

Relatório 06 - Princípio da Incerteza

* Resumo: Avaliou-se o princípio da incerteza de Heisenberg para faixas de áudio emitidas por uma caixa sonora e captadas por um microfone. Posteriormente utilizou-se um laser passando por uma fenda (micrômetro) e um anteparo para verificar agora o princípio para ondas eletromagnéticas.

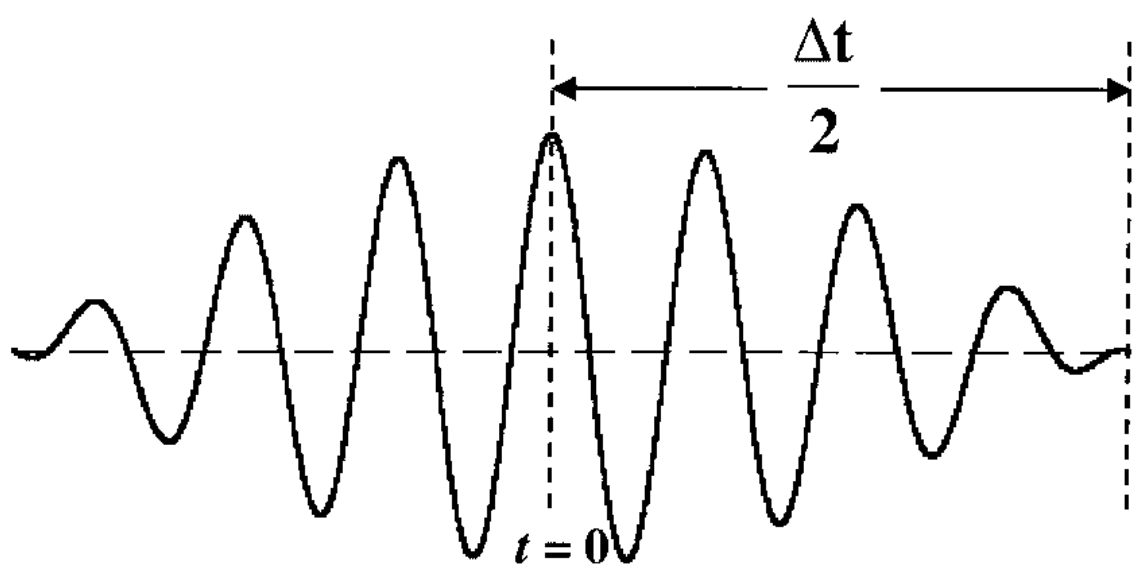
* Introdução

Em 1927 o físico alemão Werner Heisenberg propôs o princípio da incerteza que diz que quanto maior é a precisão da medida de posição de um corpo, menor se tem precisão na medida do momento (velocidade).

Se considerarmos 2 ondas $\Psi_1 = \cos(2\pi f_1 t)$ e $\Psi_2 = \cos(2\pi f_2 t)$ de frequências f_1 e f_2 . Seja $f_2 > f_1$ e estão em fase em $t=0$ e fora de fase por π em $t = \frac{\Delta t}{2}$, temos:

$$2\pi f_2 \frac{\Delta t}{2} - 2\pi f_1 \frac{\Delta t}{2} = \pi \quad (1)$$

A figura abaixo apresenta a soma das duas ondas:



Ao tomar $f_2 - f_1 = \Delta f$, encontramos

$$\Delta f \Delta t = 1 \quad (2)$$

Quando consideramos o número de ondas $n \rightarrow \infty$ sobrepostas e num intervalo de f_2 até f_1 uma integração mostra a seguinte relação:

$$\Delta f \Delta t \geq 1 \quad (3)$$

Como a equação não está limitada a um ~~comprimento~~ ^{tipo} de onda específico, podemos multiplicar por h a equação 3:

$$h \Delta f \Delta t \geq h \Rightarrow \Delta E \Delta t \geq h \quad (4)$$

Da mesma forma temos para a equação do momento e comprimento, partindo da relação de de Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p \lambda = h \Rightarrow \Delta p \Delta x \geq h \quad (5)$$

* Metodologia

Utilizando um gerador de ondas mecânicas (som) fixado uma frequência de 200 Hz registrou-se o valor da amplitude da onda (com um microfone) para diferentes tempos de duração de 1 s ~~até~~ inicialmente e a partir de 5 s com passos de 5 s até 50 s.

O arquivo de áudio gerado passou pelo seguinte script em Python 3.8 e assim foi calculado a largura de banda a meia altura (FWHM), juntamente com a FFT do arquivo exibida pela biblioteca pyplot.


```

import numpy as np
import os
import scipy.fftpack
import scipy.io.wavfile as wavfile
from matplotlib import pyplot as plt

def lin_interp(x, y, i, half):
    return x[i] + (x[i+1] - x[i]) * ((half - y[i]) / (y[i+1]
- y[i]))

def half_max_x(x, y):
    half = max(y)/2.0
    signs = np.sign(np.add(y, -half))
    zero_crossings = (signs[0:-2] != signs[1:-1])
    zero_crossings_i = np.where(zero_crossings)[0]
    print(zero_crossings_i)
    return [lin_interp(x, y, zero_crossings_i[0], half),
            lin_interp(x, y, zero_crossings_i[1], half)]

def half_max_14A(x, y):
    half = max(y)/2.0
    signs = np.sign(np.add(y, -half))
    zero_crossings = (signs[0:-2] != signs[1:-1])
    zero_crossings_i = np.where(zero_crossings)[0]
    print(zero_crossings_i)
    return [lin_interp(x, y, zero_crossings_i[2], half),
            lin_interp(x, y, zero_crossings_i[3], half)]

def half_max_14C(x, y):
    half = max(y)/2.0
    signs = np.sign(np.add(y, -half))
    zero_crossings = (signs[0:-2] != signs[1:-1])
    zero_crossings_i = np.where(zero_crossings)[0]
    print(zero_crossings_i)
    return [lin_interp(x, y, zero_crossings_i[16], half),
            lin_interp(x, y, zero_crossings_i[17], half)]

def plot(file_name):
    nome_audio = file_name.split('/audio/')[1]
    fs_rate, signal = wavfile.read(file_name)
    print("Frequência amostral", fs_rate)
    l_audio = len(signal.shape)
    print("Canais", l_audio)
    if l_audio == 2:
        signal = signal.sum(axis=1) / 2
    N = signal.shape[0]
    print("Complete Samplings N", N)
    secs = N / float(fs_rate)
    print("Segundos de audio", secs)
    Ts = 1.0 / fs_rate
    print("Passos entre amostras Ts", Ts)

```

```

t = scipy.arange(0, secs, Ts)
FFT = abs(scipy.fft(signal))
FFT_side = FFT[range(N // 2)]
freqs = scipy.fftpack.fftfreq(signal.size, t[1] - t[0])
fft_freqs = np.array(freqs)
freqs_side = freqs[range(N // 2)]
fft_freqs_side = np.array(freqs_side)
plt.subplot(211)
p1 = plt.plot(t, signal, "g")
plt.title(file_name.split('/audio/')[1])
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.subplot(212)
p2 = plt.plot(freqs, FFT, "r") # plotting the
complete fft spectrum
plt.xlabel('Frequência (Hz)')
plt.ylabel('Contagem')
plt.xlim(0, 500)

if file_name == './audio/14A.wav':
    hmx=half_max_14A(freqs,FFT)
elif file_name == './audio/14C.wav':
    hmx=half_max_14C(freqs,FFT)
else:
    hmx=half_max_x(freqs,FFT)

print(hmx)
fwhm = hmx[1]-hmx[0]
print("FWHM:{:.3f}".format(fwhm))
locY = np.argmax(FFT)
freq_max = abs(freqs[locY])
f = open("fwhm.txt", "a")
f.write(nome_audio + ": Pico={:.3f}Hz |
FWHM={:.3f}Hz | Δt={:.3f}s | ΔfxΔt={:.3f} |
ΔE={:.3f}x10-34J | ΔExΔt={:.3f}x10-34J.s |
h/(4π)={:.3f}x10-34J.s\n".format(freq_max, fwhm,
secs, fwhm*secs, 6.62607004*fwhm,
6.62607004*fwhm*secs, 6.62607004/(4*np.pi)))
f.close()

#plt.show()

directory = os.fsencode('./audio')

for file in os.listdir(directory):
    filename = os.fsdecode(file)
    if filename.endswith(".wav"):
        plot('./audio/' + filename)
    continue

```

Esse procedimento foi também aplicado para 4 disposições de frequências diferentes e desconhecidas.

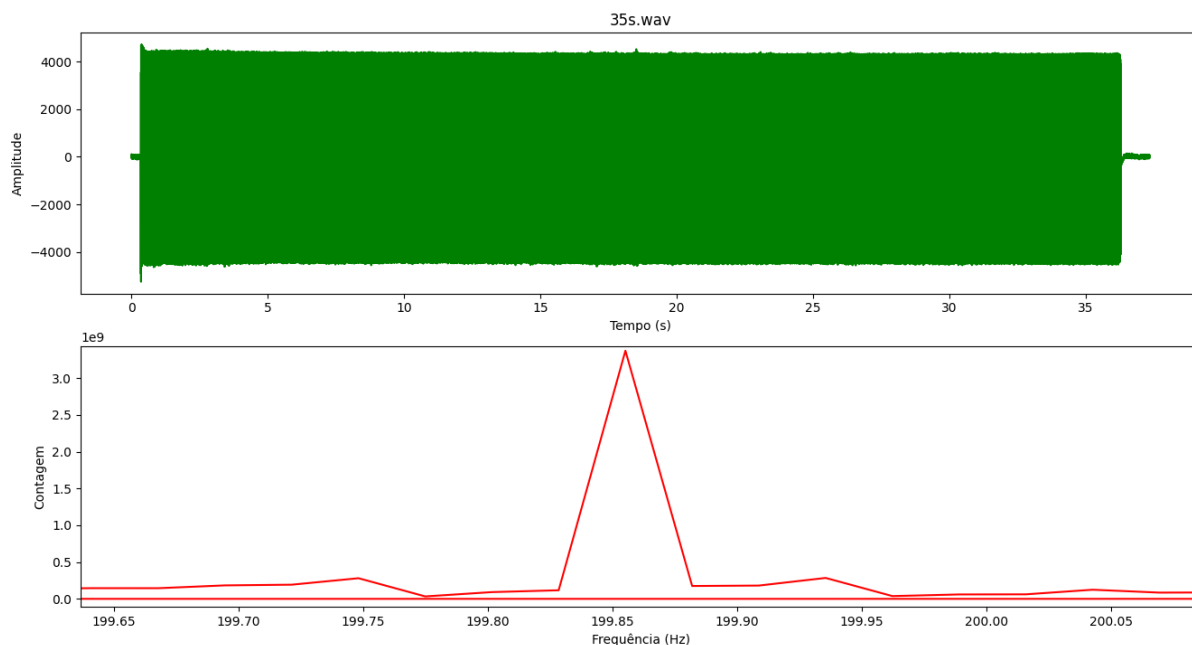
Utilizando o valor de FWHM como incerteza da energia (ΔE) e da duração do pacote como incerteza do tempo (Δt) verificou-se a inequação ~~abaixo~~ anterior do princípio de incerteza de Heisenberg.

Com o objetivo de avaliar o princípio de incerteza aplicado a ondas eletromagnéticas utilizou-se um micrômetro para realizar a abertura da fenda, em passos de $5 \mu\text{m}$ e através de um anteparo posicionado no caminho óptico do laser, mediu-se a distância entre os padrões de difração. ~~Como~~

Considerando a abertura Δy da fenda e o momento p_y dos fótons emitidos pelo laser em y , utilizou-se da eq 3 para comprovar o princípio da incerteza em ondas eletromagnéticas.

* Resultados e Discussão

O gráfico abaixo apresenta a onda de arquivo de áudio no tempo juntamente com a exibição da FFT desse arquivo para o intervalo de 35 s.



Os outros gráficos tiveram resultados similares e quando havia muita interferência, selecionou-se a região do pico de frequência mais alta, conforme foi apresentado no script anterior.

Na tabela abaixo estão os dados obtidos para os diferentes intervalos de pacotes de onda:

Pico (Hz)	FWHM (Hz)	ΔT (s)	$\Delta f \cdot \Delta t$	ΔE (J)	$\Delta E \cdot \Delta t$ (J.s)	$\hbar/2$ (J.s)
199,666	1,219	2,099	2,559	8,08E-34	1,70E-33	5,27E-35
199,910	0,312	6,448	2,014	2,07E-34	1,33E-33	5,27E-35
199,835	0,151	11,825	1,785	1,00E-34	1,18E-33	5,27E-35
199,868	0,072	17,371	1,248	4,76E-35	8,27E-34	5,27E-35
199,873	0,066	21,299	1,395	4,34E-35	9,24E-34	5,27E-35
199,869	0,067	27,868	1,871	4,45E-35	1,24E-33	5,27E-35
199,861	0,039	32,052	1,245	2,57E-35	8,25E-34	5,27E-35
199,855	0,028	37,342	1,045	1,85E-35	6,93E-34	5,27E-35
199,857	0,034	41,870	1,430	2,26E-35	9,47E-34	5,27E-35
199,830	0,029	46,890	1,372	1,94E-35	9,09E-34	5,27E-35
199,830	0,020	52,785	1,047	1,31E-35	6,94E-34	5,27E-35

De acordo com a ~~eq~~ inequação $\Delta f \Delta t \geq 1$ (eq. 3) podemos verificar que os dados obtidos estão de acordo com o esperado, afinal todos os valores da coluna $\Delta f \Delta t$ são maiores que 1.

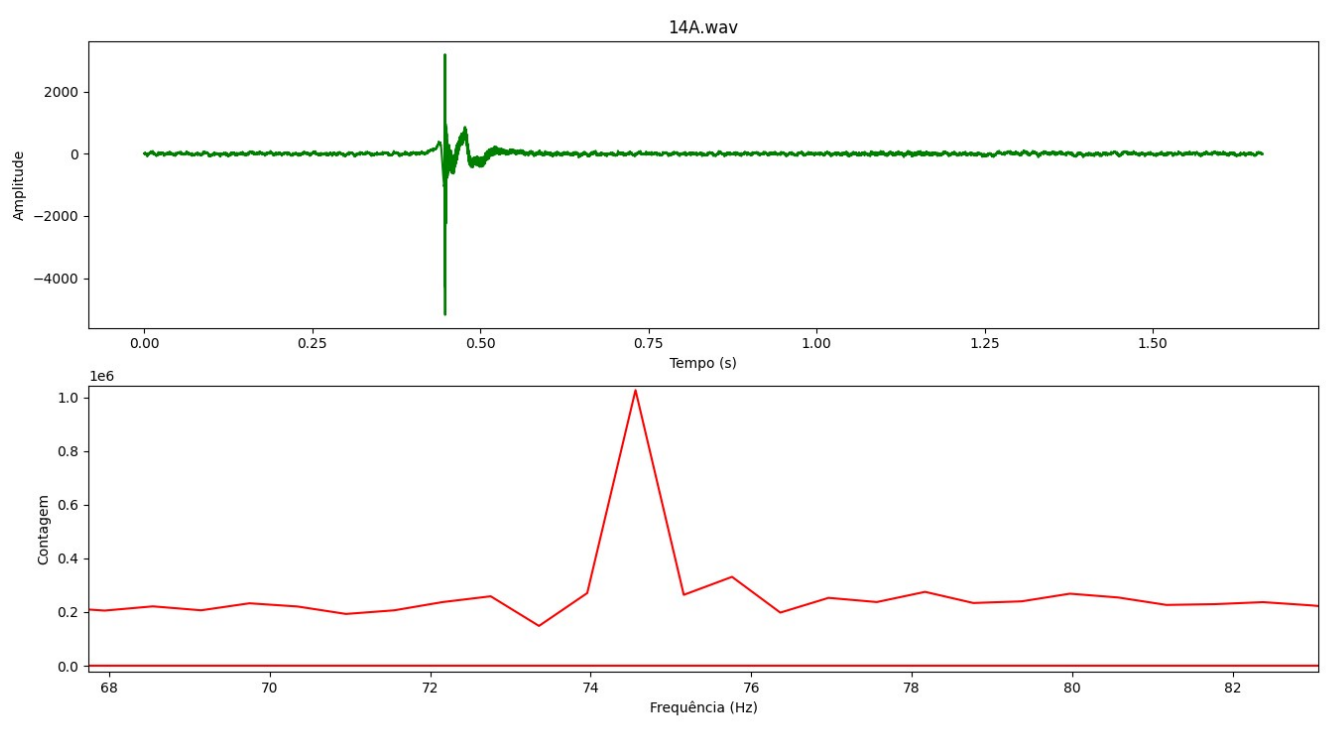
Observa-se ainda que a frequência pico da onda é em média $(199,8 \pm 0,1)$ Hz, o que está de acordo com o esperado de 200 Hz da fonte.

Observa-se ainda que ao aumentar o intervalo Δt , a incerteza ΔE diminui, exceto para o áudio de 40s, provavelmente por algum erro experimental.

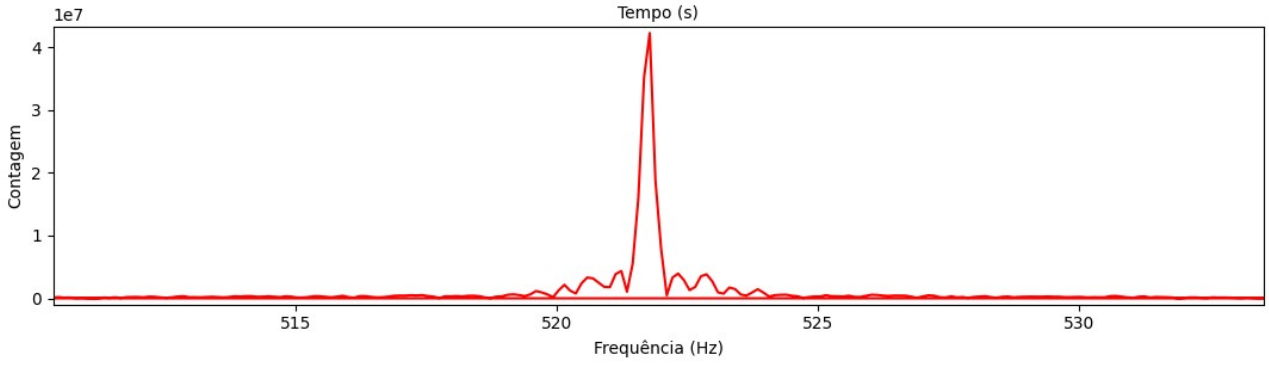
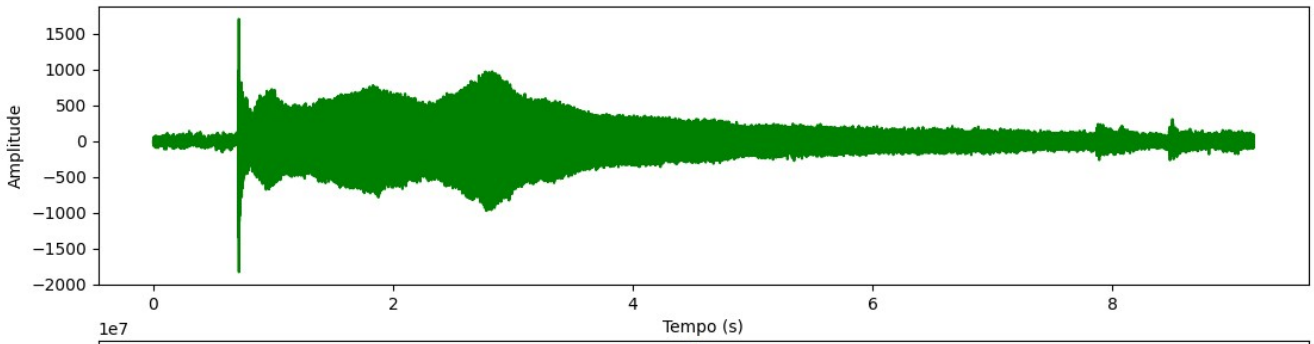
Para a diaposição foi feita a mesma ~~mesma~~ tabela anterior, como ^(R) apresentada abaixo:

Pico (Hz)	FWHM (Hz)	ΔT (s)	$\Delta f \cdot \Delta t$	ΔE (J)	$\Delta E \cdot \Delta t$ (J.s)	$\hbar/2$ (J.s)
74,558	0,813	1,663	1,352	5,39E-34	8,96E-34	5,27E-35
521,779	0,287	9,182	2,633	1,90E-34	1,74E-33	5,27E-35
73,922	2,317	1,894	4,387	1,54E-33	2,91E-33	5,27E-35
810,662	0,266	6,883	1,828	1,76E-34	1,21E-33	5,27E-35

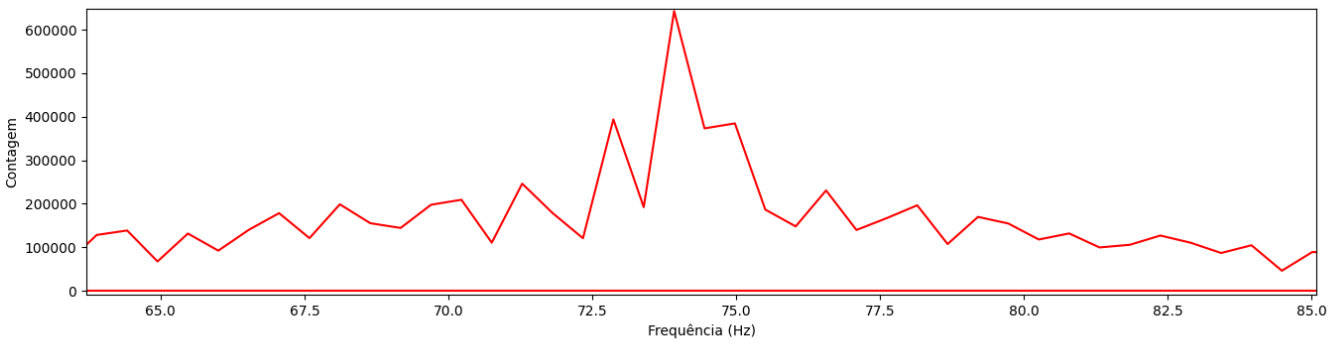
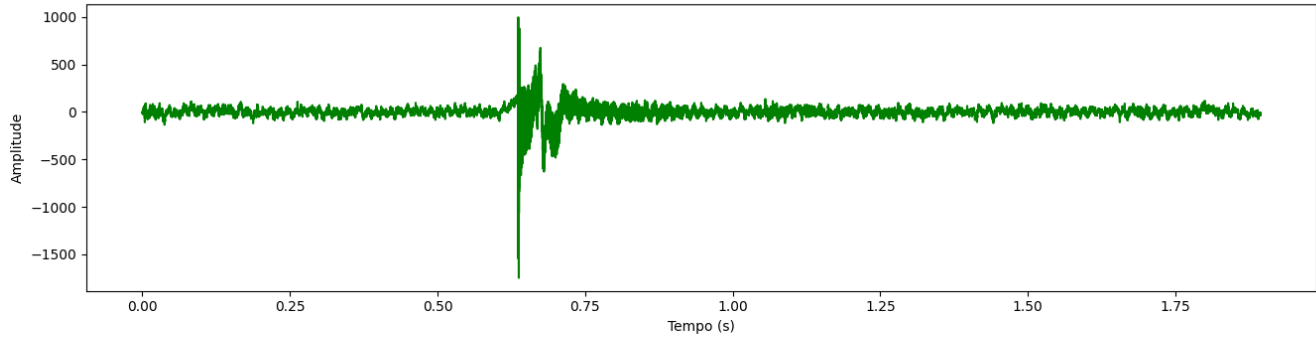
Na tabela nota-se os valores de pico de frequência para cada diaposição. Além disso se observa o produto $\Delta f \Delta t \geq 1$ para todos os casos, portanto está de acordo com o princípio da incerteza. Os gráficos de FFT para cada diaposição estão abaixo:



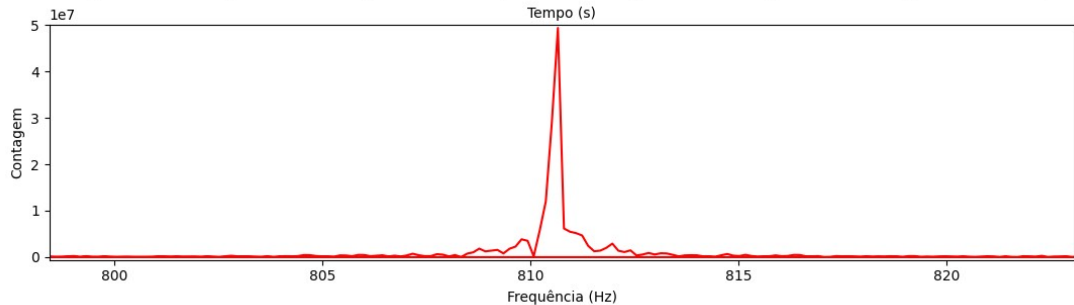
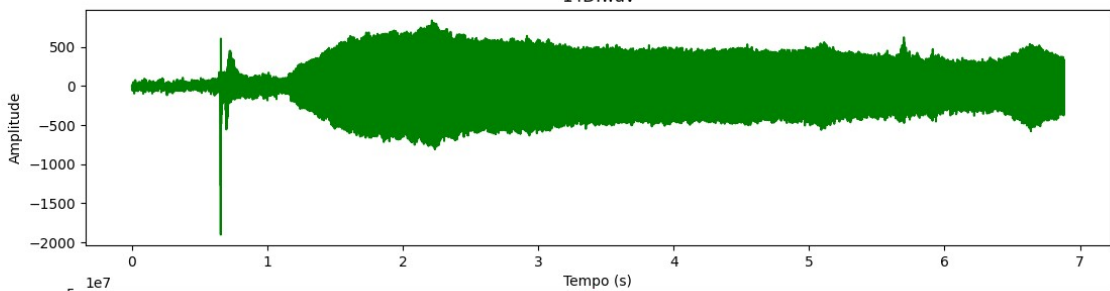
14B.wav



14C.wav



14D.wav



Para os gráficos de difração se observa interferência e foi delimitadas regiões de corte para tentar eliminar interferência no sinal.

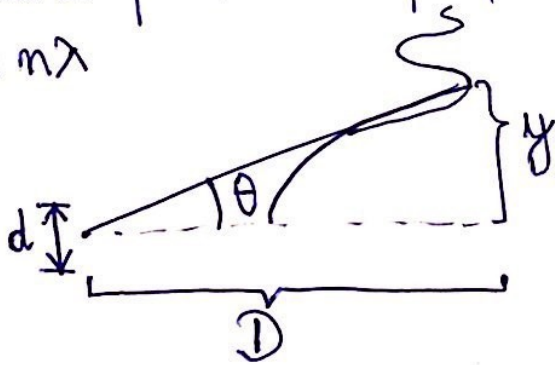
Para todos os valores das duas tabelas $\Delta E \Delta t \geq h/2$.

Na segunda parte buscou-se avaliar o princípio da incerteza em ondas eletromagnéticas através do momento e da abertura da fenda em y conforme a equação 5:

$$\Delta p_y \Delta y \geq h \quad (5)$$

Para o momento p_y considerou-se a seguinte equação para o cálculo:

- Da fenda simples temos a posição dos mínimos dados por:
 $d \sin \theta = n \lambda$



- Como medimos a distância y para o mínimo 1, temos:

$$d \sin \theta = \lambda$$

$$\frac{y}{D} \sim \tan \theta \Rightarrow dy = \lambda D \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h D}{dy}$$

- Portanto: $p_y = \frac{h D}{dy}$

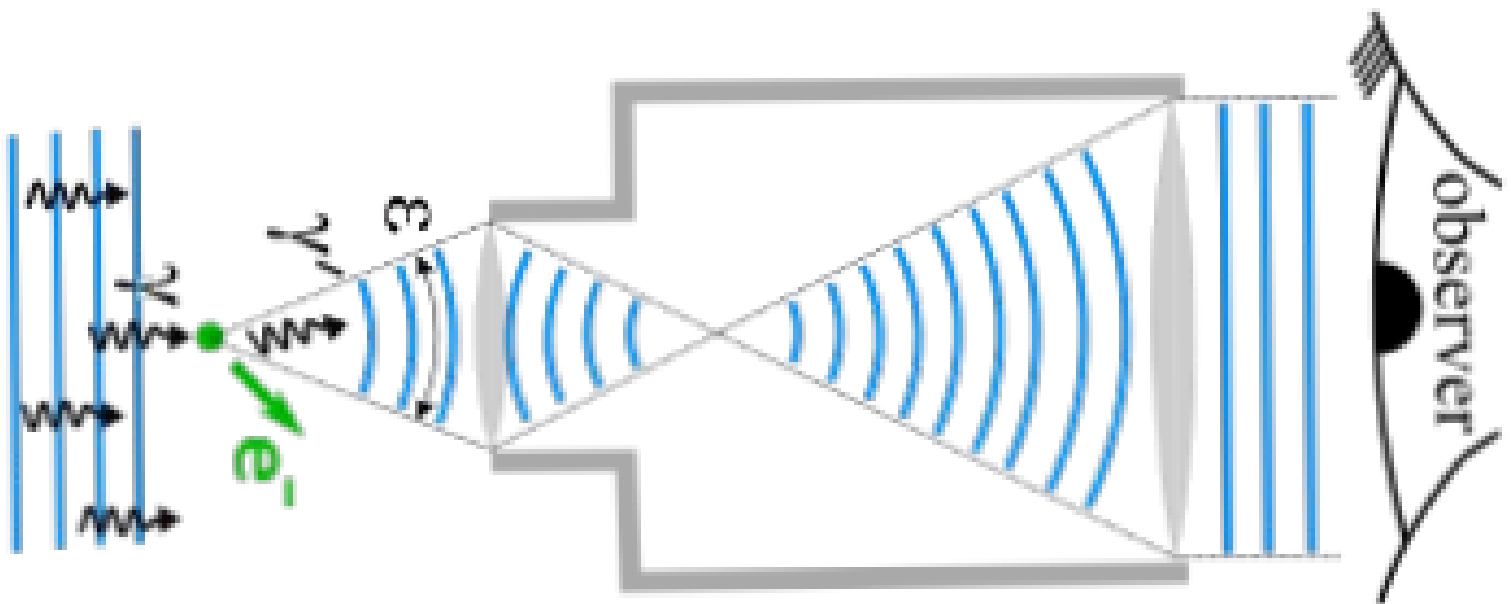
Com esse valor do momento em y foi construída a tabela abaixo

(5)

d [mm]	y [cm]	D [m]	p_y [Kg.m.s ⁻¹]		
10	2,65	1,727	4,32E-30		
10,05	1,9	1,727	5,99E-30		
10,1	1,05	1,727	1,08E-29		
10,15	0,8	1,727	1,41E-29		
10,2	0,65	1,727	1,73E-29		
10,25	0,5	1,727	2,23E-29		
10,3	0,4	1,727	2,78E-29		
10,35	0,35	1,727	3,16E-29		
10,4	0,32	1,727	3,44E-29	Δy	$\Delta p_y \cdot \Delta y$
		Δp_y	1,10E-29	0,0004	4,39E-33

O valor de $\Delta p_y \Delta y \geq h$, o que condiz com o princípio da incerteza. Note que o valor de Δp_y usado foi não o FWHM mas o desvio padrão das medidas, afinal para uma gaussiana (distribuição normal) o desvio padrão representa melhor a incerteza da medida.

A figura abaixo mostra a incerteza da medida devido a perturbação do sistema pelo ~~telescópio~~ microscópio de Bohr



Em caso de usar um feixe de elétrons deveria ter uma fenda da ordem de λ , para ter mesma ordem de grandeza de λ do elétron.

* Conclusão

O princípio da incerteza foi verificado para todas as medidas experimentais, e é válido tanto para ondas mecânicas quanto para ondas eletromagnéticas. Aplicou-se as propriedades do FFT para determinar as frequências de ondas mecânicas.