Escola Politécnica da USP

PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Prof. Dr. Décio Crisol Donha

Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

Aluno: Guilherme Müller da Silva – NºUSP: 935.1008

2020

Exercício exemplo – implementação do código:

```
//Exercício1
//Definição Matrizes

A=[0 1;-2 -3];
B=[0;1];
C=[1;0];
D=[0];

sistema=syslin('c',A,B,C,D);


G=ss2tf(sistema)


//Determinação da Matriz T para inversão do sistema

Ti = [1 -1;1 1];
T = inv(Ti);
At = Ti*A*T;
Bt = Ti*B;
Ct = C*T;
Dt = D;


sistemaT = syslin('c',At,Bt,Ct,Dt);

GT = ss2tf(sistemaT);

```

A partir do código acima obtém-se que as funções de transferência G e Gt são iguais, sendo:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

A seguir segue a resolução dos itens do exercício 1:

* Exercício - 1

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot u \\ \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} \cdot u \end{cases}$$

→ Sendo as variáveis Z_1 e Z_2:

$$Z_1 = 2x_1 + x_2$$

$$Z_2 = x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{T} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

→ De modo que temos:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & (\text{Eq. }1) \\ y = C \cdot x + Du & (\text{Eq. }2) \\ x = T \cdot Z \Rightarrow T^{-1} \cdot x = T^{-1} \cdot T \cdot Z = Z & (\text{Eq. }3) \\ \dot{Z} = T^{-1} \cdot \dot{x} & (\text{Eq. }4) \end{cases}$$

- Substituindo a Eq. 1 na Eq. 4: $\dot{Z} = T^{-1}(Ax + Bu)$

- Substituindo a Eq. 3 na equação acima, obtem-se:

$$\dot{Z} = T^{-1} A \cdot T \cdot Z + T^{-1} B u$$

→ UTILIZANDO-SE A NOTAÇÃO: $A_T = T^{-1} \cdot A \cdot T$ E $B_T = T^{-1} \cdot B$

$$\boxed{\dot{Z} = A_T \cdot Z + B_T \cdot u}$$

→ SUBSTITUINDO A EQ 3 NA EQ 2:

$$\boxed{y = C_T \cdot Z + D_T \cdot u}$$

ONDE: $C_T = C \cdot T$

$D_T = D$

→ ASSIM TEMOS AS MATRIZES A_T, B_T, C_T E D_T, COMO SENDO:

$$A_T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D_T = [0]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{Z} = A_T Z + B_T u \\ \\ y = C_T Z + D_T u \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + [0] \cdot u \end{cases}$$

b-) <u>AUTOVETORES DA MATRIZ A:</u>

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \overbrace{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & (-3-\lambda) \end{vmatrix}}^{D} =$$

$$= (3+\lambda)\cdot\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda' = -1} \quad \boxed{\lambda'' = -2}$$

$\Rightarrow$ <u>PARA λ' TEMOS:</u> $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{u} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{u_1 = -u_2} \Rightarrow$ COM OS MENORES MÓDULOS POSSÍVEIS

TEMOS: $u = [1, -1]$

$\rightarrow$ <u>PARA λ'' TEMOS:</u> $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}_{v} = 0$

$\Rightarrow 2v_1 = -v_2 \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{-1}{2} v_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ COM OS MENORES MÓDULOS POSSÍVEIS, TEMOS:

$$\boxed{v = [1, -2]}$$

Digitalizado com CamScanner

c-) COMO JÁ IMPLEMENTADO NO PROGRAMA NO SCILAB:

$$G(s) = G_T = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

d-) AUTOVALORES DA MATRIZ A_T:

$$\det(A_T - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}}_{D} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda' = -1} \quad \boxed{\lambda'' = -2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ PARA λ': $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{u} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{u_2 = 0}$ u_1 PODE ASSUMIR QUALQUER VALOR, PORTANTO PARA OS MENORES MÓDULOS POSSÍVEIS, TEMOS: $u = [1, 0]$

→ PARA $\lambda'' = -2$:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = 0$$ E v_2 PODE

ASSUMIR QUALQUER VALOR

$$\boxed{v = [0 \quad 1]}$$

AUTOVALOR DE A = AUTOVALOR DE A_T

AUTOVETOR DE A ≠ AUTOVETOR DE A_T

Diagrama de Bode para RC = 0,05: