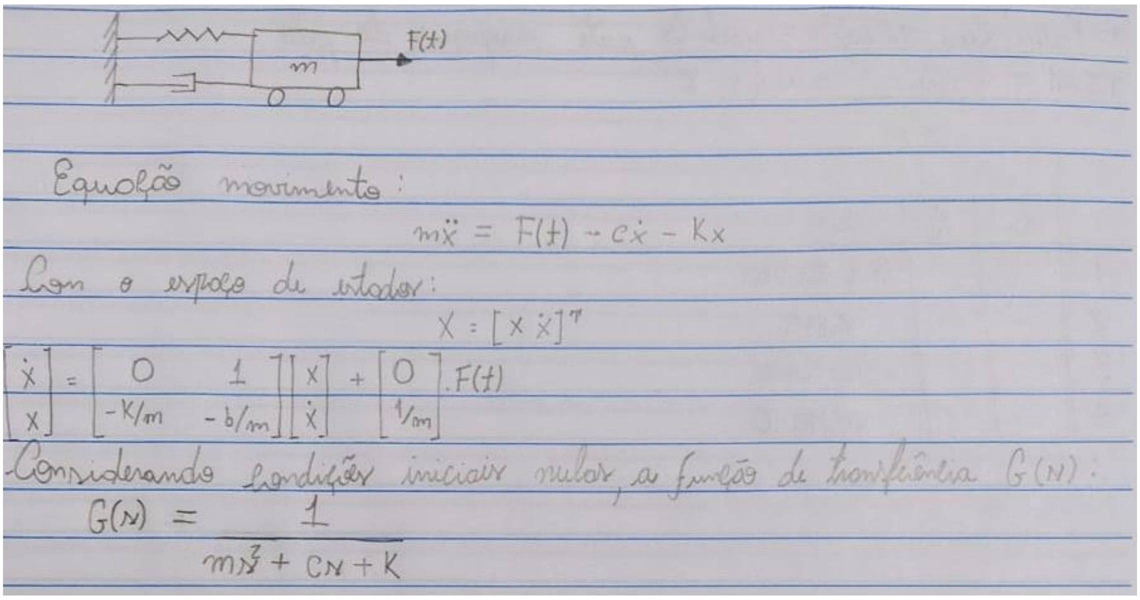
Lista E

Modelagem

Francisco Samuel Amâncio Lima nº10771594

1. Exercício



Equação movimento:

$$m\ddot{x} = F(t) - c\dot{x} - Kx$$

Com o espaço de estados:

$$X = [x \ \dot{x}]^T$$

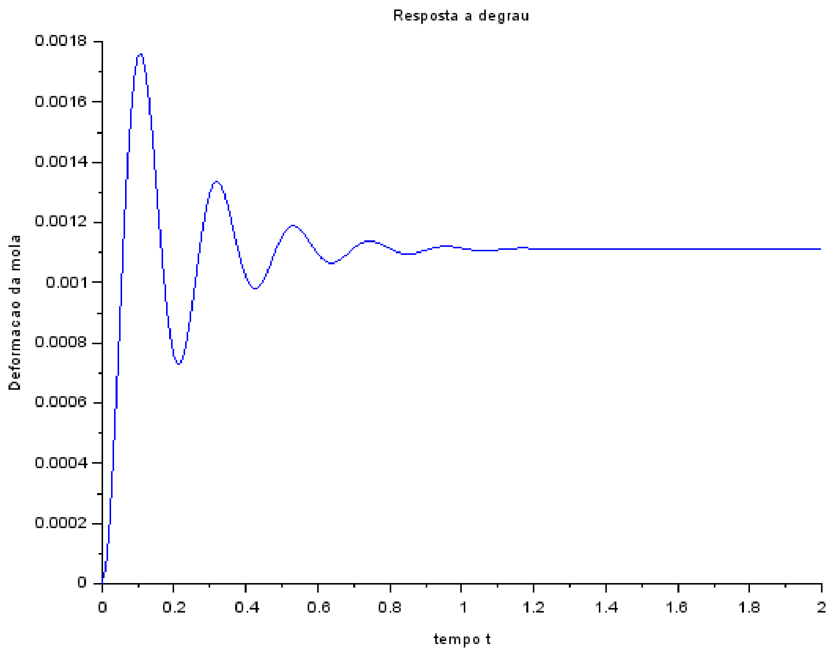
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} . F(t)$$

Considerando condições iniciais nulas, a função de transferência G(s):

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + K}$$

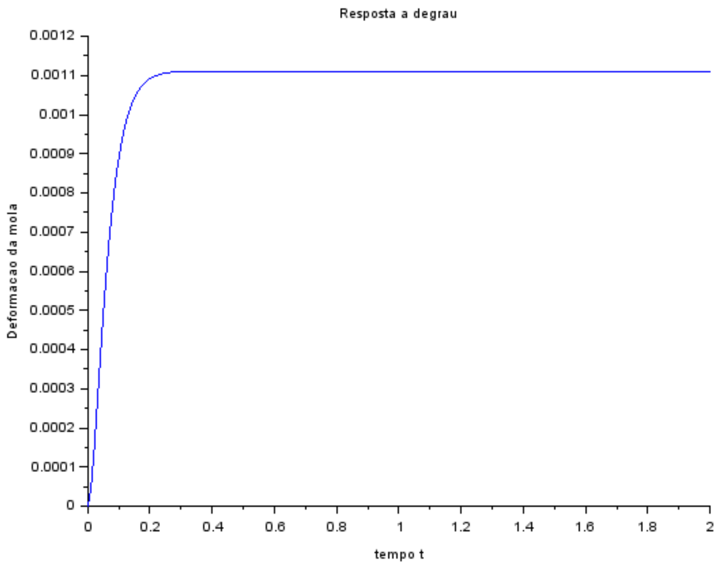
A seguir estuda-se pelos gráficos os efeitos para diferentes valores de ζ com os parâmetros m e k igual a 1 Kg e 900 N/m respectivamente.

- Para ζ < 1:

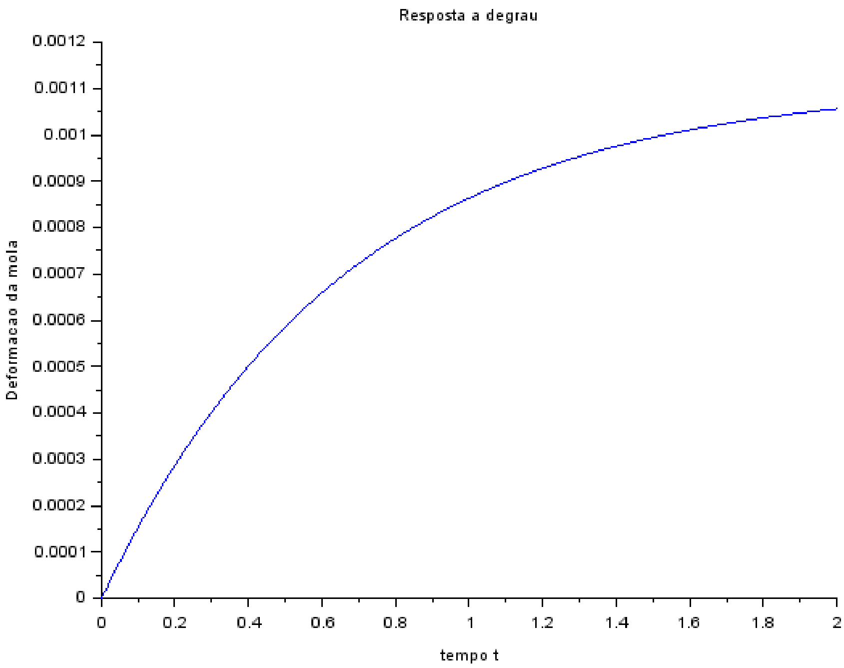


Notam-se oscilações em torno de um ponto de equilíbrio.

- Para ζ = 1 :



- Para ζ >= 1 :



Para os últimos dois casos o sistema não fica oscilando em torno de um ponto.

Lição de casa

1.

Sabendo-se que $\det(A - I\lambda) = 0$

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$\Rightarrow$ Para $\zeta = c/2\sqrt{km} < 1$:

$$c^2 < 4km \Rightarrow c^2 - 4km < 0$$

↳ número imaginário

$\Rightarrow$ Módulo deste número complexo é igual à freq. natural do sist.

$$|s| = \left(\frac{1}{4m^2}\left(c^2 + 4mk - c^2\right)\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$$

$\Rightarrow$ Coeficiente de amortecimento

$$\frac{c}{2m} \Big/ \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \xi$$

$\Rightarrow$ Frequência oscilação = módulo parte imaginária do pólo

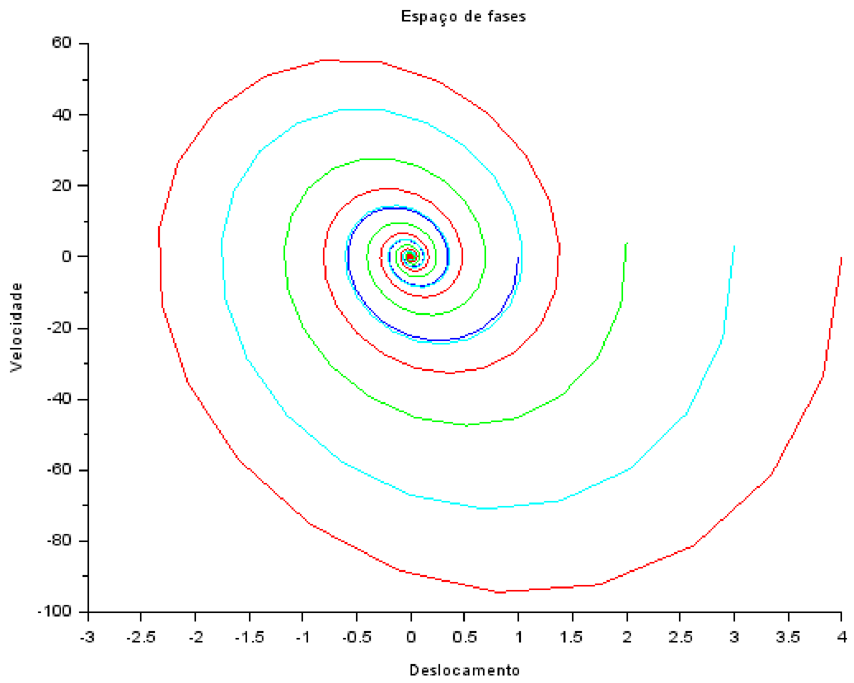
$$|Im| = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \omega\sqrt{1 - \zeta^2}$$

2.

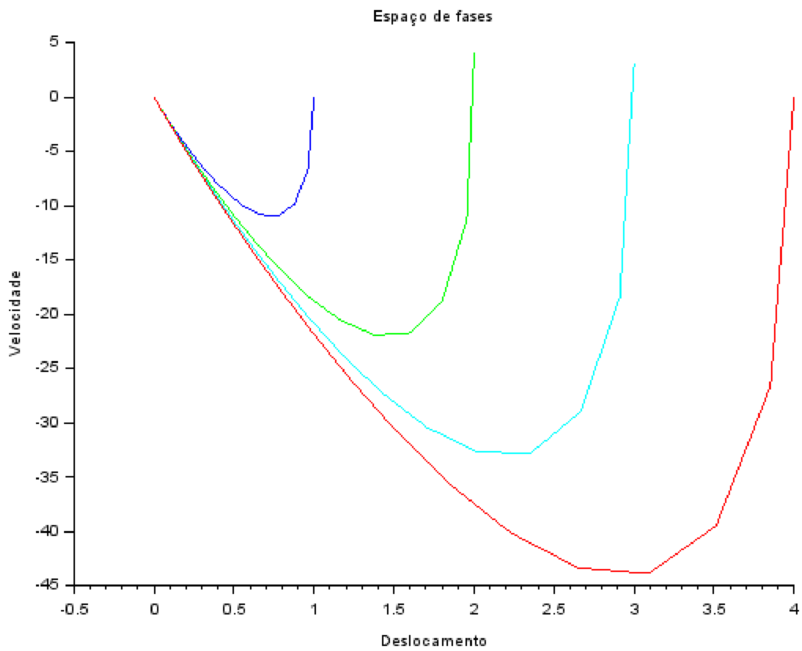
Para os mesmo parâmetros do exercício anterior e as seguintes condições iniciais:

	X0	X0_p	Cor
1	1	0	Azul escuro
2	2	4	Verde
3	3	3	Azul Claro
4	4	0	Vermelho

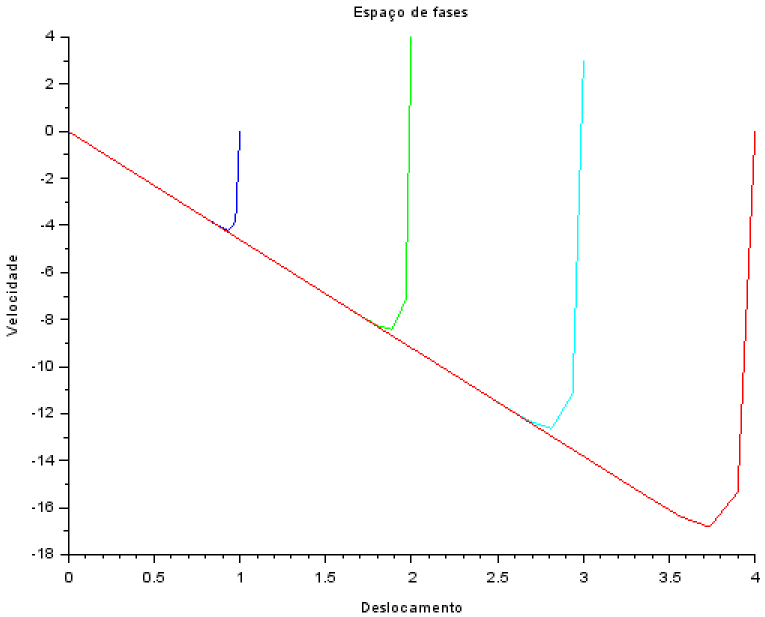
- Para ζ < 1 – Duas raízes complexas:



- Para ζ = 1 – Duas raízes reais iguais:



- Para ζ > 1 – Duas raízes reais distintas:



Código

PARTE 01

```
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;c=600;k=900;
// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -c/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];
// Montando o sistema:
massamola=syslin('c',A,B,C,D);
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u=ones(t);
// No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
x0e=[0;0]; // neste caso, x1(0)=0 e x2(0)=0
// Alem de calcular a saida y, a função csim também permite obter o estado x:
[y,x]=csim(u,t,massamola,x0e);
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,y,2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Deformacao da mola')
// Podemos plotar o grafico do estado x2, por exemplo:
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',2)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,x(2,:),2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Velocidade da massa')
```

PARTE 02

```
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;b=200;k=900;

// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;

//Condições iniciais:
x0 = [1 2 3 4];
xp0 = [0 4 3 0];

funcprot(0)
 function dy=eq(t, y)
 dy(1) = y(2);
 dy(2) = -(k/m)*y(1) - (b/m)*y(2);
```

```
 endfunction

//Resolvendo:
for i = 1:length(xp0)
 y = ode([x0(i);xp0(i)],0,t,eq);
 for j = 1:length(t)
     x(i,j) = y(1,j);
     xp(i,j) = y(2,j);
 end
end

scf(0)
plot2d(x(1,:),xp(1,:),2)
plot2d(x(2,:),xp(2,:),3)
plot2d(x(3,:),xp(3,:),4)
plot2d(x(4,:),xp(4,:),5)
xtitle("Espaço de fases","Deslocamento","Velocidade");
```