WILSON SIOU KAN CHOW 10769938 23/10

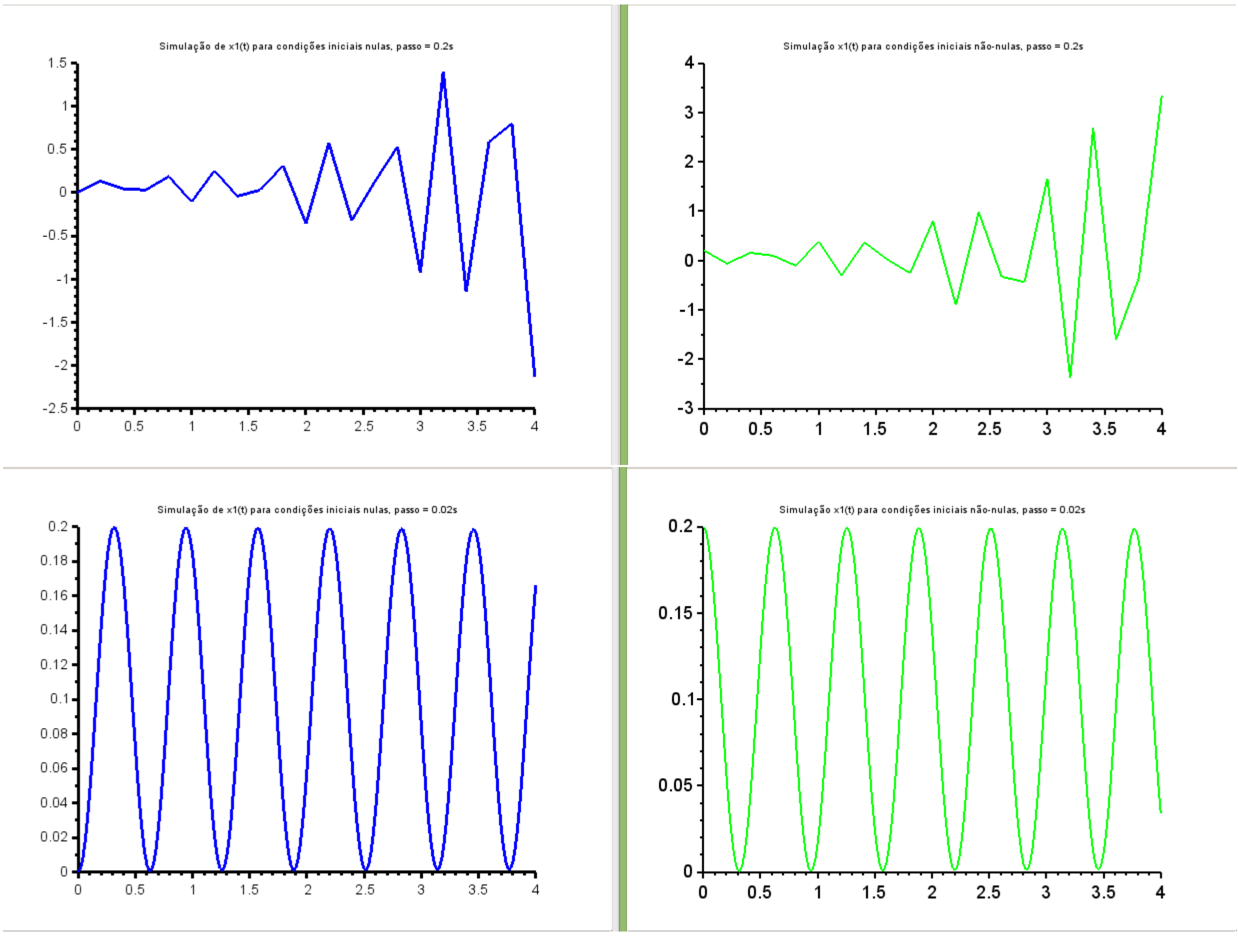
$\Gamma = \int_0^t e^{A\theta} d\theta$, seja A inversível e $\theta = t - \tau$

$\Gamma = A^{-1} \cdot e^{At} - A^{-1} \cdot e^{0}$

$\Gamma = (A^{-1} \cdot e^{At} - A^{-1}) = A^{-1}(\underbrace{e^{At}}_{\Phi(t)} - I) = A^{-1}(\Phi(t) - I)$

① [MATLAB]

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}0667 \\ -6{,}666 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0{,}0667 & 0{,}0133 \\ -1{,}333 & 0{,}0667 \end{bmatrix}$$



1 Código Usado

```
clear;
xdel(winsid());
// Funcao para a matriz de transicao, aproximada ate o 4
    termo da expans o de Taylor
function[f]=tr(t);
    f(1,1)=1.-50.*t^2;
    f(1,2)=t-50./3.*t^3;
    f(2,1)=-100*t+5000/3*t^3;
    f(2,2)=1.-50.*t^2;
endfunction

// Funcao para a matriz dos termos for antes, aproximada
    ate o 4 termo da expans o de Taylor
function[g]=frc(t);
    g(1,1)=t-50/3*t^3;
    g(1,2)=t^2/2-25/6*t^4;
    g(2,1)=-50*t^2+1250/3*t^4;
```

```
    g(2,2)=t-50/3*t^3;
endfunction

//Dt=0.2;// Passo de tempo
Dt=0.02;// Passo de tempo
tf=4;// Instante final de simulacao
t=0:Dt:tf;// Instantes discretizados de tempo
B=[0.;10.];// Matriz B
A=[01;-1000];// Matriz A
u=1;// Termo for ante representativo do degrau unitario

x_nul=zeros(2,length(t));// Vetor x para condicoes iniciais nulas
x0_nul=[0.;0.];// Condicoes iniciais nulas
x_nul(:,1)=x0_nul;
x=zeros(2,length(t));// Vetor x para condicoes iniciais nao nulas
x0=[0.2;0.];// Condicoes iniciais nao nulas escolhidas
x(:,1)=x0;

// Laco para obter a solucao numerica x(t) a cada passo de 0,2 s
for i=2:length(t);
    x_nul(:,i)=tr(Dt)*x_nul(:,i-1)+frc(Dt)*B*u;4
    x(:,i)=tr(Dt)*x(:,i-1)+frc(Dt)*B*u;
end

// Plots da simulacao

xset('window',1)
xset('thickness',3)
xset('font size',3)
plot2d(t,x_nul(1,:),2)
xtitle('Simula  o de x1(t) para condi  es iniciais nulas, passo = '+string(Dt)+'s')

xset('window',2)
xset('thickness',2)
xset('font size',4)

plot2d(t,x(1,:),3)
xtitle('Simula  o x1(t) para condi  es iniciais n o-nulas, passo = '+string(Dt)+'s')

}
```
Listing 1: Código em Scilab

2) (a) Autovalores

$$\det \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 9\lambda^2 - 23\lambda - 15 \rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = -5 \end{cases}$$

(b) O sistema é estável pois todos os λ são reais negativos.

(c) Autovetores

- Para $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{cases} b = 2a \\ b = 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 2 & 0 & 2 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -5$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} b = -2a \\ a = c \\ b = -2c \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d)

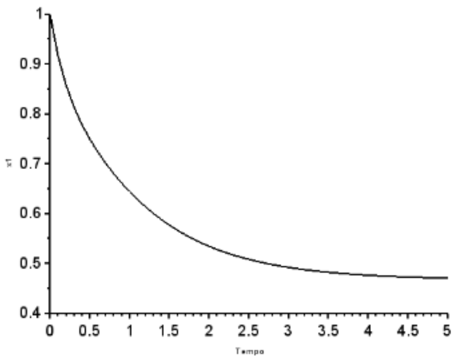
$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

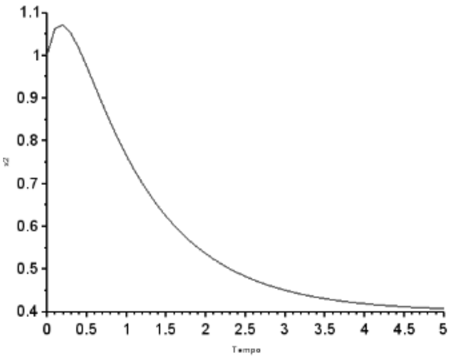
(e) $\Lambda = T^{-1} A T$

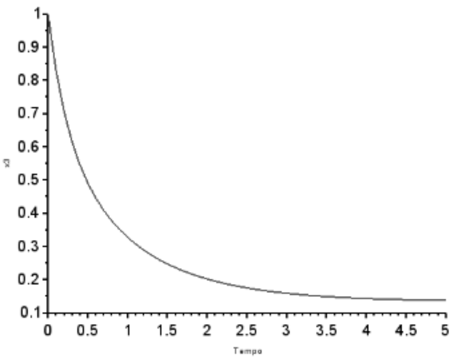
$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -3 & \\ & & -5 \end{bmatrix}$$

(f) Thru Matlab:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0{,}7475 & 0{,}0752 & 0{,}007 \\ 0{,}1503 & 0{,}7545 & 0{,}1503 \\ 0{,}0070 & 0{,}0752 & 0{,}7475 \end{bmatrix}, \qquad \Delta t \text{ de } 0{,}1\,s$$







1 Código Usado

```
clear

ordem=10;//Taylor
u=[1;0;0];// Termos forcantes
B=eye(3,3);// Matriz B
A=[-310;2-32;01-3];// Matriz A
x0=[1;1;1];// Condicoes iniciais
Dt=0.1;// Passo
tf=5.;// Tempo final
```

```
t=0:Dt:tf;// Instantes discretizados
x=zeros(3,length(t));// Matriz cujas colunas sao x(t) para cada t discreto
x(:,1)=x0;

// Funcao para obter a matriz de transicao aproximada
function[f]=aprox(A);
    f=eye(3,3);
    for k=1:ordem-1;
        f=f+(A^k)*(Dt^k)/factorial(k);
    end
endfunction

// Funcao para obter a matriz dos termos forcantes aproximada
function[g]=forcn(A);
    g=Dt*eye(3,3);
    for k=1:ordem-1;
        g=g+(A^k)*(Dt^(k+1))/factorial(k+1);
    end
endfunction

// Solucao numerica x(t) a cada passo de 0,2 s
for i=2:length(t);
    x(:,i)=aprox(A)*x(:,i-1)+forcn(A)*B*u;
end

// Plots de x1(t), x2(t) e x3(t)
for j=1:3;
    scf(j);
    xset('thickness',2);
    xset('font size',4);
    plot2d(t,x(j,:),j);
    xtitle('Gr fico de x'+string(j)+'(t)','Tempo','x'+string(j))
end

disp(aprox(A));// Matriz de transicao

}
```

Listing 1: Código em Scilab

ESTABILIDADE ROUTH - HURWITZ

① a) $D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 3 & 1 \\
s^3 & 2 & 4 & 0 \\
s^2 & \frac{2\cdot3-4}{2} = 1 & \frac{2\cdot1-0}{2} = 1 & 0 \\
s^1 & \frac{1\cdot4-2}{2} = 2 & 0 & \\
s^0 & \frac{2\cdot1}{2} = 1 & &
\end{array}$$

> 0

estável

b) $D(s) = s^3 - 4s^2 + 3s^3 + 2s^2 + 5s + 1$

NEGATIVO → instável

c) $D(s) = s^4 + 3s^3 + 2s + 3$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 0 & 3 \\
s^3 & 3 & 2 & 0 \\
s^2 & \frac{3\cdot0-2}{3} = -\frac{2}{3} & \frac{3\cdot3}{3} = 3 & \\
s^1 & \frac{31}{2} & & \\
s^0 & 3 & &
\end{array}$$

Instável (2 pólos instáveis)

D) $D(s) = s^4 + s^3 + s^2 + 4s + 1$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 1 & 1 \\
s^3 & 1 & 4 & 0 \\
s^2 & -3 & 1 & 0 \\
s^1 & 13/3 & 0 & \\
s & 1 & &
\end{array}$$

Instável (2 pólos instáveis)

Digitalizado com CamScanner

② $D(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K$

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	$7/3$	K	0
s^1	$(14/3 - 3K)\,3/7$	0	
s^0	K		

ⓐ Estabilidade $\begin{cases} K > 0 \\ (14/3 - 3K) \cdot 3/7 > 0 \Rightarrow K < \frac{14}{9} \end{cases}$

$0 < K < \frac{14}{9}$ para ser estável

ⓑ Para ser marginalmente estável, uma das linhas deve ser zerada.

$\left(\frac{14}{3} - 3K\right)\frac{3}{7} = 0 \Rightarrow K = \frac{14}{9}$

Da linha de s^2:

$\frac{7}{3}s^2 + \frac{14}{9} = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,j \rightarrow$ parte real nula estável