



Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo

PME3380 – Modelagem de Sistemas
Dinâmicos
Lista E

Professor: Décio Crisol e Agenor Fleury

Aluno: Ives Caero Vieira NUSP 10355551

São Paulo

2020

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	3
2	MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA PROPOSTO.....	4
3	SIMULAÇÃO NÚMERICA DO SISTEMA PROPOSTO	6
5	CONCLUSÃO	12
6	APÊNDICE: CÓDIGO UTILIZADO NA ATIVIDADE.....	13

1 INTRODUÇÃO

A lista E consiste em realizar o equacionamento matemático e a simulação de um sistema amortecido sob diferentes condições iniciais e diferentes condições de amortecimento. Primeiro, obtém-se a descrição matemática do fenômeno, bem como verifica-se a relação entre os autovalores encontrados e o comportamento dinâmico observado. Depois, realiza-se uma simulação numérica do sistema partindo de diversas configurações iniciais, visando entender a evolução deste com o auxílio de gráficos.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA PROPOSTO

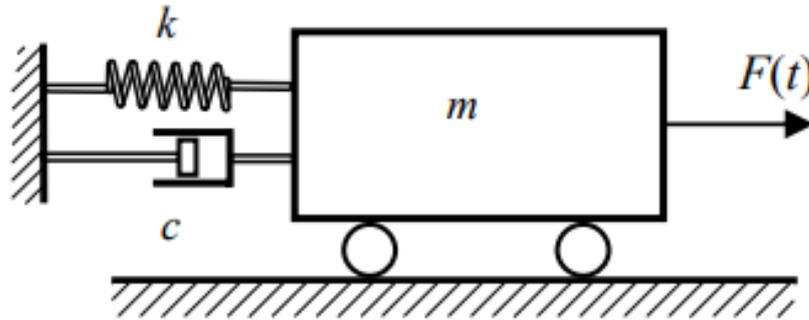


Figura 2.1: Sistema proposto

Partindo-se do Teorema do Movimento do Baricentro (TBM), temos:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Isolando a segunda derivada do deslocamento da mola \ddot{x} , obtemos então:

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x + \frac{F(t)}{m}$$

Podemos então definir o vetor de estados utilizado na simulação como:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

E representar as equações do problema na forma matricial como:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t)$$

Também é possível obter a função de transferência $G(s)$ associada ao sistema, calculando as transformadas de Laplace levando em consideração apenas o regime particular do sistema, isto é, desprezando a sua configuração inicial. Temos então:

$$sx = \dot{x}$$

$$s\dot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{1}{m}U$$

$$G(s) = \frac{x(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Além disso, também é possível calcular os autovetores da matriz A, de modo a compará-los com as raízes do polinômio no denominador da função de transferência G(s). Assim, temos que

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

De modo que os valores de λ são as soluções da equação do segundo grau, dados por:

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

As raízes do polinômio no denominador da função de transferência são as soluções da seguinte equação:

$$ms^2 + cs + k = 0$$

Ou seja:

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

De modo que se conclui que os autovalores da matriz A são exatamente as raízes do polinômio denominador da função G(s).

Para o caso particular em que $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} < 1$, temos, isolando c e elevando ao quadrado:

$$c^2 < 4km$$

$$c^2 - 4km < 0$$

De modo que o discriminante tanto dos autovalores de A quanto das raízes do polinômio é negativo, de modo que tais valores são números complexos.

Indo ainda mais longe, é possível estabelecer uma relação entre o módulo desses valores e o comportamento dinâmico do sistema. Tomando uma das soluções de s e obtendo seu módulo, temos que:

$$s = -\frac{c}{2m} + \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m}i$$

$$|s| = \sqrt{\frac{c^2 + c^2 - 4km}{4m^2}} = \sqrt{\frac{4km}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n$$

Ou seja, o módulo de um dos autovalores (ou raízes do polinômio) é igual a frequência natural de vibração do sistema.

Por fim, mais duas propriedades interessantes. Tomando apenas o módulo da parte real do autovalor e dividindo-o pelo seu módulo, temos:

$$\frac{-\frac{c}{2m}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \zeta$$

Que é o coeficiente de amortecimento do sistema. Além disso, pegando o módulo da parte imaginária, temos:

$$\left| \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \right| = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{4km}} = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{2\sqrt{mk}}\right)^2} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_d$$

Que é a frequência de oscilação do sistema.

3 SIMULAÇÃO NÚMERICA DO SISTEMA PROPOSTO

Após a realização da modelagem matemática, passa-se a etapa de simulação numérica do sistema proposto. Primeiramente, busca-se simular o sistema para três casos de amortecimento: subcrítico, crítico e supercrítico. Para tal, deve-se escolher os parâmetros do problema de forma a variar o fator de amortecimento ζ , considerando uma força externa $F(t)$ degrau de 1N de intensidade.

a) Amortecimento subcrítico: $k = 4N/m$, $m = 1kg$, $c = 0,8Ns/m$, de modo que $\zeta = 0,2 < 1$

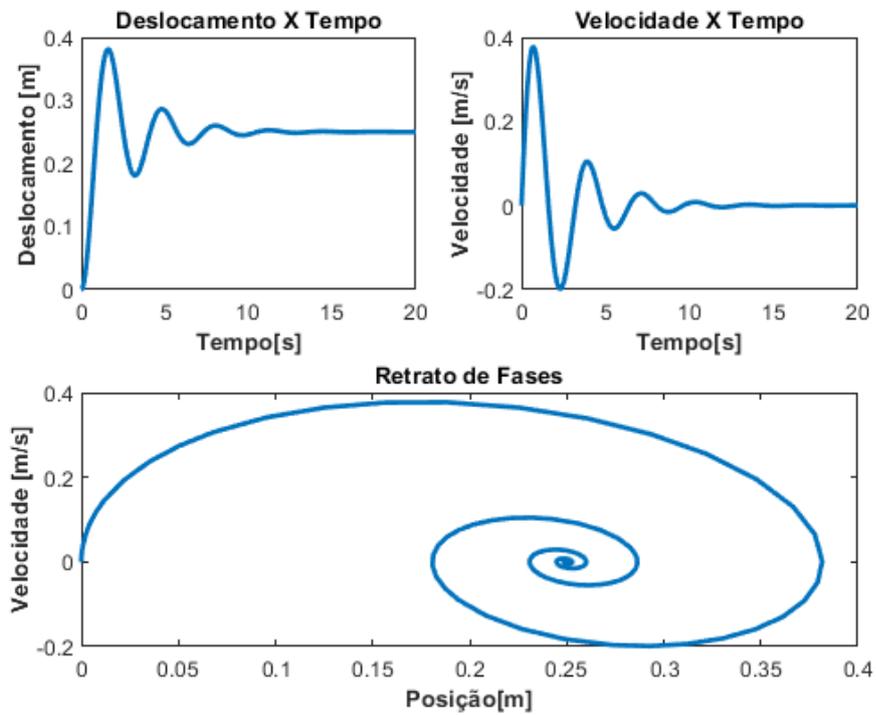


Figura 3.1: Comportamento do sistema para $\zeta = 0,2$

b) Amortecimento crítico: $k = 4N/m$, $m = 1kg$, $c = 4Ns/m$, de modo que $\zeta = 1$

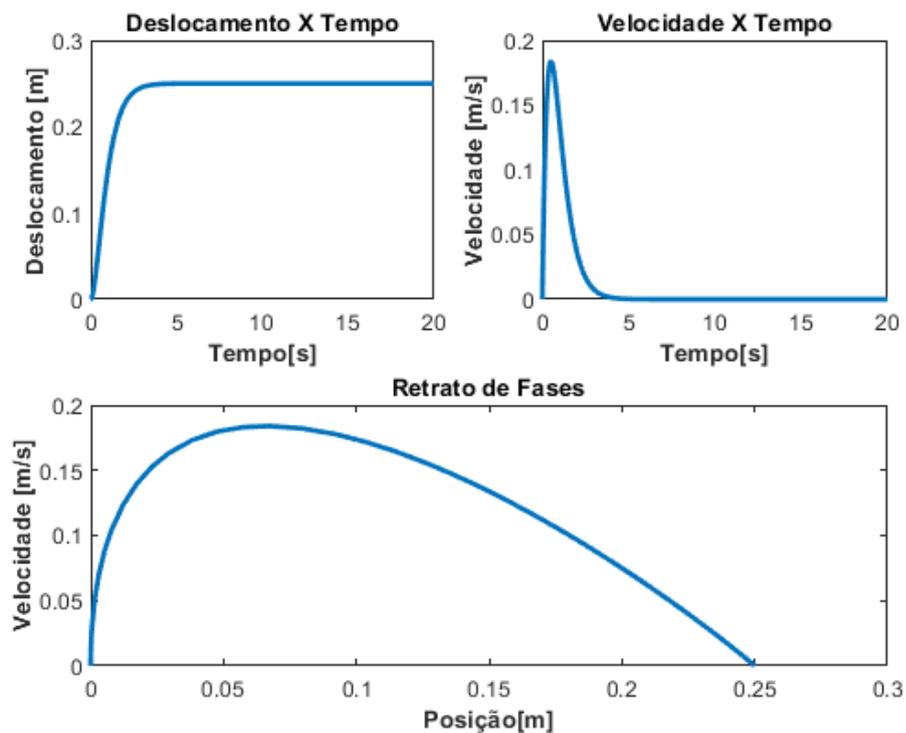


Figura 3.2: Comportamento do sistema para $\zeta = 1$

c) Amortecimento supercrítico: $k = 4N/m$, $m = 1kg$, $c = 20Ns/m$, de modo que $\zeta = 5 > 1$

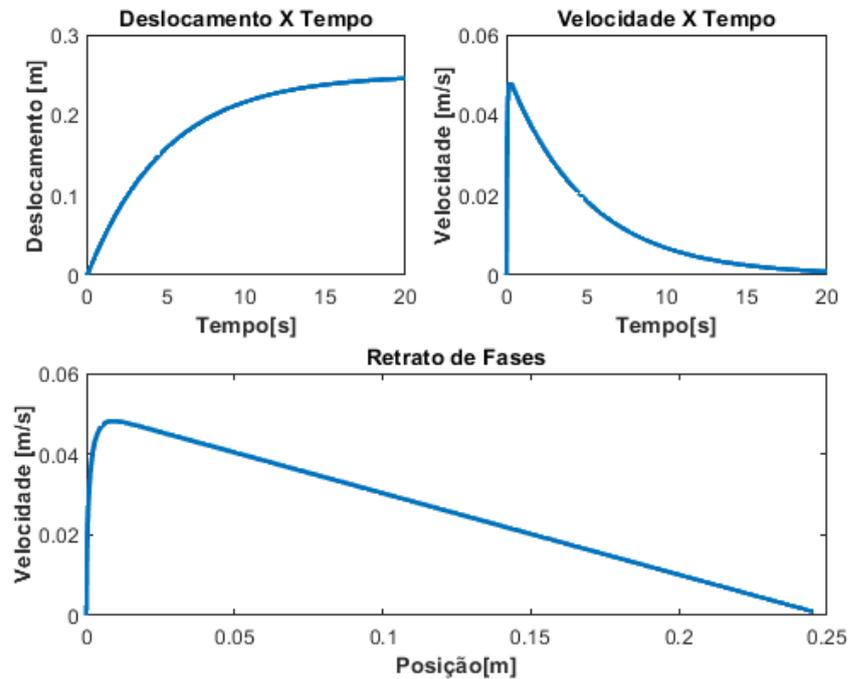


Figura 3.3: Comportamento do sistema para $\zeta = 5$

Em seguida, foi realizada a simulação do sistema sem aplicação de forças externas para diferentes condições iniciais, indicadas abaixo:

- Condição 1: $x(0) = 0m$, $v(0) = 0 m/s$;
- Condição 2: $x(0) = 0m$, $v(0) = 1 m/s$;
- Condição 3: $x(0) = 1m$, $v(0) = 1 m/s$;
- Condição 4 $x(0) = 2m$, $v(0) = 1 m/s$;

As simulações foram realizadas de modo a possuir 3 situações distintas: aquelas em que os polos são complexos, reais e iguais, e reais e distintos. Como visto anteriormente, a classificação dos polos em reais ou complexos depende do valor do fator de amortecimento ζ , de modo que é uma outra forma de referenciar situações de amortecimento subcrítico, crítico e supercrítico. Assim, serão usados os mesmos parâmetros de m, k e c que os usados nas simulações anteriores, de forma a obter os mesmos coeficientes de amortecimento (0,2, 1 e 5).

a) Dois polos complexos: $\zeta < 1$ (0,2)

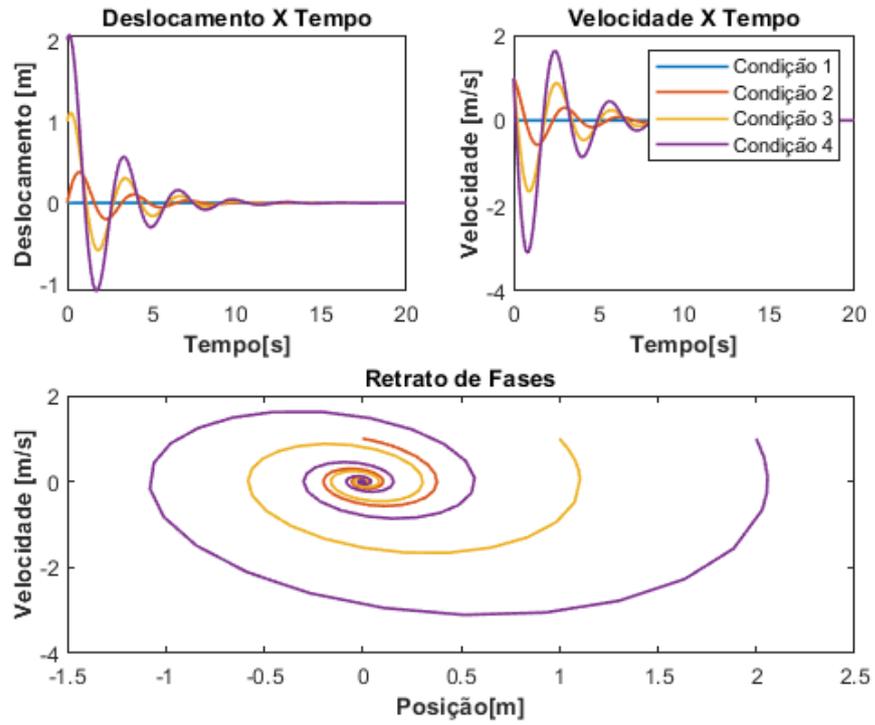


Figura 3.4: Comportamento do sistema para $\zeta = 0,2$ com várias condições iniciais

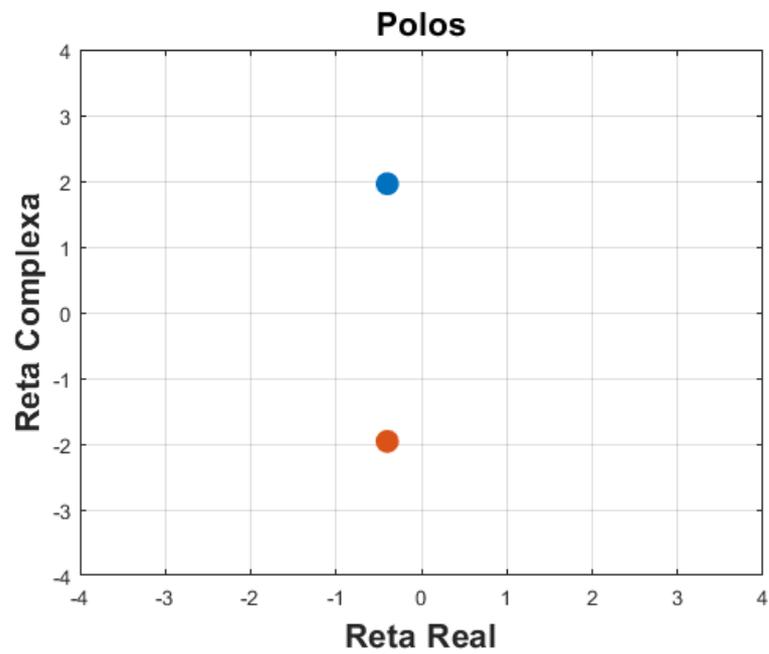


Figura 3.5: Polos do sistema para $\zeta = 0,2$

b) Dois polos reais iguais: $\zeta = 1$

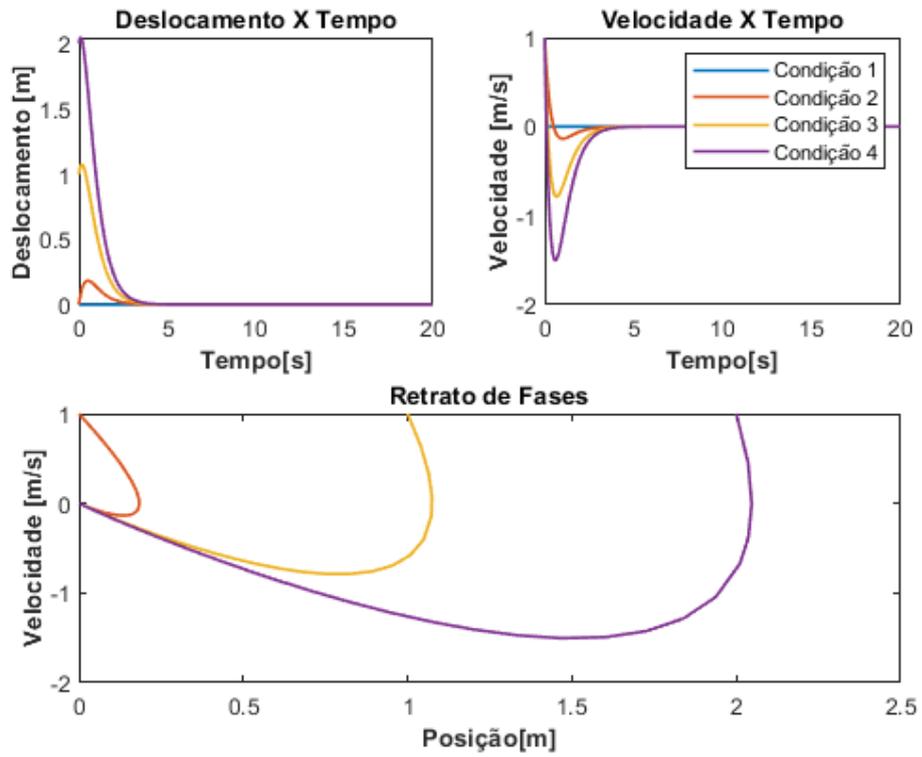


Figura 3.6: Comportamento do sistema para $\zeta = 1$ com várias condições iniciais

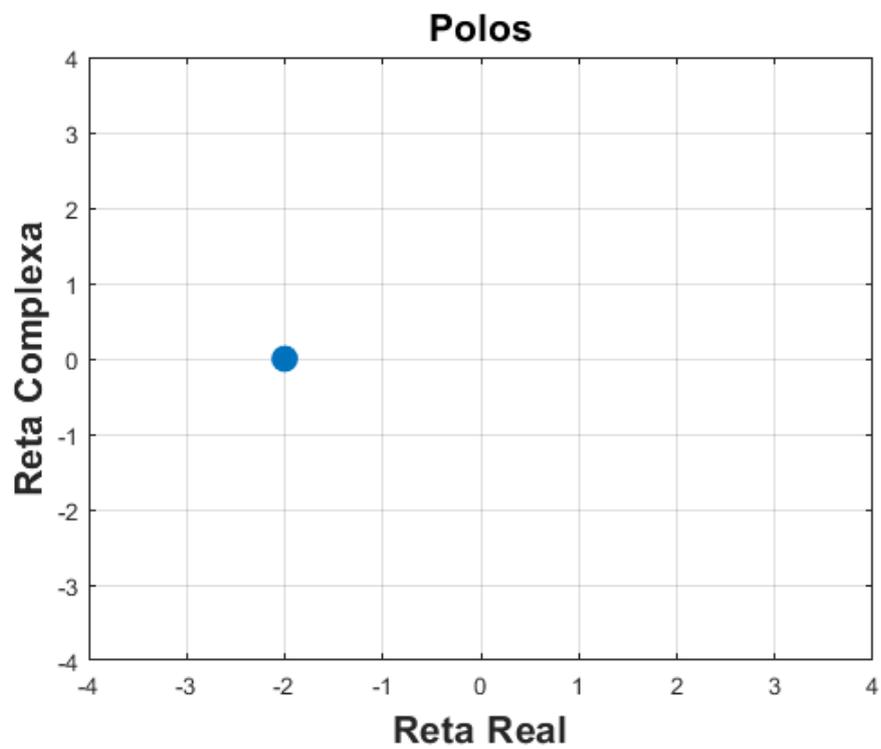


Figura 3.7: Polos do sistema para $\zeta = 1$

c) Dois polos reais distintos: $\zeta > 1$ (5)

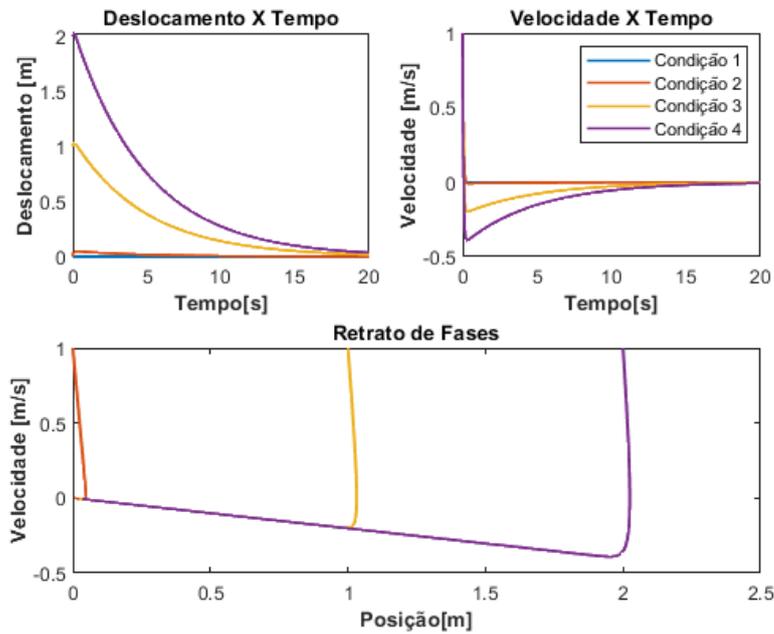


Figura 3.8: Comportamento do sistema para $\zeta = 5$ com várias condições iniciais

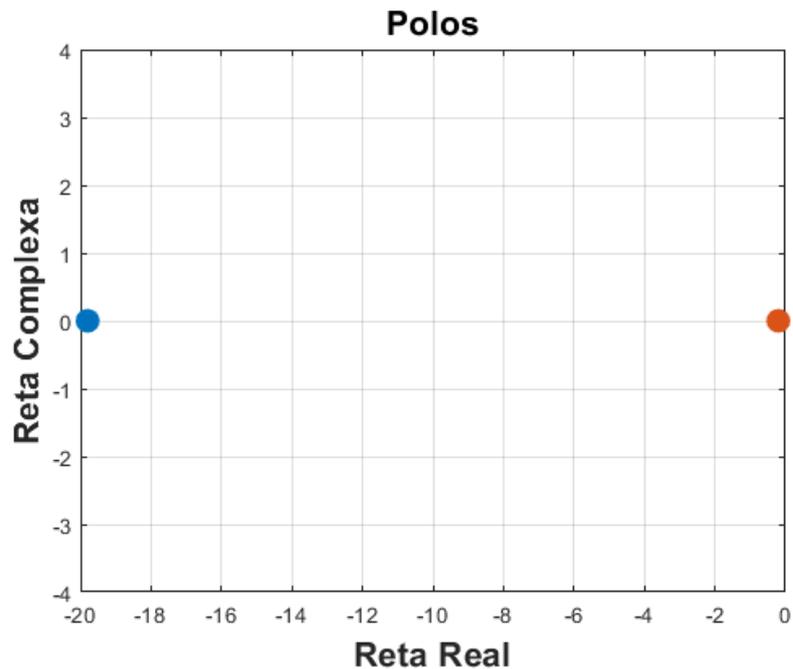


Figura 3.9: Polos do sistema para $\zeta = 5$

Com isso, pode-se notar que, quando $\zeta \geq 1$, os polos não apresentam componente imaginária, possuindo como lugar geométrico apenas a reta real. No entanto, quando $\zeta < 1$, o sistema passa a assumir dois polos com componentes imaginárias complementares, de modo que há uma simetria em relação ao eixo real.

5 CONCLUSÃO

Ao fim, foi possível analisar o comportamento do sistema proposto, verificar a validade das equações matemáticas desenvolvidas nesta tarefa e determinar a relação entre grandezas chave do problema e o seu respectivo comportamento dinâmico – em especial o fator de amortecimento.

6 APÊNDICE: CÓDIGO UTILIZADO NA ATIVIDADE

```
1 %Aluno: Ives Caero Vieira
2 %NUSP: 10355551
3 %PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos - Lista de Exercícios E
4
5
6 - ti = 0;%[s] Instante inicial da simulação
7 - tf = 20;%[s] Instante final da simulação
8 - t= [ti tf] ;%[s] Intervalo de simulação
9 %X0 = [0 0]';%[-] Vetor de condições iniciais de posição [m] e velocidade [m/s]
10 %Parametros do sistema
11 - k=4;%[N/m] Constante elástica da mola
12 - c=20;%[N.s/m] Constante de amortecimento
13 - m=1;%[Kg] Massa
14 - zeta=c/(2*sqrt(k*m));
15 - polos = roots([m c k]);
16 - figure(1)
17 - plot(-19.798,0, '.', 'MarkerSize',38)
18 - hold on
19 - plot(-0.2020,0, '.', 'MarkerSize',38)
20 - grid on
21 - ylim([-4 4])
22 - xlabel('Reta Real','FontWeight','Bold','FontSize',16)
23 - ylabel('Reta Complexa','FontWeight','Bold','FontSize',16)
24 - title('Polos','FontSize',16)
25
```

```
26 - n=4; %Numero de condições iniciais diferentes
27 - for i = 1:n
28 -     if i==1
29 -         X0 = [0 0]';
30 -     elseif i==2
31 -         X0 = [0 1]';
32 -     elseif i==3
33 -         X0 = [1 1]';
34 -     else
35 -         X0 = [2 1]';
36 -     end
37
38     %% Integracao Numérica
39 -     derX = @(t,X) Funcao (t,X,k,c,m) ;%Equação diferencial
40 -     [t,X]=ode45 (derX,t,X0);
41 -     if i==1
42 -         x1 = X(:,1); %Vetor das Posições [m]
43 -         xp1 = X(:,2); %Vetor das Velocidades [m/s]
44 -     elseif i==2
45 -         x2 = X(:,1); %Vetor das Posições [m]
46 -         xp2 = X(:,2); %Vetor das Velocidades [m/s]
47 -     elseif i==3
48 -         x3 = X(:,1); %Vetor das Posições [m]
49 -         xp3 = X(:,2); %Vetor das Velocidades [m/s]
50 -     else
```

```

51 -     x4 = X(:,1); %Vetor das Posições [m]
52 -     xp4 = X(:,2); %Vetor das Velocidades [m/s]
53 - end
54 - end
55 - %% Plots
56 - figure(2)
57 - subplot(2,2,1)
58 - plot(t,x1,'LineWidth',1.2)
59 - hold on
60 - plot(t,x2,'LineWidth',1.2)
61 - plot(t,x3,'LineWidth',1.2)
62 - plot(t,x4,'LineWidth',1.2)
63 - xlabel("Tempo[s]","FontWeight','Bold')
64 - ylabel("Deslocamento [m]","FontWeight','Bold');
65 - title("Deslocamento X Tempo")
66 -
67 - subplot(2,2,2)
68 - plot(t,xp1,'LineWidth',1.2)
69 - hold on
70 - plot(t,xp2,'LineWidth',1.2)
71 - plot(t,xp3,'LineWidth',1.2)
72 - plot(t,xp4,'LineWidth',1.2)
73 - xlabel("Tempo[s]","FontWeight','Bold')
74 - ylabel("Velocidade [m/s]","FontWeight','Bold');
75 - title("Velocidade X Tempo")

```

```

76 - legend('Condição 1','Condição 2','Condição 3','Condição 4')
77 - subplot(2,2,[3 4])
78 - plot(x1,xp1,'LineWidth',1.2)
79 - hold on
80 - plot(x2,xp2,'LineWidth',1.2)
81 - plot(x3,xp3,'LineWidth',1.2)
82 - plot(x4,xp4,'LineWidth',1.2)
83 - xlabel("Posição[m]","FontWeight','Bold')
84 - ylabel("Velocidade [m/s]","FontWeight','Bold');
85 - title("Retrato de Fases")
86 -
87 - function Xp = Funcao(t,X,k,c,m)
88 -     %Parametros
89 -     A=[0 1;-k/m -c/m];%[-] Matriz A de coeficientes
90 -     B=[0;1/m];%[-] Matriz B de coeficientes dos termos forçantes
91 -     F=.001;%[N] Força externa
92 -     Xp = A*X+B*F;
93 - end

```