ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PME 3380 - MODELAGEM DE SISTEMAS DINÂMICOS

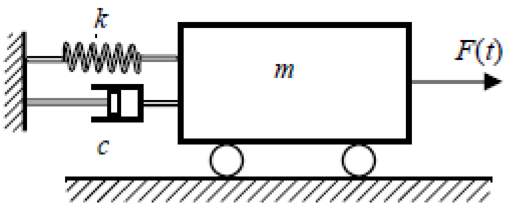
LISTA E

Aluno:
Caio Shohei Uemura Fujinaka 8040879

Docentes:
Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury
Prof. Dr. Décio Crisol Donha

São Paulo, SP
2020

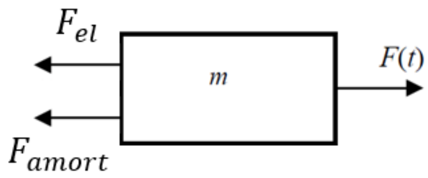
I. **Exercício I: Obtenha as equações de estado e a função de transferência do seguinte sistema, e simule para uma entrada F(t) do tipo degrau (experimente outros tipos de entrada também), considerando a deformação x(t) da mola como saída.**



Simule o sistema para diferentes valores de m, c e k, de tal forma que se tenha uma simulação para cada um dos três casos a seguir:

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1, \qquad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = 1, \qquad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} > 1$$

Obtendo o diagrama de corpo livre:



Aplicando o TMB:

$$m\ddot{x} + c\ddot{x} + kx = F(t)$$

Adotando $x_1 = x$ e $F(t) = u$, tem-se o seguinte sistema de equações de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{m}[-kx_1 - bx_2 - u] \end{cases}$$

Adotando a deflexão da mola como saída:

$$y = x_1$$

Logo temos o seguinte conjunto de equações em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]\, u$$

Aplicando a Transformada de Laplace:

$$\begin{cases} sX_1 - x_1(0) = X_2 \\ sX_2 - x_2(0) = -\dfrac{k}{m}X_1 - \dfrac{b}{m}X_2 + \dfrac{1}{m}U \end{cases}$$

Adotando condições iniciais nulas:

$$\begin{cases} sX_1 = X_2 \\ sX_2 = -\dfrac{k}{m}X_1 - \dfrac{b}{m}X_2 + \dfrac{1}{m}U \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

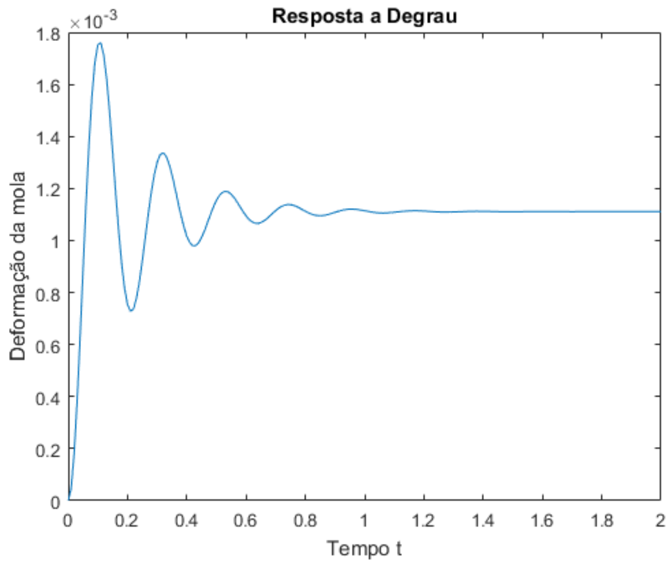
$$X_1 = \frac{1}{ms^2 + bs + k}U$$

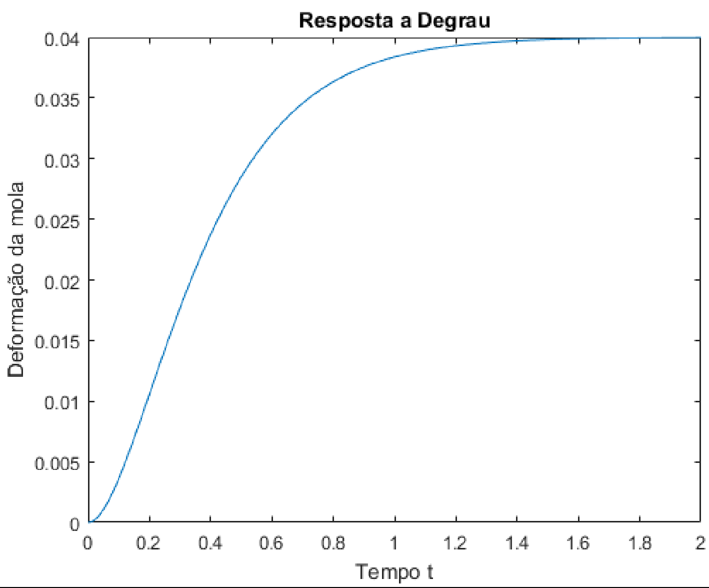
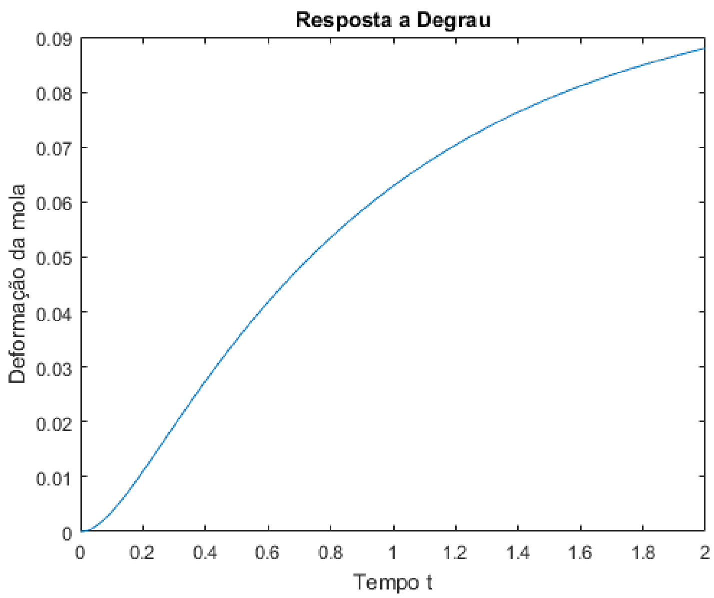
$$Y = \frac{1}{ms^2 + bs + k}U$$

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Simulando para os 3 fatores de amortecimento:

$m = 1\ kg$ e $b = 10\ N.s/m$

$\zeta < 1$	$k = 900\ N/m$	

<table>
<tr>
<td>$\zeta = 1$</td>
<td>$k = 25N/m$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\zeta > 1$</td>
<td>$k = 10N/m$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

II. Lição de Casa 1: Considerando o exercício anterior, calcule os autovalores da matriz A e calcule as raízes do polinômio no denominador da função de transferência e compare. Estas raízes (e os autovalores) são os polos do sistema. Para o caso $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$, observe que as raízes (e também os autovalores) são números complexos. Verifique que o módulo deste número complexo é igual à frequência natural do sistema massa-mola amortecedor. Verifique ainda que dividindo o módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo se obtém o coeficiente de amortecimento. Observe que a frequência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do polo.

Para o caso $\zeta < 1$ obtêm-se os seguintes autovalores:

-5,0000+29,5804i
-5,0000-29,5804i

Confirmando as raízes do polinômio denominador da FT:

-5,0000+29,5804i
-5,0000-29,5804i

Calculando o módulo do número complexo:

30,000

Verificando o valor da frequência natural:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{k}} = 30{,}0000$$

Dividindo o módulo da parte real pelo módulo do número complexo:

0,1667

Verificando o valor do coeficiente de amortecimento:

$$c = \frac{b}{2 * (\sqrt{k * m})} = 0{,}1667$$

Calculando a frequência de oscilação:

$$\omega = 30\sqrt{1 - 0{,}1667^2} = 29{,}5804$$