Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Lista E – PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Turma 1

Professor: Agenor de Toledo Fleury

Aluno: Henrique Silva Barbeta

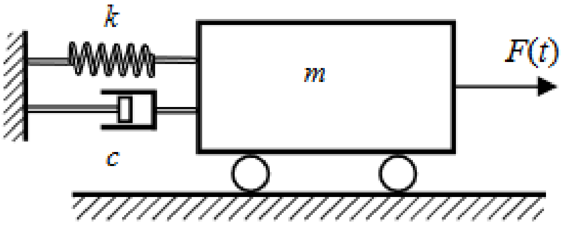
Número USP: 10769323

São Paulo

Sumário

1. EXERCÍCIO – EQUACIONAMENTO E FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Obtenha as equações de estado e a função de transferência do seguinte sistema, e simule para uma entrada F(t) do tipo degrau (experimente outros tipos de entrada também), considerando a deformação x(t) da mola como saída:



Para encontrar a equação diferencial que rege o sistema, será aplicada a segunda Lei de Newton, mostrada a seguir:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{F(t)}{m}$$

Após isso, utiliza-se da "técnica" de espaço de estados, que fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -{}^{k}/_{m} & -{}^{c}/_{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F(t)$$

O passo a seguir é encontrar a função de transferência por meio da transformada de Laplace:

$$\dot{x_1} = x_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} sX_1 - x_1(0) = X_2 \ (1)$$

Após o desenvolvimento e algumas substituições e considerações (como $x_1(0) = x(0) = 0$ e $x_2(0) = \dot{x}(0) = 0$), encontra-se a função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

1.1. Código

Para a realização do código utilizamos do código que será descrito abaixo, com os seguintes parâmetros dados no enunciado:

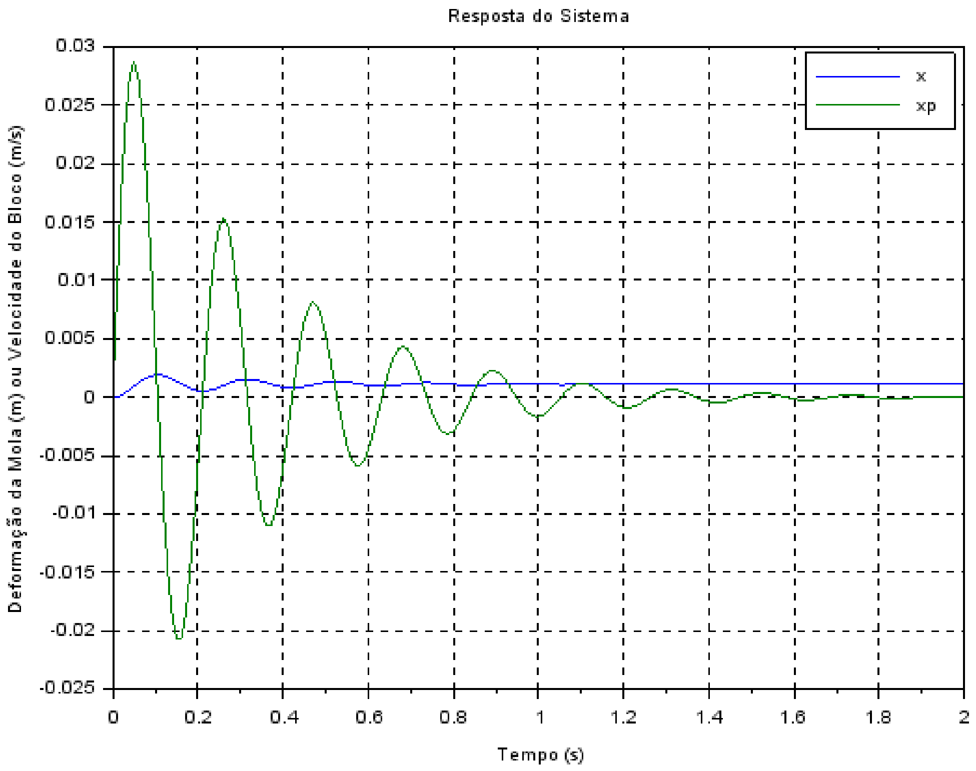
$$\begin{cases} m = 1\ kg; \\ k = 900\frac{N}{m}; \\ \text{c} = 2\zeta\sqrt{km} \end{cases}$$

```
clear all

// Definição dos Parâmetros
m = 1; // [m] = kg
k = 900; // [k] = N/m
zeta = input('Zeta ='); // testar com os três casos (zeta < 1; zeta = 1; zeta > 1)
c = 2 * zeta * sqrt(k/m); // [c] = Ns/m

// Definição do Sistema Linear Usando o Comando "syslin"
A = [0 1; (-k/m) (-c/m)];
B = [0; 1/m];
C = [0 0];
D = [0];
MassaMolaAmortecedor = syslin('c', A, B, C, D);

// Definição do Vetor de Tempo
t = 0:0.01:2;
// Definição da Condição Inicial
x0 = [0; 0];
// Definição da Entrada
u = ones (2*t);
// Realização da Simulação com o Comando "csim"
[y,x] = csim(u, t, MassaMolaAmortecedor, x0);

f1 = scf(1);
plot(t,x);
h1 = legend(['x','xp']);
xtitle('Resposta do Sistema','Tempo (s)','Deformação da Mola (m) ou Velocidade do Bloco (m/s)');
xgrid;
```

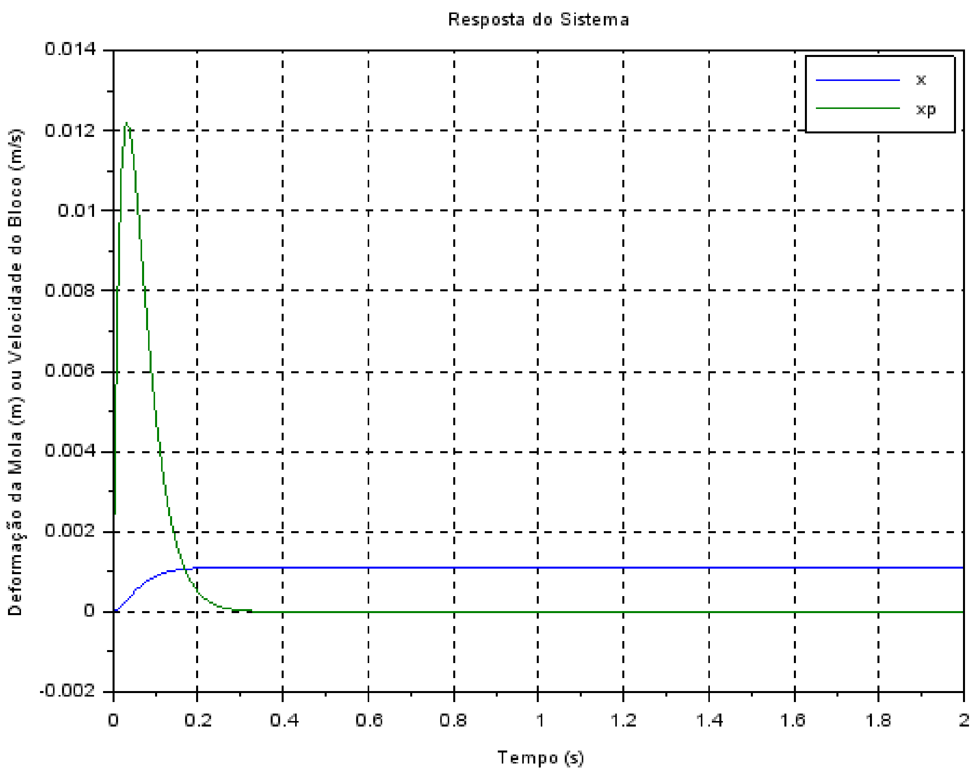
1.2. Resultados

É pedido que faça a simulação para três casos diferentes de ζ , que serão mostrados, abaixo:

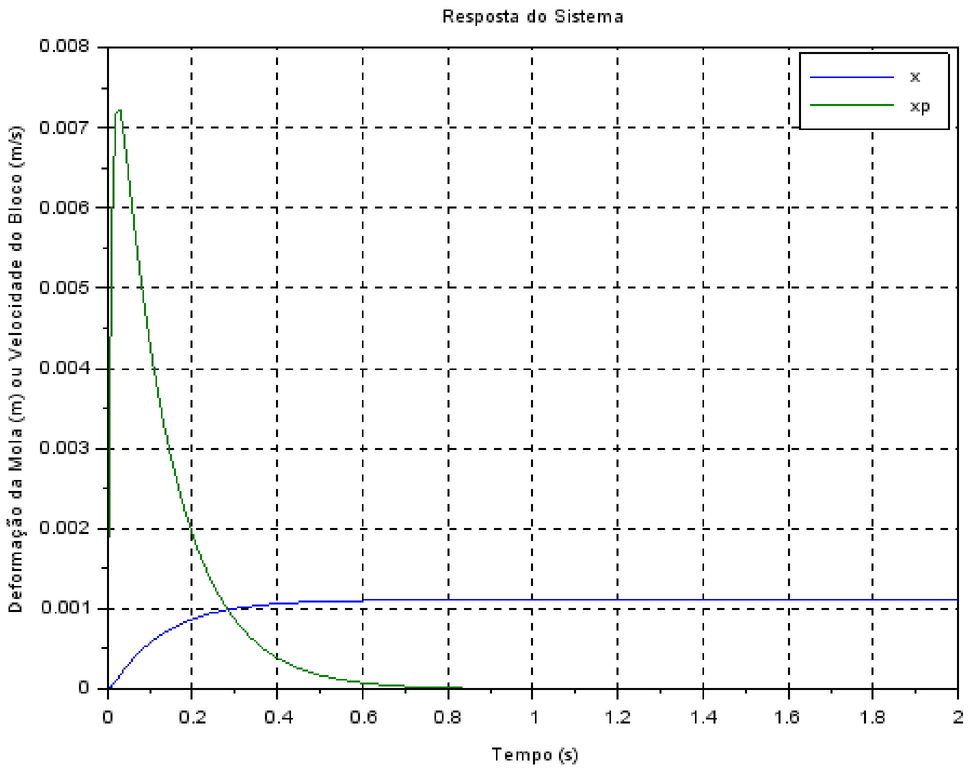
- $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} < 1 \Longrightarrow \zeta = 0{,}1$



- $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 1$



- $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} > 1 \Longrightarrow \zeta = 2$



2. Lição 1 – Autovalores de A e Raízes de G(s)

Para conseguirmos calcular os autovalores de A (matriz), é necessário realizar o seguinte procedimento:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -{}^{k}/_{m} & -{}^{c}/_{m} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda({}^{c}/_{m} + \lambda) + {}^{k}/_{m} = 0 \implies \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Chega-se então em: $\begin{cases} \lambda_1 = -3 + 9\sqrt{11}i \\ \lambda_2 = -3 - 9\sqrt{11}i \end{cases}$, onde foram utilizados $m = 1kg, k = 900N/m$ e $\zeta = 0{,}1$.

É verificado que o módulo dos autovalores é igual a frequência natural do sistema massa-mola-amortecedor: $\omega = |\lambda_1| = |\lambda_2| = 30$.

3. Lição 2 – Simulação para Cenários Diversos

É simulado o exercício para as condições iniciais abaixo:

$$x(0) = [-10, -7.5, -5, -2.5, -1, 1, 2.5, 5, 7.5, 10]$$

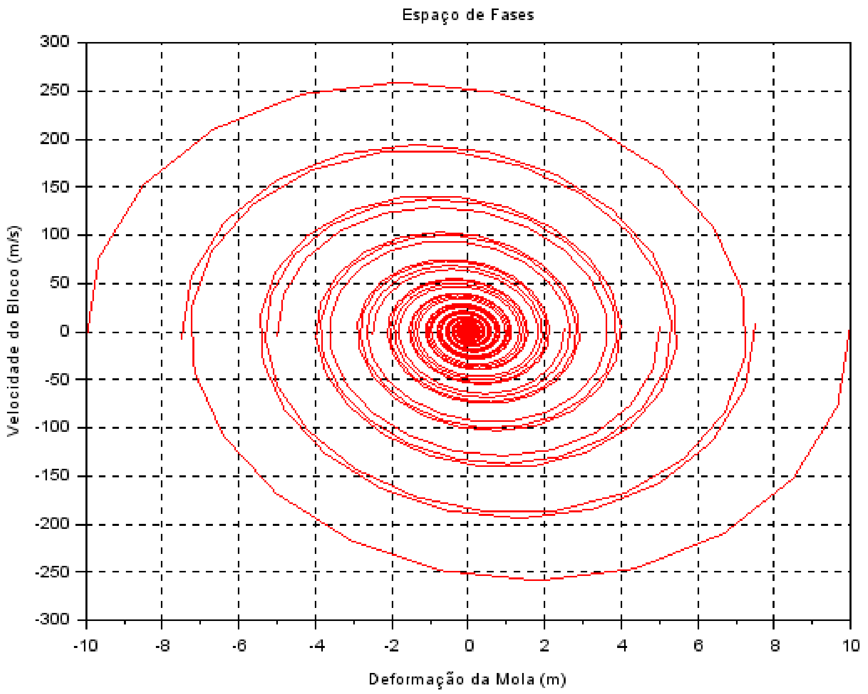
$$\dot{x}(0) = [-10, -7.5, -5, -2.5, -1, 1, 2.5, 5, 7.5, 10]$$

3.1. Código

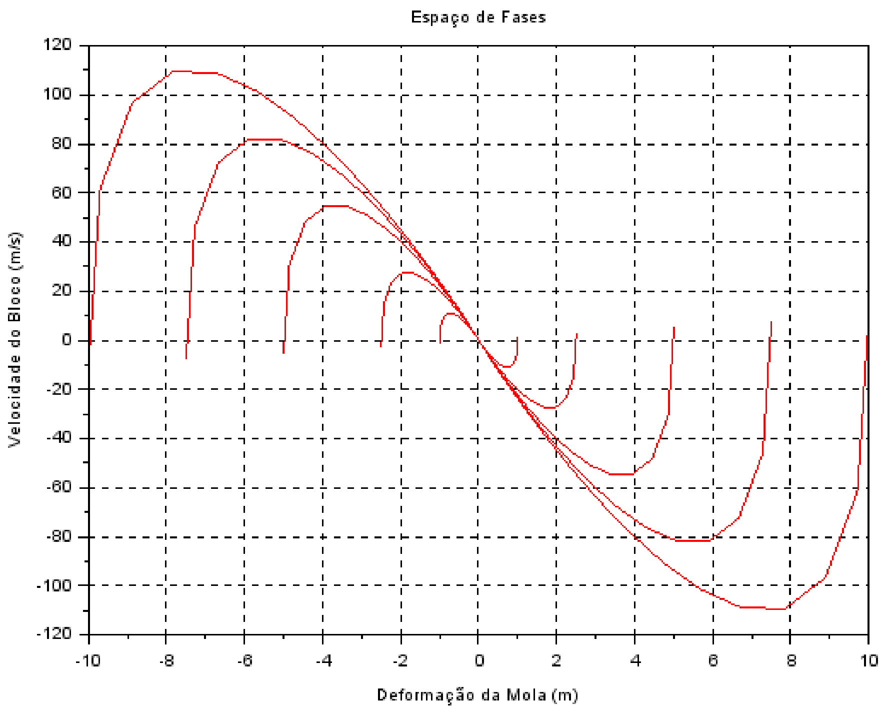
```
clear all
// Definição dos Parâmetros
m = 1; // [m] = kg
k = 900; // [k] = N/m
zeta = input('Zeta ='); // testar com os três casos (zeta < 1; zeta = 1; zeta > 1)
c = 2 * zeta * sqrt(k/m); // [c] = Ns/m
// Definição do Vetor de Tempo
t = 0:0.01:2;
// Definição da Condição Inicial
x0 = [-10, -7.5, -5, -2.5, -1, 1, 2.5, 5, 7.5, 10];
xp0 = [-10, -7.5, -5, -2.5, -1, 1, 2.5, 5, 7.5, 10];
// Integração Numérica
funcprot(0)
 function dy=MassaMolaAmortecedor(t, y)
 dy(1) = y(2);
 dy(2) = -(k/m)*y(1) - (c/m)*y(2);
 endfunction
for i = 1:10
 y = ode([x0(i);xp0(i)],0,t,MassaMolaAmortecedor);
 for j=1:length(t)
 x(i,j) = y(1,j);
 xp(i,j) = y(2,j);
 end
end
//Plotagem
scf(1);
xtitle("Espaço de Fases");
xlabel("Deformação da Mola (m)");
ylabel(" Velocidade do Bloco (m/s)");
for i = 1:length(x0)
 plot(x(i,:),xp(i,:),'r');
end
xgrid
```

3.2. Resultados

Para $\zeta = 0{,}1$ temos:



Para $\zeta = 1$ temos:



Para $\zeta = 2$ temos: