PME3380 - Modelagem de sistemas dinâmicos

Tiago Krause - 9836238 aula 22/10

Achar as FTs e resolver as EDOs

1) $2\ddot{x}+7\dot{x}+3x=0$; $x(0)=x_0$ $\dot{x}(0)=0$

Aplicando a transformada de Laplace:

$\mathcal{L}\{\ddot{x}\}=s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)^{=0}$

$\mathcal{L}\{\dot{x}\}=sX(s)-x(0)$

$\mathcal{L}\{x\}=X(s)$

Então:

$2s^2X(s)-2sx(0)-2\dot{x}(0)^{=0}+7sX(s)-7x(0)+3X(s)=0$

$(2s^2+7s+3)X(s)=(2s+7)x_0$

$$X(s)=\frac{2s+7}{2s^2+7s+3}x_0$$

A resposta de X(s) obtida em função de x_0 corresponde ao regime transitório e a entrada U(s) é nula no sistema, por isso mesmo avaliando o sistema com condições iniciais nulas não é possível definir a função de transferência G(s).

Resolvendo a EDO:

Separando em frações parciais: $2s^2+7s+3=(s+3)(2s+1)$

$$X(s)=\frac{A}{(s+3)}+\frac{B}{(2s-1)}=\frac{A2s+A+Bs+3B}{2s^2+7s+3}$$

$$\begin{cases}2A+B=2x_0 \\ A+3B=7x_0\end{cases}\quad -5A=x_0\quad A=\frac{-x_0}{5}\quad B=\frac{12x_0}{5}$$

$$X(s)=\frac{-x_0}{5(s+3)}+\frac{12x_0}{5(2s+1)}$$

Aplicando a transformada inversa: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at}$

$\therefore x(t)=\frac{-x_0}{5}e^{-3t}+\frac{6}{5}e^{-\frac{t}{2}}$

2) $\dddot{x} + 2\ddot{x} + 7\dot{x} = \ddot{u} + 7\dot{u} + 5u$; $\ddot{x}(0) = 2$ $\dot{x}(0) = 1$ $x(0) = 9$ $u(0) = 0$ $\dot{u}(0) = 0$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}[\dddot{x}] = s^3X(s) - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0)$$

Então:

$$s^3X(s) - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0) + 2s^2X(s) - 2sx(0) - 2\dot{x}(0) + 7sX(s) - 7x(0) =$$

$$s^2U(s) - s\cancelto{0}{u(0)} - \cancelto{0}{\dot{u}(0)} + 7sU(s) - 7\cancelto{0}{u(0)} + 5U(s)$$

$$s^3X(s) + (2X(s) - 9)s^2 + (7X(s) - 19)s - 67 = (s^2 + 7s + 5)U(s)$$

$$X(s)(s^3 + 2s^2 + 7s) = (s^2 + 7s + 5)U(s) + 9s^2 + 19s + 67$$

Como $u(t) = 1$, $U(s) = \frac{1}{s}$, assim:

$$X(s) = \frac{s^2 + 7s + 5}{s^2(s^2 + 2s + 7)} + \frac{9s^2 + 19s + 67}{s^3 + 2s^2 + 7s} = \frac{9s^3 + 20s^2 + 74s + 5}{s^2(s^2 + 2s + 7)}$$

A função de transferência é calculada para condições iniciais nulas considerando-se apenas a fração do regime permanente, nesse caso:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 7s + 5}{s(s^2 + 2s + 7)}$$

Resolvendo a EDO:

Separando $X(s)$ em frações parciais:

$$X(s) = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 7}$$

$Bs^3 + Cs^3 = 9s^3 \rightarrow C = -\frac{67}{49}$

$As^2 + 2Bs^2 + Ds^2 = 20s^2 \rightarrow D = -\frac{71}{49}$

$2As + 7Bs = 74s \rightarrow B = \frac{508}{49}$

$7A = 5 \rightarrow A = \frac{5}{7}$

$$X(s) = \frac{5}{7s^2} + \frac{508}{49s} - \frac{67(s+1)}{49[(s+1)^2 + 6]} - \frac{4}{49[(s+1)^2 + 6]}$$

Aplicando a transformada inversa:

$$x(t) = \frac{508}{49} + \frac{5}{7}t - \frac{67}{49}e^{-t}\cos(\sqrt{6}t) - \frac{4}{49}e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{6}t)$$