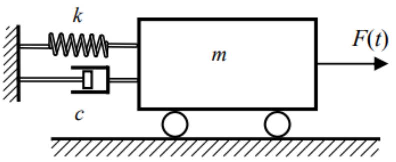
Modelagem de Sistemas Dinâmicos - Lista E

Bruno Nogueira Lucas - 10772668

Exercício:

Obtenha as equações de estado e a função de transferência do seguinte sistema, e simule para uma entrada $F(t)$ do tipo degrau (experimente outros tipos de entrada também), considerando a deformação $x(t)$ da mola como saída:



Simule o sistema para diferentes valores de m, c e k, de tal forma que se tenha uma simulação para cada um dos três casos a seguir: $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$, $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = 1$, $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} > 1$

Para o exercício, temos o espaço de estados:

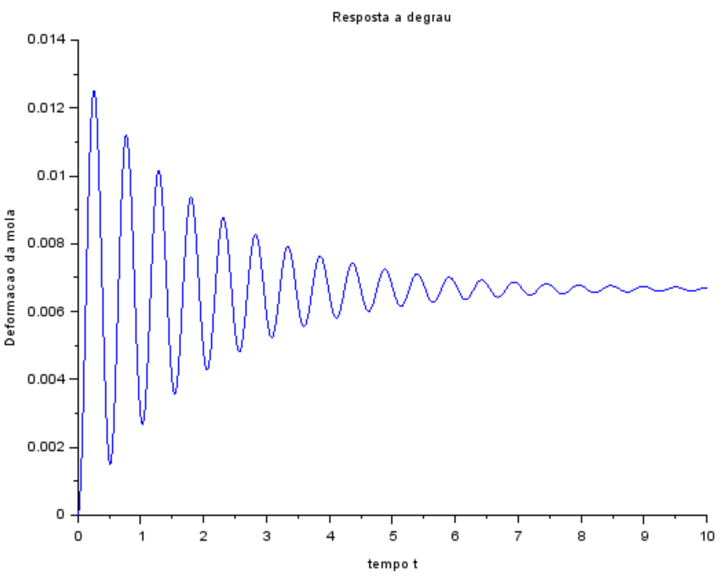
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} F(t)$$

A partir do espaço de estados, temos a função de transferência T(s):

$$T(s) = \frac{\dfrac{1}{m}}{s^2 + \dfrac{c}{m}s + \dfrac{k}{m}} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

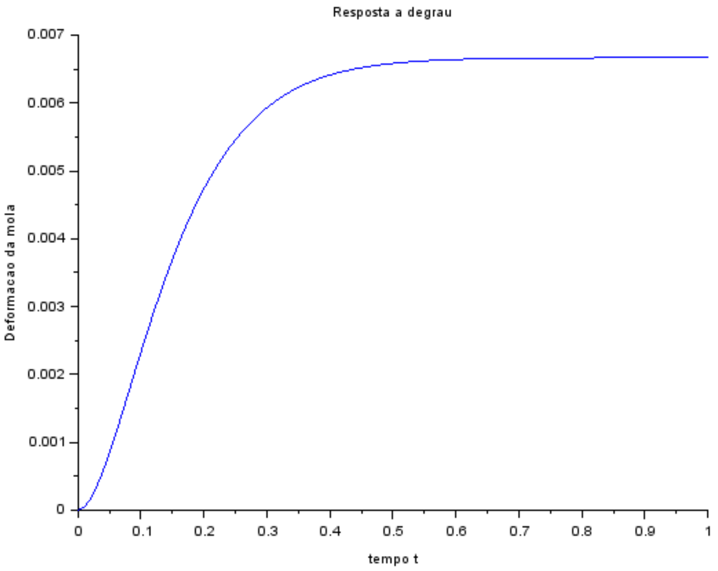
Simulando inicialmente para $\zeta < 1$:

$m = 1;\ k = 150;\ c = 10$



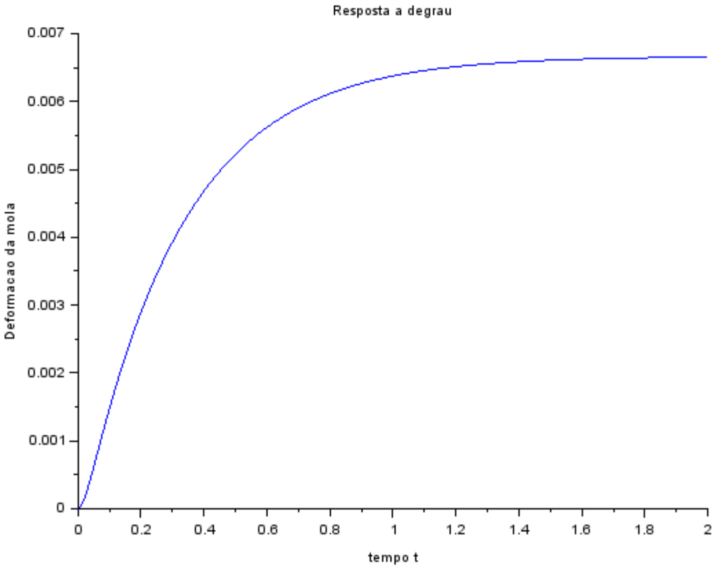
Simulando para $\zeta = 1$:

$m = 1;\ k = 150;\ c = 24{,}5$



Simulando para $\zeta > 1$:

$m = 1;\ k = 150;\ c = 50$



1 – Considerando o exercício anterior, calcule os autovalores da matriz A e calcule as raízes do polinômio no denominador da função de transferência e compare. Estas raízes (e os autovalores) são os pólos do sistema. Para o caso $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$, observe que as raízes (e também os autovalores) são números complexos. Verifique que o módulo deste número complexo é igual à freqüência natural do sistema massa-mola-amortecedor. Verifique ainda que dividindo o módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo se obtém o coeficiente de amortecimento. Observe que a freqüência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do pólo.

Calculando os autovalores de A:

$$det\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Por semelhança com o denominador de T(s):

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Aplicando para o caso específico do exercício, temos, para $\zeta < 1$:

$$s = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4*1*150}}{2*1}$$

$$\boldsymbol{s_1 = -5 + 5\sqrt{5}i;\ s_2 = -5 - 5\sqrt{5}i}$$

Desse modo, temos que $|s| = 12{,}25$

Ao analisarmos a frequência natural w_n, temos:

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{150}{1}} = 12{,}25$$

Assim, para o nosso exercício, podemos concluir que $|s| = w_n = 12{,}25$.

Código utilizado no exercício:

```
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;
c=10;
k=150;
// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -c/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];
// Montando o sistema:
suspensao=syslin('c',A,B,C,D);
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:10;
// Definindo a entrada:
u=ones(t);
// No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
x0e=[0;0]; // neste caso, x1(0)=0 e x2(0)=0
// Alem de calcular a saida y, a função csim também permite obter o estado x:
[y,x]=csim(u,t,suspensao,x0e);
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,y,2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Deformacao da mola')
// Podemos plotar o grafico do estado x2, por exemplo:
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',2)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,x(2,:),2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Velocidade da massa')
```