Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Lista E de Modelagem de Sistemas Dinâmicos

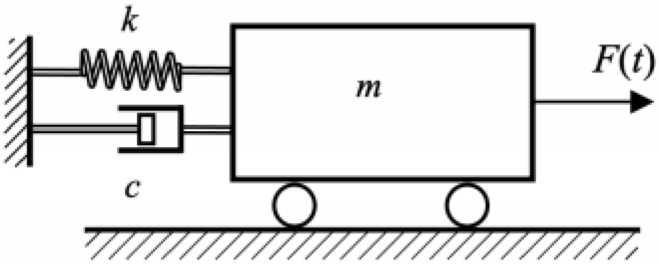
Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

Prof. Dr. Decio Crisol Donha

Pedro Pires Sulzer
10705940

22 de outubro de 2020

Exercício 1



Estudou-se o sistema massa-mola amortecedor ilustrado acima para obter sua evolução temporal da posição e da velocidade do carrinho.

Deduziu-se a equação que rege o sistema a partir de duas abordagens diferentes:

- Utilizando a transformada de Laplace a fim de obter uma equação para representar o comportamento do sistema, sendo obtida uma função de transferência.
- Montando o vetor de estados e a obtendo dos autovalores correspondente a matriz dinâmica do sistema.

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA :

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \Rightarrow ms^2 + cs + k = 0 \Rightarrow s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

2ª LEI DE NEWTON P/ SISTEMA

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = F(t)$$

VETOR DE ESTADOS:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t)$$

CALCULANDO OS AUTOVALORES DA MATRIZ :

$$\det \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \alpha \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Como esperado, os dois métodos levam a resultados idênticos, o qual é identificado pelos dos autovalores que são iguais as raízes do polinômio no denominador da função de transferência.

Exercicio 2

SOLUÇÃO HOMOGÊNEA (DESPREZA O TERMO FORÇANTE)

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = 0$$

$$x(t) = A e^{t\frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}} + B e^{t\frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}}$$

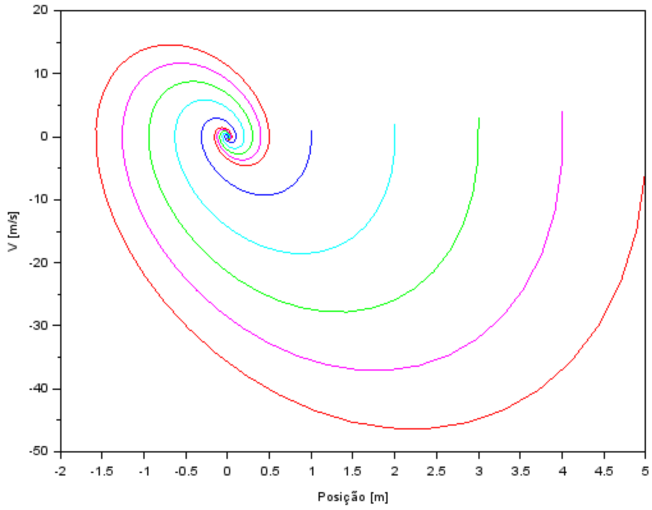
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad c' = 2\sqrt{km} \qquad \xi = \frac{c}{c'}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\left(A e^{i\omega t\sqrt{1-\xi^2}} + B e^{-i\omega t\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

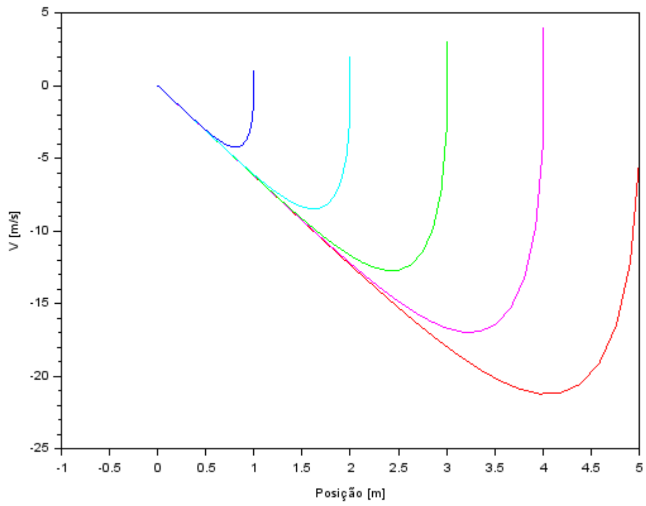
Os cenários de movimentação do sistema podem ser divididos em três, o primeiro é o caso de raízes complexas, o seguindo é o caso em que as duas raízes são reais e idênticas e o terceiro é o caso em que as duas raízes são reais e distintas.

A simulação contempla os primeiros 30 segundos desde a condição inicial imposta. Os valores numéricos para os parâmetros foram os seguintes : m = 1 kg e k = 210 N/m, sendo os valores para o coeficiente de amortecimento estabelecidos para se atingir o cenário desejado.

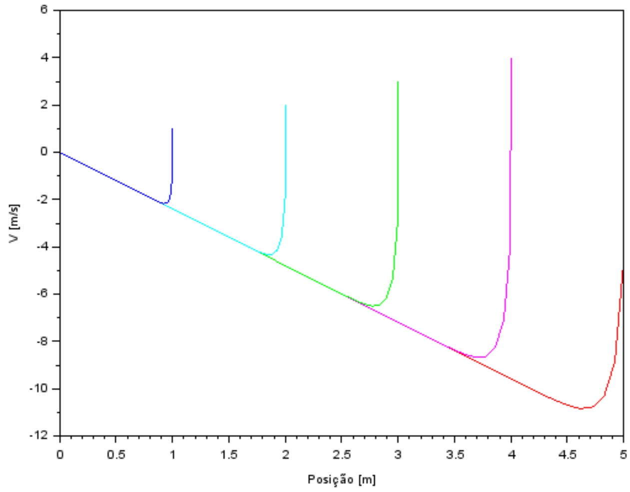
Caso em que b = 10 N s/m, gerando duas raízes complexas



Caso em que b = 40 N s/m, gerando duas raízes reais identicas



Caso em que b = 90 N s/m, gerando duas raízes reais distintas



Código utilizado:

```
clear();
//Definição do caso a ser estudado:
b = 90; // [N s/m] b pode ser 10, 40 ou 90, ocasionando em diferentes
        // tipos de resposta do sistema

//Constantes do sistema:
m = 1; //[kg]
k = 210; //[N/m]

//Tempo de simulação:
tf = 10;
i = 1000;
t = linspace(0,tf,i);

//Condições iniciais do sistema:
xinicial = [1 2 3 4 5];
xpontoinicial = [1 2 3 4 5];

//Vetor de estados:
funcprot(0)
 function dy=f(t, y)
 dy(1) = y(2);
 dy(2) = -(k/m)*y(1) - (b/m)*y(2);
 endfunction

//Solução da equação diferencial:
for i = 1:length(xinicial)
 solution = ode([xinicial(i);xpontoinicial(i)],0,t,f);

 for j = 1:length(t)
 x(i,j) = solution(1,j);
 xponto(i,j) = solution(2,j);
 end
end
scf(1);
colors = ["b","c","g","m","r"];
for i = 1:length(xinicial)
 plot(x(6-i,:),xponto(6-i,:),colors(6-i));
end
xlabel("Posição [m]");
ylabel("V [m/s]");
```