PME 3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Exercícios Aula 20/10/2020

Arthur H. G. de Pinho Nº USP: 10379756

Ex. 1.1 Para o E.E

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = 0$$

$$X(0) = [0 \quad 0]^T \qquad \Delta t = 0{,}1\,s \qquad tf = 1{,}0$$

$$sX_1 = X_2$$

$$sX_2 = -100X_1 + 10U$$

$$Y = X_1$$

$\therefore$

$$sX_1 = \frac{1}{s}(-100X_1 + 10U)$$

$$X_1(s^2 + 100) = 10U$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s^2 + 100}$$

Ex 1.2

Dado o sistema no EE:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ D = 0$$

É possível montar:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

$$sX_1 = -X_1 + 4X_2$$
$$sX_2 = 5X_1 + 2X_2 + U$$
$$sX_3 = -X_1 - 3X_3$$

$$\begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \therefore \begin{matrix} Y_1 = X_2 \\ Y_2 = X_1 \end{matrix}$$

$$sX_1 = -X_1 + \frac{4(5X_1 + U)}{s-2}$$

$$G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{4}{(s+1)(s-2)-20}$$

$$sX_2 = 2X_2 + 5\left(\frac{4}{s+1}X_2\right)U$$

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{1(s-1)}{(s-2)(s-1)-20}$$

$\dot{x}_1 = -1x_1 + 4x_2$

$\dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2 + u \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}_3 + 3x_3 + 2(x_2 - 5x_1 - u)$

$\dot{x}_3 = -x_1 - 3x_3$

Dado isso, acha-se os polos do sistema:

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 & 0 \\ 5 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

$\det|\,| = 0 \rightarrow (-1-\lambda)(2-\lambda)(-3-\lambda) - (20(-3-\lambda)) = 0$

$\lambda_1 = -3 \;;\; \lambda_2 = -4{,}217 \;;\; \lambda_3 = 3{,}217$

Assim, têm-se:

$G_1(s) = \dfrac{s+1}{(s-2)(s-1)-20}$ $\begin{cases} \text{zeros: } s = -1 \\ \text{polos: } s_1 = -4{,}217 \;;\; s_2 = -5{,}217 \end{cases}$

$G_2(s) = \dfrac{1}{(s-2)(s-1)-20}$ $\begin{cases} \text{zeros: } \times \\ \text{polos: } s_1 = -4{,}217 \;;\; s_2 = 5{,}217 \end{cases}$

Pode-se afirmar que os polos e os autovalores coincidem.

Ex.2.1

Admitindo u1 e u2 como entradas do sistema:

$$m_1\ddot{x}_1 = K(x_1 - x_2) + u_1 \Rightarrow m_1\ddot{x}_1 - K(x_1 - x_2) = u_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 = K(x_2 - x_1) + u_2 \Rightarrow m_2\ddot{x}_2 - K(x_2 - x_1) = u_2$$

Dado as condições:

$$\dot{x}_1 = x_3 \qquad \dot{x}_3 = \frac{[u_1 + K(x_1 - x_2)]}{m_1}$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$x_4 = x_2 \qquad \dot{x}_4 = \frac{[u_2 + K(x_2 - x_1)]}{m_2}$$

Têm-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K/m_1 & 0 & K/m_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K/m_2 & 0 & -K/m_2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; D = 0$$

Os autovalores são raízes de:

$$\lambda^4 + \frac{K}{m_2}\lambda^2 + \frac{K}{m_1}\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0 ; \lambda_2 = 0 ; \lambda_3 = \sqrt{\frac{K}{m_1} + \frac{K}{m_2}}\, i ; \lambda_4 = -\sqrt{\frac{K}{m_1} + \frac{K}{m_2}}\, i$$

Ex. 2.2

As FTs para as entradas u_1 e u_2 são as mesmas dos obtidos no Ex. 2.1, dado que as mudanças propostas neste exercício apenas refletem numa mudança de variáveis

$$X_G = \frac{X_1 + X_2}{2} ; \delta = X_2 - X_1$$