Lucas Nigro Matheo - 10772911

PME 3380 - MODELAGEM DE SISTEMAS DINÂMICOS

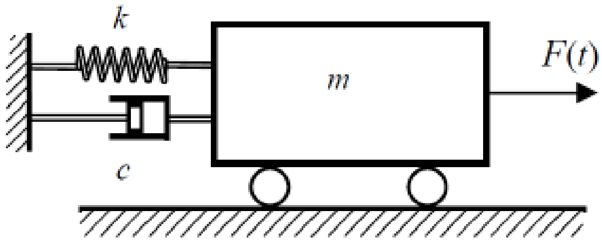
Lista de Exercícios 5 - Sistema massa-mola-amortecedor

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

São Paulo, 2020

1. Exercício

Obtenha as equações de estado e a função de transferência do seguinte sistema e simule para uma entrada $F(t)$ do tipo degrau (experimente outros tipos de entrada também), considerando a deformação $x(t)$ da mola como saída.



Simule o sistema para diferentes valores de m, c e k, de tal forma que se obtenha uma simulação para cada um dos três casos a seguir:

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1, \qquad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = 1, \qquad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} > 1$$

O exercício solicita obter a deformação da mola $x(t)$ dado $F(t)$. No caso estudado, a deformação será igual à posição do corpo de massa m, uma vez que a extremidade da mola está presa na parede fixa.

Aplicando TMB em x, obtemos:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

$$\ddot{x} = \frac{F(t)}{m} - \frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

Trata-se, portanto, de uma equação de ordem 2 e podemos escrevê-la em termos de Espaço de Estados. Definindo $x1 = posição$, e $x2 = velocidade$ e $u = F(t)$:

$$W = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x1} = x2 = f1 \\ \dot{x2} = \dfrac{F(t)}{m} - \dfrac{b}{m}x2 - \dfrac{k}{m}x1 = f2 \end{cases}$$

Escrevendo na notação matricial, a Matriz Jacobiana $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{eq}$ e a Matriz de Entrada $\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{eq}$ serão, respectivamente:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{eq} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

Assim, na notação matricial teremos:

$$\dot{\mathrm{W}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathrm{x}} \\ \ddot{\mathrm{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t)$$

A função de transferência $G(s)$ foi obtida para as condições iniciais nulas $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ usando as transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}1: sX1 = X2$$

$$\mathcal{L}2: sX2 = \frac{f}{m} - \frac{b}{m}X2 - \frac{k}{m}X1$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

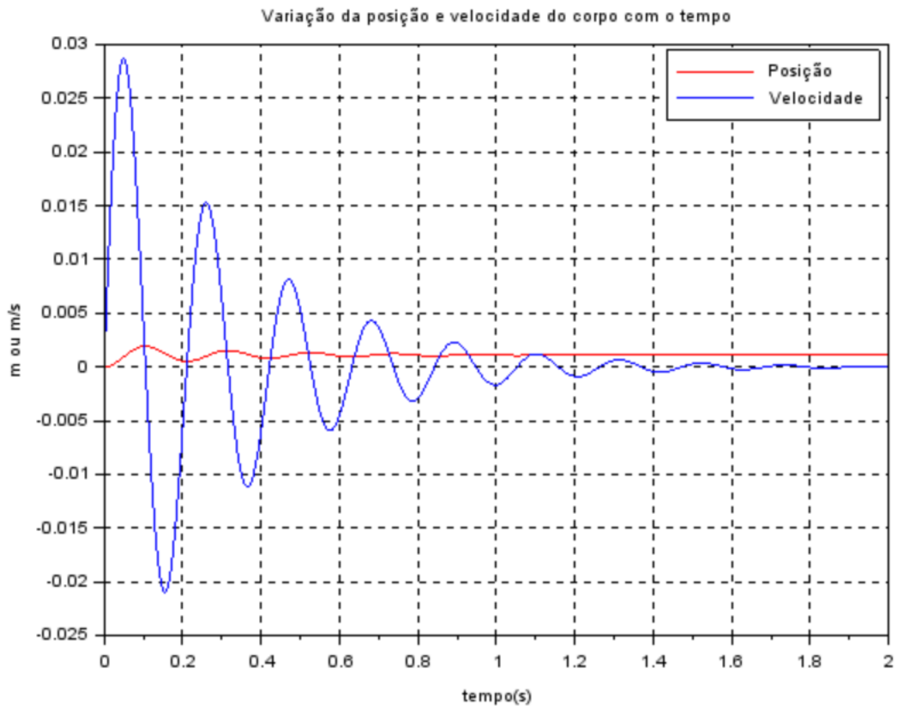
2. Resultados Gráficos

Para a obtenção dos resultados gráficos, foi desenvolvido um programa no software scilab de solução numérica para obtenção dos gráficos de x e $\dot{x}$ em um intervalo de tempo de 2 segundos.

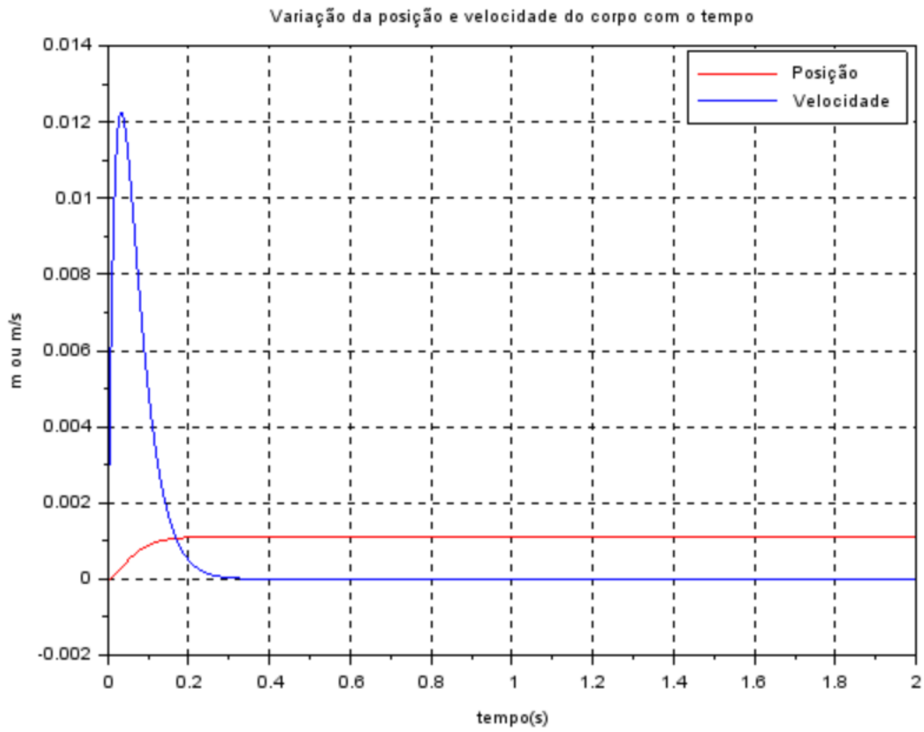
Foi realizada a simulação para m = 1kg e k = 900N/m (igual no exemplo da lista), variando o valor de ξ.

Optou-se por realizar a abordagem de Espaço de Estados com as Matrizes ao realizar a integração numérica.

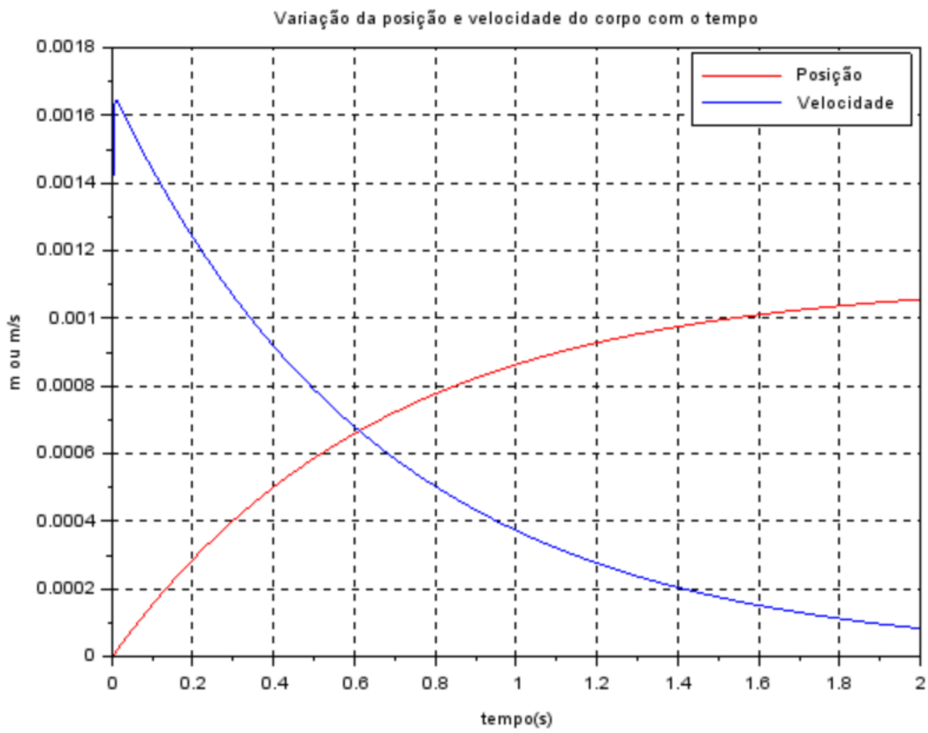
Caso 1: $\xi = 0{,}1$



Caso 2: $\xi = 1$



Caso 3: $\xi = 10$



3. Autovalores da Matriz

Como se sabe, é possível calcular os autovalores de uma matriz aplicando:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \text{ , onde } I \text{ é a matriz identidade}$$

Aplicando esse conceito na Matriz Jacobiana do sistema demonstrado no tópico 1, obtemos a seguinte equação característica:

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

Resolvendo a equação com os parâmetros do tópico 2 (m = 1kg e k = 900N/m) e $\xi = 0.1$, obtemos as seguintes raízes:

$$\lambda 1 = -3 + 9\sqrt{11}i$$
$$\lambda 2 = -3 - 9\sqrt{11}i$$

Já é possível perceber que as raízes da função de transferência são as mesmas da equação característica obtida acima, uma vez que o denominador de $G(s)$ apresenta equação igual à equação característica.

Outro resultado interessante é a divisão do módulo da parcela real de λ pelo seu módulo, resultando:

$$\frac{|Re(\lambda)|}{|y|} = \frac{3}{30} = 0.1$$

Também percebe-se que a norma dos polos do sistema analisado é igual à frequência natural do sistema. Isso pode ser comprovado por:

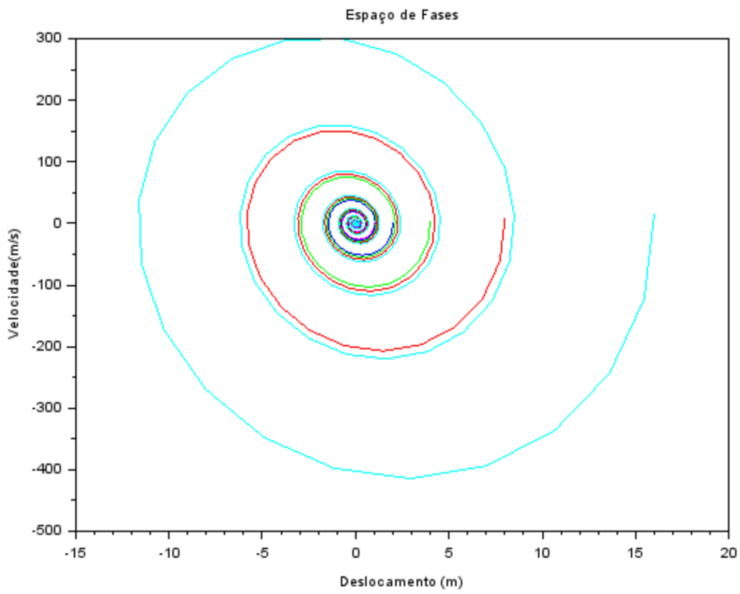
$$|\lambda| = \sqrt{9 + 81.11} = 30\, rad/s$$
$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{900}{1}} = 30\, rad/s$$

4. Análise para diversas condições iniciais

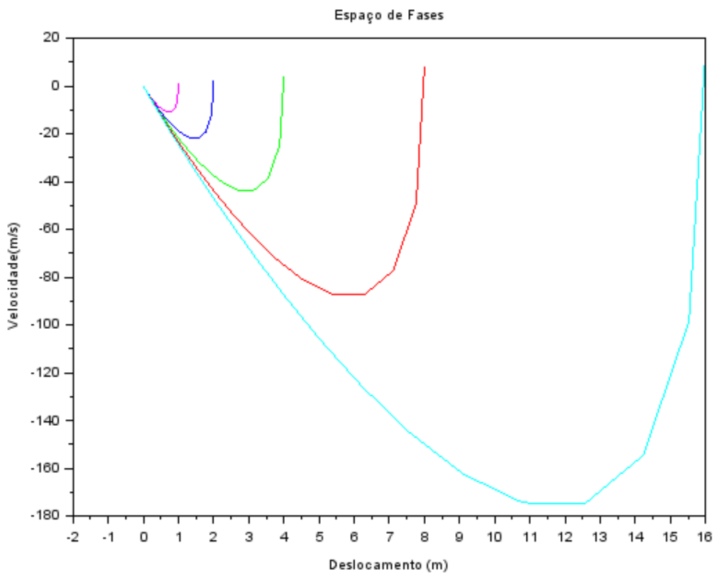
Nessa abordagem, fez-se a simulação para conjuntos distintos de parâmetros durante 60 segundos. No tópico 2 analisamos as posições e velocidades no tempo. Neste, buscaremos analisar o espaço de fases para diversas condições iniciais de posição e velocidade e com ξ variado. As condições escolhidas foram:

X0 = [1, 2, 4, 8, 16] m
Xp0 = [1, 2, 4, 8, 16] m/s

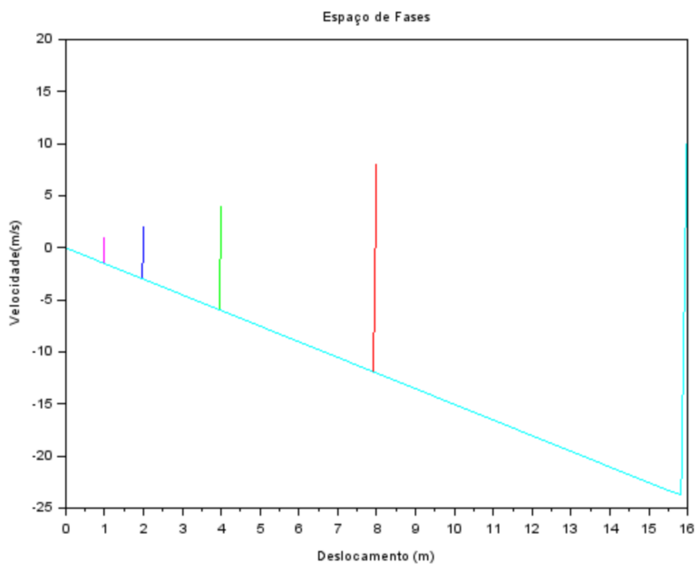
Caso 1: $\xi = 0.1$



Caso 2: $\xi = 1$


Espaço de Fases
Velocidade(m/s)
Deslocamento (m)

Caso 3: $\xi = 10$


Espaço de Fases
Velocidade(m/s)
Deslocamento (m)

ANEXO: PROGRAMAS

TÓPICO 2

```
//Lucas Nigro Matheo 22/10/2020  10772911

clear all

k=900;
m= 1;
Ccrit =10
b=2*Ccrit*sqrt(k*m);
A=[0 1 ; -k/m -b /m] ;
B=[ 0; 1 /m] ;
Massamolaamortecedor=syslin("c",A,B,C,D);
t = 0:0.001 :2;
u=ones(2*t);
xoeq = [0;0];
// simulacao para o intervalo de tempo de 2 segundos
[y,x]=csim (u,t,Massamolaamortecedor,xoeq);

posicao= x(1,:);
velocidade= x(2,:);

f1=scf(1);
plot(t,posicao,'r');
plot(t,velocidade, 'b');
legend(["Posição" , "Velocidade"])
xtitle("Variação da posição e velocidade do corpo com o tempo" , "tempo(s)" , "m ou m/s ") ;
xgrid
```

TÓPICO 4

```
clear all

k=900;
m= 1;
Ccrit =0.1;
b=2*Ccrit*sqrt(k*m);
posinicial = [1 2 4 8 16];
velinicial = [1 2 4 8 16];
funcprot(0)
function dy=massamolaamortecedor(t, y)
dy(1) = y(2);
dy(2) = -(k/m)*y(1) - (b/m)*y(2);
endfunction
// solucoes do sistema massa mola
for i = 1:length(posinicial)
solution = ode([posinicial(i);velinicial(i)],0,t,massamolaamortecedor);
for j = 1:length(t)
x(i,j) = solution(1,j);
xp(i,j) = solution(2,j);
end
end

scf(1);
colors = ["m","b","g","r","c"];
xtitle("Espaço de Fases");
xlabel("Deslocamento (m)");
ylabel("Velocidade(m/s)");
for i = 1:length(posinicial)
plot(x(i,:),xp(i,:),colors(i));
end
```