# Lista F

# PME3380 – MODELAGEM DE SISTEMAS DINÂMICOS


Paulo Mateus Corrêa Vianna

10772741



Escola Politécnica

Universidade de São Paulo


São Paulo

2020

Nome: Paulo Mateus Corrêa Vianna Nusp: 10772741

Exercício 1:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad e \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] u$$

Escolhem-se: $\begin{cases} z_1 = 2x_1 + x_2 \\ z_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

$$(z) = (T^{-1}) \cdot (x) \rightarrow (x) = (T) \cdot (z)$$

(a) Determinação do sistema convertido:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C = [1 \; 0]$ ; $D = [0]$

$\dot{x} = Ax + Bu$

$Y = Cx + D$

$$\begin{cases} z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$



Portanto, temos que

$\dot{x} = Ax + Bu$

$T\dot{z} = ATz + Bu$

$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$

$Y = Cx + D$

$Y = CTz + D$

$A_T = T^{-1}AT$

$B_T = T^{-1}B$

$C_T = CT$

$D_T = D$

que leva a:

$A_T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$B_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C_T = [1 \; -1]$

$D_T = 0$

Por fim, chega-se a: $\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$ e $Y = [1 \; -1] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + 0$

(b) Determinação dos autovalores e autovetores:

$$\det(A-\lambda I)=0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\lambda(-3-\lambda)+2=0 \rightarrow \lambda^2+3\lambda+2=0$$

$$\lambda_1=-1 \text{ e } \lambda_2=-2$$

Substituindo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow u=[1,-1]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow v=[-2,1]$$



(c) Determinação do sistema convertido e função de transferência:

$$G(s)=\frac{1}{2+3s+s^2} \text{ e } G_T(s)=\frac{1}{2+3s+s^2}$$ (Funções idênticas como esperado)

(d) Determinação dos autovalores e autovetores de A:

$$\det(A_T-\lambda I)=0 \rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (-1-\lambda)(-2-\lambda)=0 \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\lambda_{T_1}=-1 \\ \lambda_{T_2}=-2\end{matrix}}$$

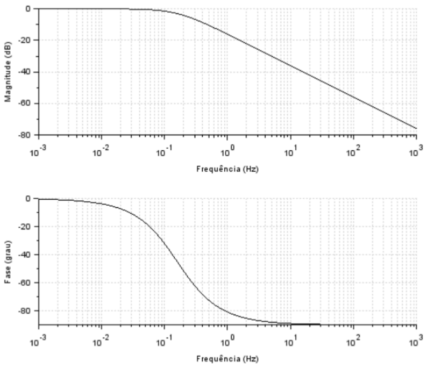
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{T_1} \\ u_{T_2} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{u_T=[0,1]} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{T_1} \\ v_{T_2} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{v_T=[1,0]}$$



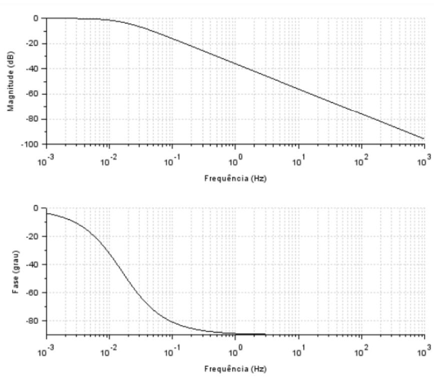
Código utilizado no scilab do exercício 1:

```
A = [0 1 ; -2 -3];
B = [0 ; 1];
C = [1 0];
D = 0;
Ti = [2 1 ; 1 1];
T = inv(Ti);
AT = Ti*A*T;
BT = Ti*B;
CT = C*T;
DT = D;
disp(AT);
autovalores_A = spec(A);
autovalores_AT = spec(AT);
disp(autovalores_A);
disp(autovalores_AT);
sistema = syslin('c',A,B,C,D);
sistemaT = syslin('c',AT,BT,CT,DT);
G = ss2tf(sistema);
GT = ss2tf(sistemaT);
disp(G);
disp(GT);
```

Exercício 2:




Rc=1




Rc=10

Código utilizado no scilab do exercício 2:

```
clc()
clear()
n=1;
d=poly([1 1000], 's', 'coeff');
G=syslin('c', n/d);
bode(G)
```

Exercício 3:

Exercício 3:

Consideraram-se 3 casos para 3 valores distintos de Frequencia natural e diferentes valores do coeficiente de amortecimento:

a) $\xi < 1$

$m = 1kg$

$b = 10Ns/m$

$k = 1000N/m$

$\omega_n = 31,6 rad/s$

b) $\xi = 1$

$m = 10kg$

$b = 200Ns/m$

$k = 1000N/m$

$\omega_n = 10rad/s$

c) $\xi > 1$

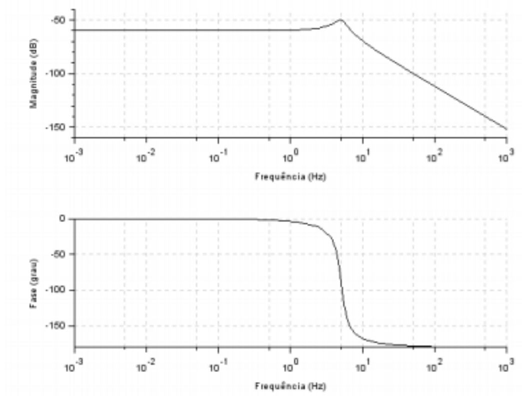
$m = 40kg$

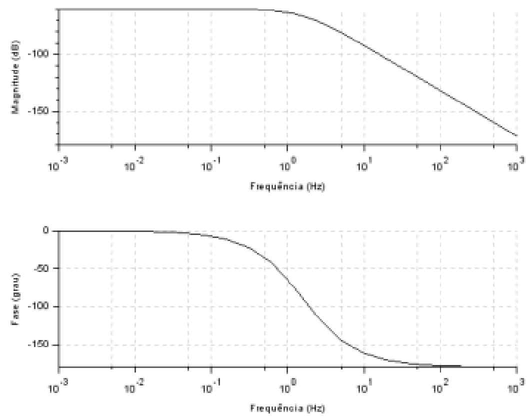
$b = 800Ns/m$

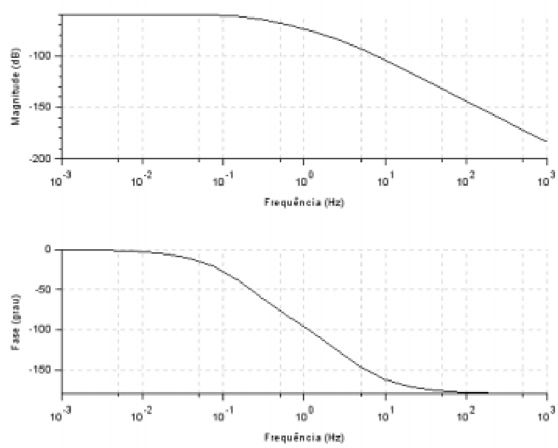
$k = 1000N/m$

$\omega_n = 5rad/s$





Código utilizado no scilab do exercício 3:

```
function [x]=integrador3(A, B, C, D, u, t, x0)
dt=t (2)- t (1)
x=zeros(length( x0 ) , length ( t ) ) ;
x (: ,1 )= x0 ;
phi=zeros ( size(A) ) ;
for k=0:3
soma=A^k*dt^k/ factorial ( k ) ;
phi=phi+soma ;
end
phi
T=zeros ( size (A ) ) ;
f o r k=0:3
soma=A^k*dt^k/factorial( k+1);
T=T+soma ;
end
T=T*dt
for i =2: length ( t )
x ( : , i )= phi *x ( : , i -1)+T*B*u ;
end
endfunction
```