases} \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{\ddot{x}_1}{2}$

$\Rightarrow \ddot{x}_1 = -24x_1 - 8\dot{x}_1 + u$

$\Downarrow \mathcal{L}$

$s^2 X_1 = -4X_1 s - 24 + 2U \Rightarrow$

$\Rightarrow X_1(s^2 + 4s + 24) = 2U$

$\Rightarrow \frac{X_1}{U} = \frac{2}{\underbrace{s^2 + 4s + 24}}$

↳ Eq. Caract → Pode ser estável

• Routh-Hurwitz:

s^2	1	24
s^1	4	0
s^0	24	

→ Sem troca de sinal

↳ Sistema Estável

b) Polos: $-2+2\sqrt{5}\,i$
$-2-2\sqrt{5}\,i$

- $\omega_n = \sqrt{2^2+(2\sqrt{5})^2} = \sqrt{4+4\cdot 5}$; $\omega_n = 2\sqrt{6}$ rad/s
- Admitindo $m=1$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow K = m\,\omega_n^2 \Rightarrow$$

$$K = 1\cdot 24 \; ; \; K = 24 \text{ N/m}$$

- $\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{2}{2\sqrt{6}}$;

$$\zeta = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0{,}41$$

- $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{Km}} \Rightarrow c = \zeta\, 2\sqrt{Km} = \frac{\sqrt{6}}{6}\cdot 2\cdot\sqrt{24}$; $c = 2$ Ns/m

c) • $\omega_d = \mathrm{Im}(p) = 2\sqrt{5}$ rad/s
- $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} = 2\sqrt{6}\sqrt{1-2\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}$; $\omega_r = 4$ rad/s
- $M_{r_{Deg}} = e^{\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$; $M_{r_{Deg}} = 24{,}5\%$
- $M_{r_{ress}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$; $M_{r_{Res}} = 1{,}342$

Em dB: $20\cdot\log(1{,}342)$; $M_{r_{dB}} = 2{,}55$ dB

- $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{+2}$; $t_s = 2$ s

d) • $\Phi(\Delta t) = e^{A\Delta t}$; para $\Delta t = 0{,}5$

$$\Phi(\Delta t) = \begin{bmatrix} -0{,}0976 & 0{,}1294 \\ -0{,}7766 & -0{,}3565 \end{bmatrix}$$

- $\Phi(s) = (sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 12 & s+4 \end{bmatrix}^{-1}$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s+4)}{s^2+4s+24} & \frac{2}{s^2+4s+24} \\ \frac{-12}{s^2+4s+24} & \frac{s}{s^2+4s+24} \end{bmatrix}$$

tilibra

e) $X(i+1) = \Phi \cdot X + \Gamma \cdot B$

- $\Gamma \cdot B = \begin{bmatrix} 0{,}09147 \\ 0{,}06472 \end{bmatrix}$

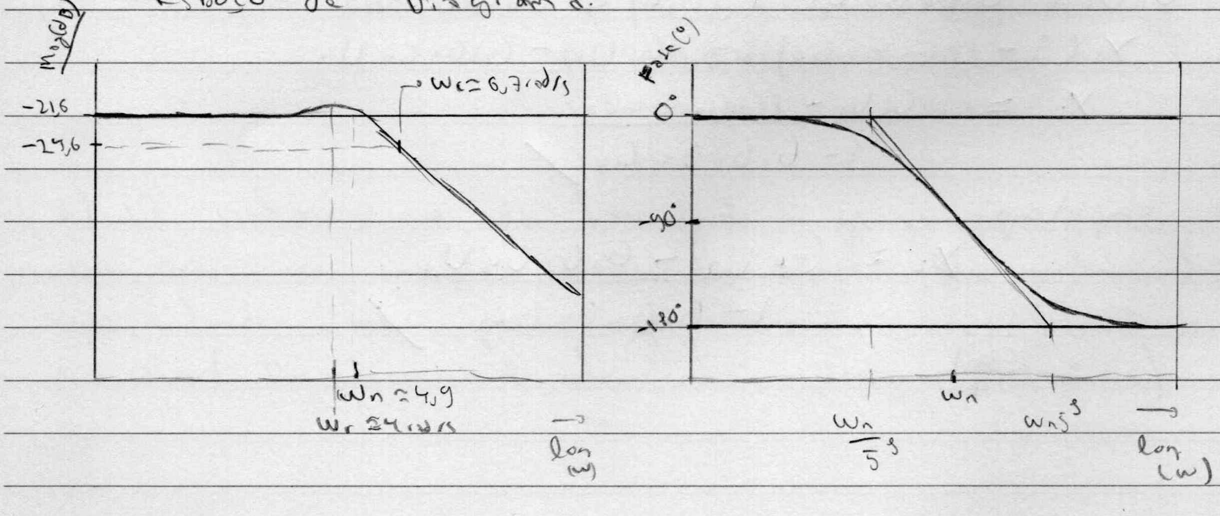
Para $Y = [1 \; 0] X$; rodado para os primeiros 10 peridos:

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4	5
y	0	0,0915	0,0909	0,0788	0,0844	0,0835	0,0831	0,0834	0,0833	0,0833	0,0833

f) Do item a), a FT é:

- $G(s) = \dfrac{2}{s^2 + 4s + 24}$

- Na forma de bode, a FT senoidal é:
  - $G(j\omega) = \dfrac{2}{24\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{24}\right) + \frac{\omega}{6} j\right)}$
  - $\Rightarrow K_B = \dfrac{2}{24} = \dfrac{1}{12}$
- Assintotas para o Ganho:
  - Horizontal, em $20 \log(K_B) = -21{,}6\,dB$
  - Decaindo 40 dB por década depois de $\omega_n = 2\sqrt{6}$ rad/s
- Assintotas para a fase:
  - $K_B > 0$; $\phi = 0°$
  - Par de polos complexos conjugados: Fase diminui 180°, cruzando $-90°$ em ω_n
- Ajuste: · Pico de $M_r = 1{,}342$ em $\omega_r = 4$
  - Em dB $= 20 \log(1{,}342)$; $M_{r_{dB}} = 2{,}55\,dB$
- Esboço do Diagrama:



· Largura de banda: de $\omega = 0$ à $\omega = \omega_c \approx 6{,}7$ rad/s

g) $G(s) = \dfrac{2}{s^2 + 4s + 24}$

h) Nova Função de transferência:

· Forma de Bode:

$$G_N(j\omega) = \frac{1}{12} \cdot \frac{2 \cdot \left(\frac{s}{2}+1\right)}{12 \cdot \left(\frac{s}{12}+1\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{24}\right) + \frac{\omega}{6} j}$$

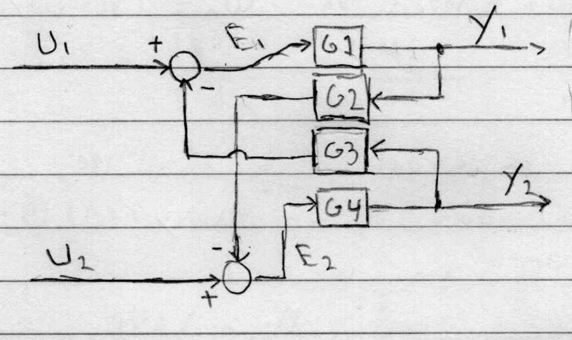
· $K_B = \dfrac{1}{72} = -37{,}15$ dB

· Somado ao gráfico anterior, haverá uma assíntota crescendo 20dB por década a partir de $\omega = 2$ e uma assíntota decrescendo 20dB/dec a partir de $\omega = 12$

· No gráfico de fase, haverá uma transição para $+90°$, passando por $+45°$ em $\omega = 2$, e uma transição para $-90°$, passando $-45°$ em $\omega = 12$.

· O efeito somado resultante é a variação do ganho em corrente contínua para $-37{,}15$ dB, e leves modificações no formato das curvas, principalmente próximo de ω_n

2)



a) · $Y_1 = G_1 E_1 = G_1 (U_1 - G_3 Y_2) =$

$= G_1 (U_1 - G_3 \cdot G_4 E_2) =$

$= G_1 (U_1 - G_3 \cdot G_4 (U_2 - G_2 Y_1)) \Rightarrow$

$\Rightarrow Y_1 = G_1 U_1 - G_1 G_3 G_4 U_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 Y_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow Y_1 (1 - G_1 G_2 G_3 G_4) = G_1 U_1 - G_1 G_3 G_4 U_2$

$$Y_1 = \frac{G_1 U_1 - G_1 G_3 G_4 U_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$

· Por simetria:

$$Y_2 = \frac{G_4 U_2 - G_1 G_2 G_4 U_1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$

b) $E_1 = U_1 - G_3 Y_2 = U_1 - G_3 G_4 E_2 = U_1 - G_3 G_4 (U_2 - G_2 Y_1) =$
$= U_1 - G_3 G_4 (U_2 - G_2 G_1 E_1) = U_1 - G_3 G_4 U_2 + G_3 G_4 G_2 G_1 E_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow E_1 (1 - G_1 G_2 G_3 G_4) = U_1 - G_3 G_4 U_2$

- $\dfrac{E_1}{U_1} = \dfrac{1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$ /

- Por simetria:
- $\dfrac{E_2}{U_2} = \dfrac{1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$ /

3) $G_1(s) = \dfrac{\theta}{T} = \dfrac{0{,}0102 s^4 + 0{,}0046 s^3 - 0{,}0636 s^2 + 0{,}0001 s}{s^4 + 0{,}4511 s^3 + 0{,}3015 s^2 + 0{,}0989 s}$

a) Há um polo em $s = 0$ e um em $-0{,}3660$
Os outros polos são o par de complexos conjugados:
$p_1 = -0{,}0426 + 0{,}5182 i$
$p_2 = -0{,}0426 - 0{,}5182 i$ /

b) Os zeros do sistema são:
$z_1 = 0$; $z_2 = 2{,}2812$; $z_3 = -2{,}7334$; $z_4 = 1{,}5725 \cdot 10^{-3}$ /

c) Como todos os polos possuem parte real negativa o sistema é estável. Como o item a) afirma que ele oscila de maneira amortecida, isso é esperado. /

d) Há polos dominantes: O par de complexos conjugados
$p_1 = -0{,}0426 + 0{,}5182 i$
$p_2 = -0{,}0426 - 0{,}5182 i$ /

e) O sistema é de fase não mínima pois possui um zero no semiplano direito do planos. Um sistema desse tipo demora mais para responder e é mais difícil de controlar (Responde inicialmente "contra" o degrau ou referência)

f) Todos os coeficientes são positivos, Montando a tabela:

s^3	1	0,3015
s^2	0,4511	0,0989
s^1	0,0823	0
s^0	0,0989	0

↳ Sem troca de sinal ; Sistema Estável

g) Analisando apenas os polos dominantes:

$p_{1,2} = -0,0426 \pm 0,5182\, i$

· $\omega_n = (-0,0426^2 + 0,5182^2)^{1/2}$; $\omega_n = 0,5199$ rad/s

· $\zeta = \dfrac{0,0426}{0,5199}$; $\zeta = 0,082$

· $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$; $\omega_r = 0,516$ rad/s

h) · Para entrada degrau:

$$M_p = e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \; ; \; M_p = 77\ \%$$

· Erro em RP:

$$TVF \rightarrow \lim_{t\to\infty}\theta(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot G_1 \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} G_1(s) = 0$$

> O sistema tende a zero para entrada degrau (erro = 1)