Lista E

Lucas Souza Vieira
N° USP: 10772863
PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Outubro de 2020

Exercício

Usando o Teorema do Movimento do Baricentro, esrevemos a equação que descreve o movimento do corpo no tempo, onde $x(t)$ é a deformação da mola (nula na condição de equilíbrio):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

Definindo $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ como as variáveis de estado x_1 e x_2 e sabendo que a saída $y(t)$ é a própria deformação da mola, reescrevemos as equações do sistema na forma de espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + 0 \cdot F(t)$$

Sabendo ainda que a entrada do sistema é a força $F(t)$, por notação, escrevemos $u(t) = F(t)$. Desta forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{F}{m} - \frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace nas equações do espaço de estados, obtemos um sistema de equações algébricas:

$$\begin{cases} sX_1 - x_1(0) = x_2 \\ sX_2 - x_2(0) = \frac{U}{m} - \frac{b}{m}X_2 - \frac{k}{m}X_1 \end{cases}$$

Para condições iniciais nulas, obtemos a solução do sistema isolando $X_2(s)$ na primeira equação e substituindo a segunda de modo a obter:

$$sX_1 = X_2$$

$$s^2X_1 = \frac{U}{m} - \frac{bs}{m}X_1 - \frac{k}{m}X_1$$

Isolando X_1:

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{ms^2 + bs + k}$$

Como sabemos que $y(t) = x_1(t)$, então podemos escever diretamente escrever a expressão de $Y(s)$:

$$y(t) = x_1(t) \Leftrightarrow Y(s) = \frac{U(s)}{ms^2 + bs + k}$$

A função de transferência é obtida como $G(s) = Y(s)/U(s)$, de tal sorte que:

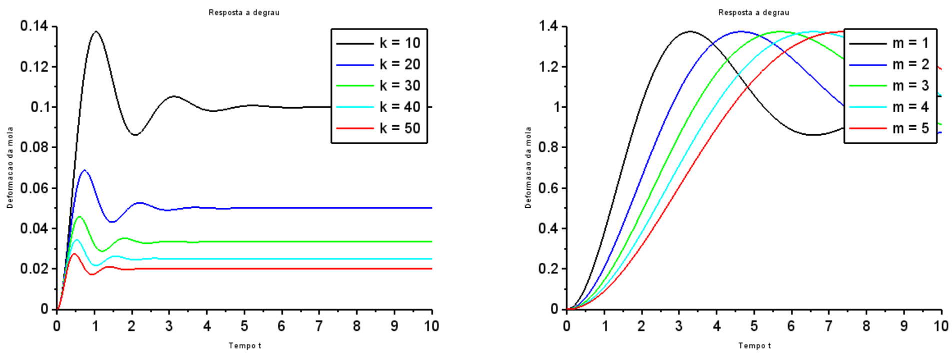
$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Impomos $F(t)$ do tipo degrau. Variando os parâmetros do sistema, podemos verificar diferentes respostas para a mesma entrada. Neste sentido, variamos valores de k e m para um dado ζ, o que define o valor de b. Escolhemos três valores de ζ de modo a satisfazer o que pede o enunciado. Em seguida, variamos valores de m ou k um de cada vez, mantendo a grandeza não variada em valor unitário. Os resultados obtidos são:

- $\zeta = 0,3$

Com $\zeta = 0,3$, satisfazendo a condição de $\zeta < 1$ (caso de amortecimento subcrítico), obtivemos as respostas indicadas na Figura 1. A variação dos valores de k permite variar o valor da deformação sofrida pela mola e a duração do efeito transitório da solução. Valores maiores de k resultam em menores deformações da mola e menos tempo até que a solução homogênea se tenda a zero. Já a variação do parâmetro de massa do sistema não afeta as amplitudes de movimento do sistema, mas afeta a duração de tempo de cada ciclo de oscilação.

Figura 1: Resposta do sistema para $\zeta = 0,3$

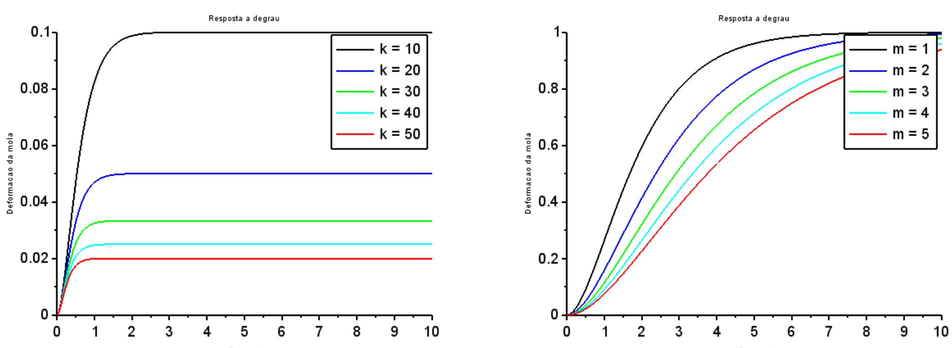


(a) $m = 1\ kg$ e k variável (b) $k = 1\ N/m$ e m variável

- $\zeta = 1,0$

Esse caso corresponde ao amortecimento crítico. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 2. Verificamos um amortecimento rápido do sistema na posição de regime permanente, sem oscilações como no exemplo anterior. Quanto maior o valor de k, menor a deformação máxima da mola e menor o tempo até chegar nessa deformação. Para os valores de m, não se altera a deformaçã máxima sofrida, mas altera-se o tempo decorrido até atingi-la. Quanto maior a massa, mais tempo até atingir a deformação constante de regime.

Figura 2: Resposta do sistema para $\zeta = 1,0$

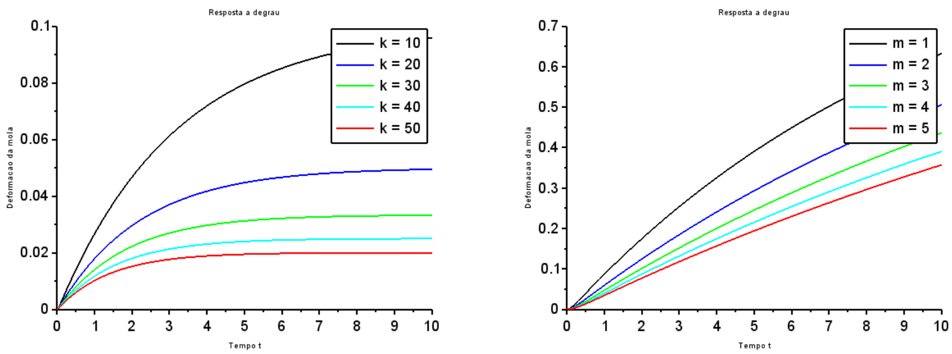


(a) $m = 1\ kg$ e k variável (b) $k = 1\ N/m$ e m variável

- $\zeta = 5,0$

Este caso final corresponde a um exemplo de amortecimento supercrítico e se encontra ilustrado na Figura 3. O corpo demora muito mais para atingir sua posição de equilíbrio em regime, dada a elevada magnitude da força viscosa do amortecedor. A sensibilidade do sistema a variações dos parâmetros m e k segue similar às dos exemplos anteriores.

Figura 3: Resposta do sistema para $\zeta = 5,0$



(a) $m = 1\ kg$ e k variável

(b) $k = 1\ N/m$ e m variável

Lição de casa

1)

A matriz A do sistema descrito em espaço de estados é a seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são obtidos calculando-se as raízes da sua equação característica, segundo:

$$\det(A - sI) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} -s & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} - s \end{bmatrix} = 0$$

$$s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} = 0$$

Mulplicando a equação por m, obtemos do lado esquerdo da igualdade o mesmo polinômio presente no denominador da função de transferência. Desta maneira, os polos da função de transferência (também raízes deste polinômio) são iguais aos autovalores de A. Para calculá-los, neste caso, basta resolver a equação de 2° grau em s:

$$ms^2 + bs + k = 0$$

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Da solução s obtida, verificamos que ela pode fornecer dois números reais distintos, dois números reais iguais ou um par de complexos conjugados. Qual caso ocorrerá depende do discriminante da equação, i.e., do valor $b^2 - 4mk$. Para que obtenhamos raízes complexas conjugadas, como pede o enunciado, é preciso que:

$$b^2 - 4mk < 0$$

Dividindo os dois lados da inequação por $4mk$:

$$\frac{b^2}{4mk} < 1$$

Tirando a raiz quadrada:

$$\frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$$

O lado esquerdo da inequação é o próprio fator ζ, de modo que reescrevemos:

$$\zeta < 1$$

Assim, para que tenhamos polos complexos, é preciso satisfazer $\zeta < 1$. A solução complexa s obtida é escrita como:

$$s = -\frac{b}{2m} \pm j\frac{1}{2m}\sqrt{4mk - b^2}$$

Sejam $\mathrm{Re}(s)$ e $\mathrm{Im}(s)$ as partes real e imaginária de s, respectivamente. O módulo $|s|$ é igual à raiz quadrada da soma dos quadrados de $\mathrm{Re}(s)$ e $\mathrm{Im}(s)$:

$$|s| = \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} + \frac{4mk - b^2}{4m^2}}$$

Simplificando, obtemos o valor da frequência natural ω_n do sistema:

$$|s| = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n \tag{1}$$

Dividindo $\mathrm{Re}(s)$ por $|s|$, escrevemos:

$$\frac{|\mathrm{Re}(s)|}{|s|} = \frac{b/2m}{\sqrt{k/m}} \tag{2}$$

Simplificando, obtemos exatamente a expressão do coeficiente de amortecimento:

$$\frac{|\mathrm{Re}(s)|}{|s|} = \frac{b}{2\sqrt{km}} = \zeta \tag{3}$$

Tomando o módulo da parte imaginária do polo s:

$$|\mathrm{Im}(s)| = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} \tag{4}$$

$$|\mathrm{Im}(s)| = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \tag{5}$$

$$|\mathrm{Im}(s)| = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{b^2}{4km}\right)} \tag{6}$$

Constatando que o termo fora dos parênteses é a própria frequência do sistema e que o termo negativo dentro dos parênteses é o quadrado do coeficiente de amortecimento ζ, reescrevemos:

$$|\mathrm{Im}(s)| = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \tag{7}$$

Essa última expressão corresponde à frequência de oscilação do sistema, de onde sabemos que $\omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$.

2)

Para este exercício, consideraremos os mesmos valores de ζ utilizados no anterior para representar cada caso. Arbitramos velocidade inicial nula em todos os testes, variando apenas a condição inicial de posição. Fixamos os parâmetros de massa e mola do sistema, sendo $m = 1\ kg$, $k = 300\ N/m$. A constante do amortecedor b é definida pelos valores supracitados e pelo coeficiente de amortecimento imposto. Separamos as análises em três casos:

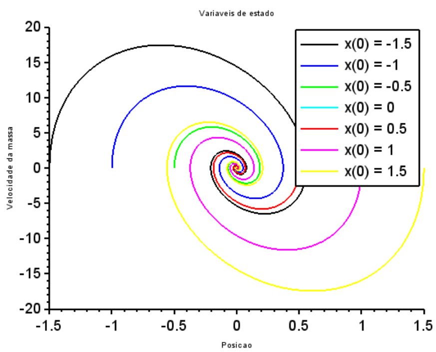
- $\zeta = 0,3$

O primeiro caso corresponde a dois polos complexos conjugados, com $\zeta < 1$ e amortecimento sub-crítico. Para os parâmetros arbitrados, temos:

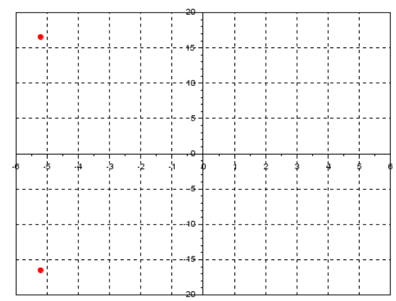
$$\begin{cases} s_1 = -5,196 + j16,523 \\ s_2 = -5,196 - j16,523 \end{cases}$$

A Figura 4a apresenta a resposta do sistema para as diferentes condições iniciais. Ao seu lado, a Figura 4b apresenta os polos do sistema no plano complexo. Como podemos verificar, ambos são complexos conjugados ($\mathrm{Re}(s_1) = \mathrm{Re}(s_2)$ e $\mathrm{Im}(s_1) = -\mathrm{Im}(s_2)$) e possuem parte imaginária não nula. Sua posição no plano identificam o caso de $\zeta < 1$. Pela análise do plano de fases, o corpo oscila em torno da origem reduzindo sua amplitude até que sua posição tenda à origem com velocidade tendendo a zero. Para valores maiores de $x(0)$, o corpo atinge amplitudes maiores, sendo a inicial a máxima delas.

Figura 4: Simulação do sistema livre para $\zeta = 0,3$



(a) Plano de fases

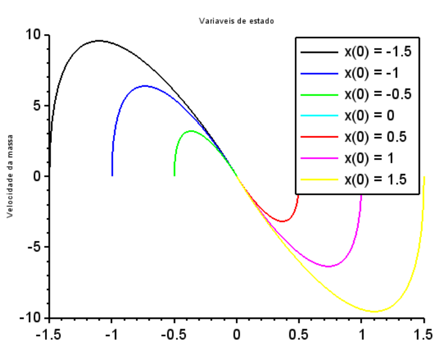


(b) Polos no plano complexo

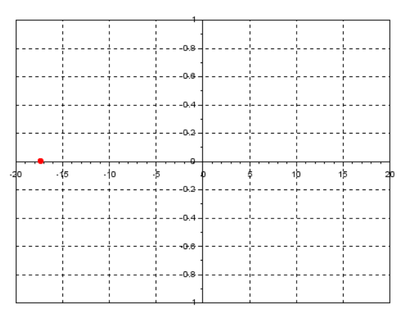
- $\zeta = 1,0$

Para termos polos reais e iguais, é preciso que $\zeta = 1$, correspondente ao caso de amortecimento crítico. A Figura 5b tem apenas um ponto assinalado na reta real do plano complexo, o que indica raízes reais e iguais. Com os valores arbitrados para os parâmetros, o valor calculado é $s_1 = s_2 \approx -17,321$. Já a Figura 5a indica como o sistema é amortecido sem ao menos oscilar em torno da posição de equilíbrio. A partir da posição inicial, atinge-se uma velocidade máxima em módulo, que se reduz até zero quando o corpo atinge a origem.

Figura 5: Simulação do sistema livre para $\zeta = 1,0$



(a) Plano de fases



(b) Polos no plano complexo

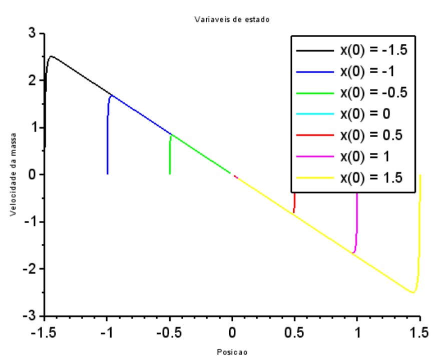
- $\zeta = 5,0$

Finalmente, a última simulação se refere ao caso em que $\zeta > 1$ e temos, portanto, dois polos reais distintos e sistema supercriticamente amortecido. A Figura 6b apresenta a posição dos polos no plano complexo. Ambos residem sobre a reta real e têm parte imaginária nula. Para os parâmetros arbitrados, calculam-se:

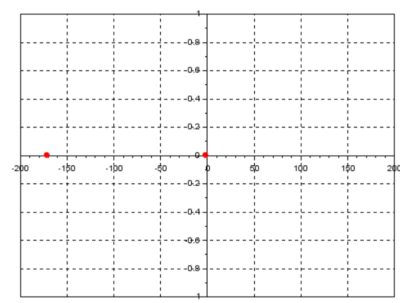
$$\begin{cases} s_1 \approx -1.75 \\ s_2 \approx -171.455 \end{cases}$$

A Figura 6a apresenta a relação entre posição e velocidade do corpo para as diferentes condições iniciais. Assim como no exemplo anterior, a massa não oscila em torno da origem, mas atinge uma velocidade máxima e em seguida é desacelerado até velocidade nula quando atinge a origem. A velocidade é rapidamente limitada pela elevada força viscosa, de modo que seu valor máximo em módulo é atingido pouco depois da posição inicial.

Figura 6: Simulação do sistema livre para $\zeta = 5,0$



(a) Plano de fases



(b) Polos no plano complexo

Apêndice

Código com a simulação do sistema para uma entrada degrau usando a função de transferência:

```
clear all;
xdel(winsid());

// Escolha de iteracao sobre valroes de massa o constante da mola
// Caso 1: sensibilidade do sistema a variacao de k
// Caso 2: sensibilidade do sistema a variacao de m
caso = 2;

// Definindo os parametros do sistema:
if caso ==1 then
    k = [10.;20.;30.;40.;50.];// Valores de k escolhidos
    m = 1.; // Massa unitaria
```

```
    variavel_iterada = 'k';
    lista_variavel_iterada = k;
else
    m = [1.;2.;3.;4.;5.]; // Valores de m escolhidos
    k=1; // Constante de mola unitaria
    variavel_iterada = 'm';
    lista_variavel_iterada = m;
end

zeta = 0.3; // Fator de amortecimento
b = zeta*2*sqrt(k*m); // Amortecimento compativel com zeta arbitrado

// Simulando o sistema para uma entrada degrau (u=0 para t<0 e u=1 para t>0):
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:100;
// Definindo a entrada:
u=ones(t);

// Definindo o vetor de condicoes iniciais:
// O sistema   de segunda ordem, logo sao duas condicoes iniciais.
// N o definindo as condicoes iniciais o programa assume como sendo nulas.
x0=[0;0]; // x(0) = 0 e a derivada de x(t) no instante inicial tambem eh nula.

// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)

// Definindo os polinomios da funcao de transferencia:
// Numerador:
n=poly([1],'s','coeff');

// Inicializacao vetor com as legendas do grafico final
T = [];

// Escrita da funcao de transferencia e obtencao da resposta do sistema
// para cada valor de k discretizado
for i = 1:length(b);
    // Denominador
    if caso == 1 then;
        d=poly([k(i) b(i) m],'s','coeff');
    else;
        d=poly([k b(i) m(i)],'s','coeff');
    end

    // Funcao de transferencia G(s)
    G=syslin('c',n/d);

    // Realizando a simulacao com o comando csim:
    [y]=csim(u,t,G,x0);
    // Mostrando o resultado da simulacao:
    xset('thickness',2);
    xset('font size',4);
    plot2d(t,y,i);
    T(i)= variavel_iterada+' = '+string(lista_variavel_iterada(i));
end

legend(T); //Define a legenda das curvas
xtitle('Resposta a degrau','Tempo t','Deformacao da mola')
```

Código com a simulação do sistema para uma entrada degrau usando a representação em espaço de estados:

```
clear all;
xdel(winsid());

// Definindo os parametros do sistema:
m=1;k=1;
zeta = sqrt(2)/2; // Fator de amortecimento
```

```
b = zeta*2*sqrt(k*m); // Amortecimento compativel com zeta arbitrado

// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -b/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];

// Montando o sistema:
oscilador=syslin('c',A,B,C,D);

// Vetor tempo:
t=0:0.01:2;

// Entrada do sistema
u=ones(t); // Entrada tipo degrau: F(t) = u(t) = 1 N

// Condicoes iniciais do vetor de estados
x0e=[0;0]; // Condicoes iniciais nulas

// Obtencao do vetor de saidas y(t) e de estados x(t):
[y,x]=csim(u,t,oscilador,x0e);

// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)

// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,y,2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Deformacao da mola')

// Plot do estado x2=dx/dt:
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',2)

// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,x(2,:),2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Velocidade da massa')
```

Código com a simulação do sistema livre para várias condições iniciais, usando representação em espaço de estados:

```
clear all;
xdel(winsid());

// Definindo os parametros do sistema:
m=1;k=300;
zeta = 5.0; // Fator de amortecimento
b = zeta*2*sqrt(k*m); // Amortecimento compativel com zeta arbitrado

// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -b/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];

// Polos do sistema (autovalores de A)
s = spec(A);
s1 = s(1);
s2 = s(2);


scf(0); // Iniciando a janela grafica
// Plotando os polos no plano complexo
plot(real(s1),imag(s1),'marker','o','markerFaceColor','red','markerEdgeColor','red');
plot(real(s2),imag(s2),'marker','o','markerFaceColor','red','markerEdgeColor','red');
set(gca(),"grid",[1 1]); // Malha quadriculada
a =gca();
```

```
// Desenho dos eixos x e y do plano de Argand-Gauss
a.x_location="origin";
a.y_location="origin";


// Montando o sistema:
oscilador=syslin('c',A,B,C,D);

// Vetor tempo:
t=0:0.005:2;

// Entrada do sistema
u=zeros(t); // Entrada nula: F(t) = u(t) = 0 -> oscilacao livre

// Possiveis condicoes iniciais arbitradas para o vetor de estados
x0 = [-1.5;-1.;-0.5;0.;0.5;1.;1.5];
v0 = 0.;

// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)

// Resolvemos as equacoes do espaco de estados para
// diferentes condicoes iniciais
for i=1:length(x0);
    x0e=[x0(i);v0]; // Condicoes iniciais

    // Obtencao do vetor de saidas y(t) e de estados x(t):
    [y,x]=csim(u,t,oscilador,x0e);

    // Mostrando o resultado da simulacao:
    xset('thickness',2);
    xset('font size',4);
    plot2d(x(1,:),x(2,:),i);
    T(i)='x(0) = '+string(x0(i));
end

legend(T); //Define a legenda das curvas
xtitle('Variaveis de estado','Posicao','Velocidade da massa')
```