Enzo C Zugliani - 10333741

1.1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D = 0$

- $G = C(sI - A)^{-1}B + D$
- $(sI - A)^{-1} = \dfrac{Adj\,(sI - A)}{det\,(sI - A)}$
- $det\,(sI - A) = det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 100 & s \end{bmatrix} = s^2 + 100$
- $Adj\,(sI - A) = (cof\,(sI - A))^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 100 & 0 \end{bmatrix}$
- $C \cdot Adj\,(sI - A) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -100 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = +10$
- $FT = \dfrac{10}{s^2 + 100}$

- Impulso na origem: $U = 1$

$Y = G \cdot U = G \cdot 1$

$Y(s) = \dfrac{10}{s^2 + 100}$

- Degrau unitário a partir de t_0: $U = \frac{1}{s}$

$Y = G \cdot U = G \cdot \frac{1}{s}$

$Y(s) = \dfrac{10}{s^3 + 100s}$

* Simulação na última página.

1.2)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Equação caract:

$$\det(sI - A) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} s+1 & -4 & 0 \\ -5 & s-2 & 0 \\ 1 & 0 & s+3 \end{bmatrix} = (s+3)\cdot((s+1)\cdot(s-2) - (-4)\cdot(-5)) =$$

$$= (s+3)\cdot((s+1)\cdot(s-2) - 20) =$$

$$= (s+3)\cdot(s^2 - s - 22) =$$

$$= s^3 - s^2 - 22s + 3s^2 - 3s - 66 =$$

$$0 = s^3 + 2s^2 - 25s - 66$$

- Autovalores: raízes da eq caract, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4{,}217$, $\lambda_3 = 5{,}217$

- As FTs podem ser determinadas por:

$$\frac{C \cdot \text{Adj}(sI - A)\cdot B}{\text{Eq. Caract}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2+s-6 & 4s+12 & 0 \\ 5s+15 & s^2+4s+3 & 0 \\ 2-s & -4 & s^2-s-22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2+4s+3}{s^3+2s^2-25s-66} \\ \dfrac{4s+12}{s^3+2s^2-25s-66} \end{bmatrix}$$

- Os polos da FT são os autovalores de A
- Os zeros das FTs são: $\cdot$ -3 e -1 (G_{11})

  $\cdot$ -3 (G_{21})

  - Nota-se que o zero em -3 cancela o polo em -3

2.1) Usando as posições e velocidades dos blocos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K}{M_1} & \frac{K}{M_1} & 0 & 0 \\ \frac{K}{M_2} & -\frac{K}{M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \emptyset$$

- $G = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$
- A eq. caract é:

$$\frac{M_1 \cdot M_2 \cdot s^4 + (KM_1 + KM_2)s^2}{M_1 \cdot M_2} = 0$$

- Os autovalores são:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_3 = \sqrt{-K\frac{(M_1+M_2)}{M_1 \cdot M_2}}$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{-K\frac{(M_1+M_2)}{M_1 \cdot M_2}}$$

- Os numeradores das FT são:
  - $\frac{M_2 \cdot s^2 + K}{M_1 M_2}$
  - $\frac{K}{M_1 \cdot M_2}$
  - $\frac{K \cdot s}{M_1 \cdot M_2}$
  - $\frac{M_1 s^3 + Ks}{M_1 \cdot M_2}$

- E seus zeros são: $\pm\sqrt{\frac{K}{M_2}}$, $\cdot \frac{1}{K}$ $\cdot\ 0, \pm\sqrt{\frac{K}{M_1}}$

2.2) Usando o baricentro e a distância entre os blocos.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{KM}{M_1 M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M_1} & -\frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- A equação caract é a mesma do ex 5 anterior:

$$s \cdot (K m_1 \cdot s + K m_2 \cdot s + m_1 \cdot m_2 \cdot s^3) \frac{1}{m_1 m_2} = 0,$$

desse modo, os autovalores, o denominador das FTs, e os polos do sistema serão os mesmos.

- Os numeradores das FTs são:

  - $\frac{(m_1 m_2 s^2 + k(m_1 + m_2))}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}$
  - $\frac{(m_1 m_2 s^2 + k(m_1 + m_2))}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}$
  - $\frac{s^2}{m_1}$
  - $\frac{s^2}{m_2}$

- De modo que as FTs são:

  - $\frac{1}{s^2 (m_1 + m_2)}$
  - $\frac{1}{s^2 (m_1 + m_2)}$
  - $\frac{m_2}{m_1 m_2 \cdot s^2 + k(m_1 + m_2)}$
  - $\frac{-m_1}{m_1 m_2 s^2 + k(m_1 + m_2)}$

Calculamos os respectivos zeros

- Os zeros são

$$z_{21} = z_{22} = 0$$

$$z_{11} = z_{21} = \pm \sqrt{\frac{-k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$

- O sistema é marginalmente estável

  ↳ Polos no eixo imaginário.

- Os zeros de 2.2 são diferentes dos zeros em 2.1, pois as saídas são diferentes.

Resposta no tempo ao degrau unitário - deltaT = 0.1s
Y(t)
Tempo (seconds)
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1