

Alessandra da Cruz Nunes de Moraes
10337209

PME3380 - Modelagens de Sistemas Dinâmicos
Lista E

São Paulo

2020

Alessandra da Cruz Nunes de Moraes
10337209

PME3380 - Modelagens de Sistemas Dinâmicos
Lista E

Resolução da lista de exercícios E da disciplina Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Universidade de São Paulo

Escola Politécnica

Orientador: Prof.Dr.Décio Crisol Donha
Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

São Paulo

2020

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo	4
Figura 2 – Espaço de estados do exemplo	4
Figura 3 – Função de Transferência do Exemplo	4
Figura 4 – Enunciado Exercício 1	5
Figura 5 – Casos para o Exercício 1	5
Figura 6 – Zeta = 0,17	6
Figura 7 – Zeta = 1	6
Figura 8 – Zeta = 2,17	7
Figura 9 – scale=0.75	9
Figura 10 – Segunda Figura	10
Figura 11 – Terceira Figura	11
Figura 12 – Lugar Geométrico dos Pólos no Plano Complexo	12

Sumário

1	EXEMPLO	4
2	EXERCÍCIO 1	5
3	EXERCÍCIO 2	8
3.1	Primeira Figura	8
3.2	Segunda Figura	9
3.3	Terceira Figura	10
3.4	Lugar Geométrico dos Pólos no Plano Complexo	11

1 Exemplo

O exemplo envolve a análise da suspensão de um carro, como na figura abaixo.

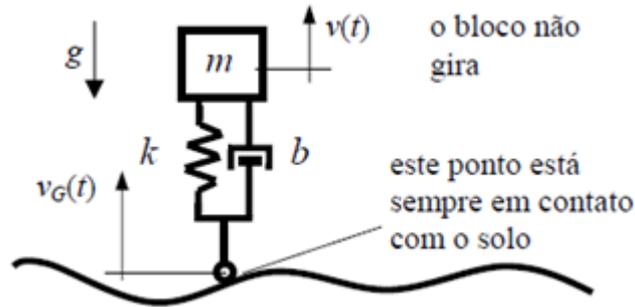


Figura 1 – Exemplo

Que pode ser descrito pelo seguinte espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = +0x_1 + 1x_2 - 1u \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{b}{m}u \\ y = +1x_1 + 0x_2 + 0u \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{b}{m} \end{bmatrix}}_B u$$

$$\underline{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D u$$

Figura 2 – Espaço de estados do exemplo

Assim, temos a seguinte função de transferência $G(s)$, que é a relação entre a transformada de Laplace da saída y e a transformada de Laplace da entrada u , considerando condições iniciais nulas.

$$Y = \frac{-ms}{ms^2 + bs + k} U \Rightarrow Y = G(s)U$$

$$G(s) = \frac{Y}{U} \Rightarrow G(s) = \frac{-ms}{ms^2 + bs + k}$$

Figura 3 – Função de Transferência do Exemplo

2 Exercício 1

O exercício pede as equações de estado e a função de transferência do seguinte sistema, e a simulação para uma entrada $F(t)$ do tipo degrau (experimentando outros tipos de entrada também), considerando a deformação $x(t)$ da mola como saída:

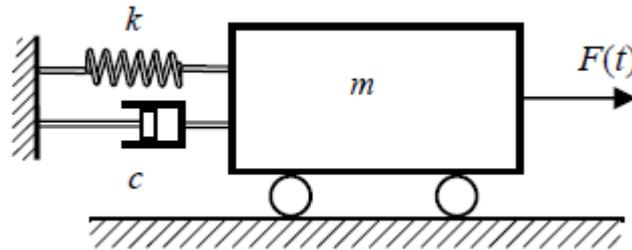


Figura 4 – Enunciado Exercício 1

Simulando o sistema para diferentes valores de m , c e k , de tal forma que se tenha uma simulação para cada um dos três casos a seguir:

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1,$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = 1,$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} > 1$$

Figura 5 – Casos para o Exercício 1

Considerando o exercício anterior, o exercício pede também o cálculo dos autovalores da matriz A e das raízes do polinômio no denominador da função de transferência. Estas raízes (e os autovalores) são os pólos do sistema. Para o caso 1, observe que as raízes (e também os autovalores) são números complexos. Verifique que o módulo deste número complexo é igual à frequência natural do sistema massa-mola-amortecedor. Verifique ainda que dividindo o módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo se obtém o coeficiente de amortecimento. Observe que a frequência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do pólo.

Portanto para $Zeta = 0,17$, teremos:

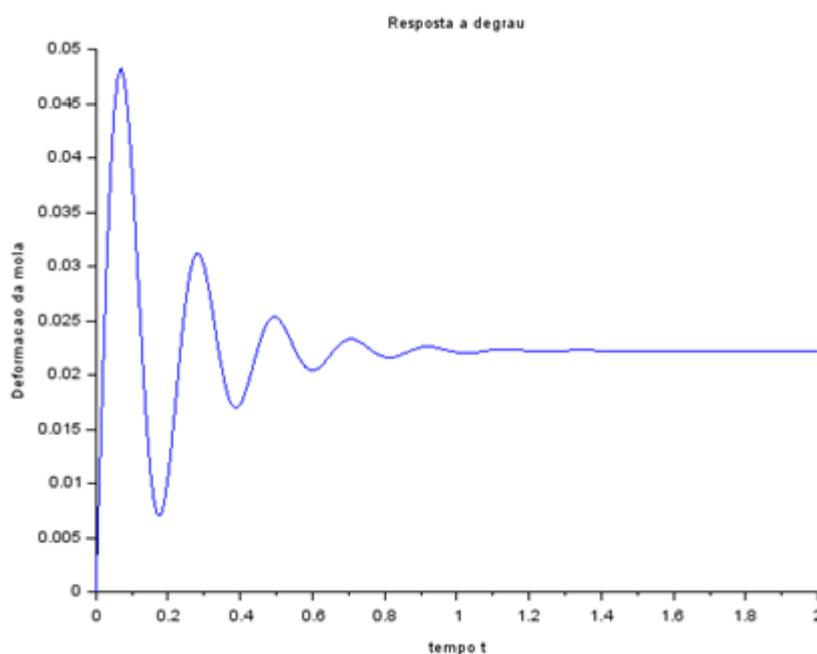


Figura 6 – Zeta = 0,17

Através do gráfico é possível perceber o comportamento subcrítico do sistema. Já para Zeta = 1, temos:

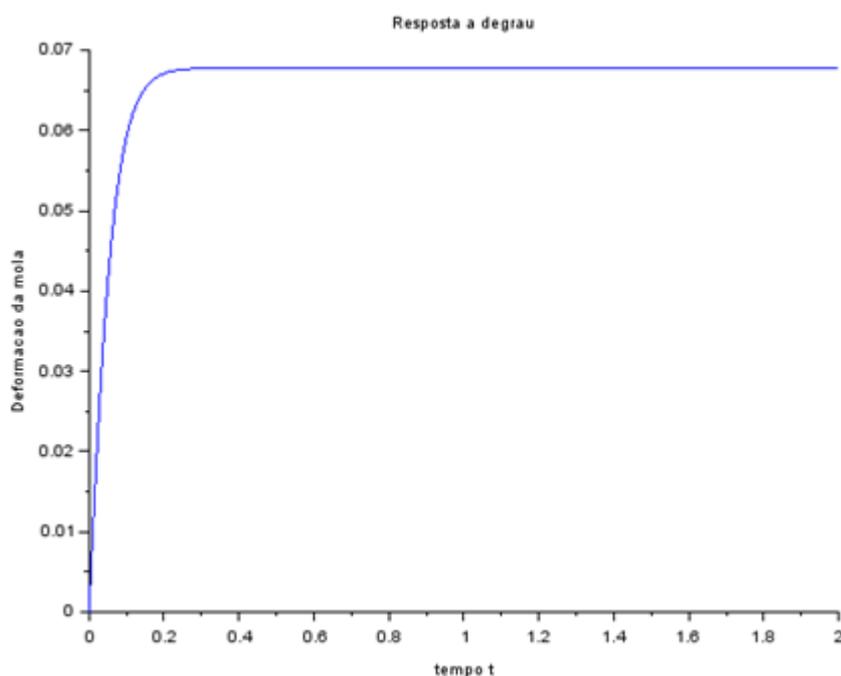


Figura 7 – Zeta = 1

O que nos fornece um sistema com amortecimento crítico. E, finalmente, para Zeta = 2,17 > 1, temos:

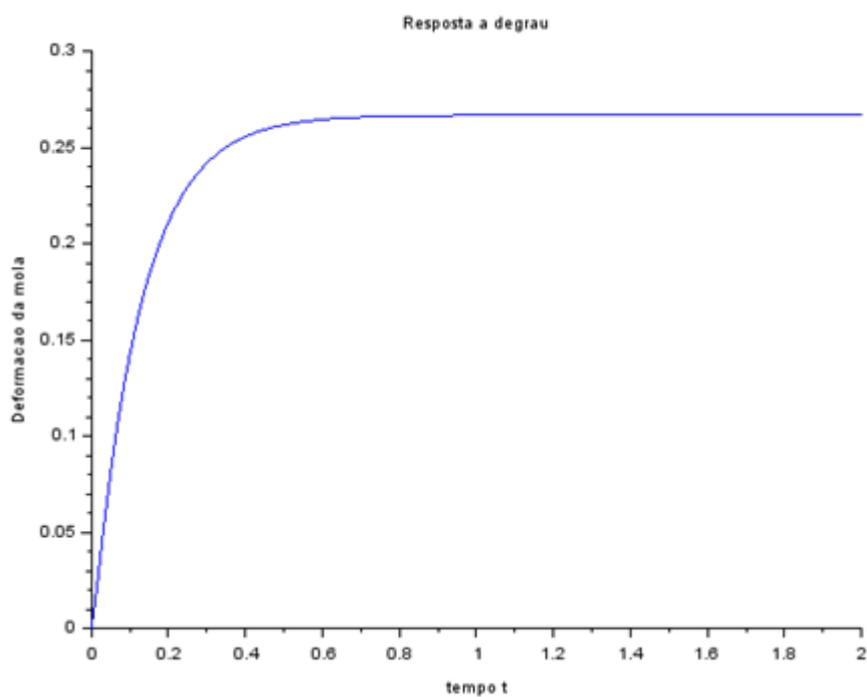


Figura 8 – Zeta = 2,17

O sistema é supercrítico.

3 Exercício 2

Simule o sistema do exercício para entrada nula e diferentes condições iniciais não nulas. Mostre o gráfico de v por x , e experimente mudar os parâmetros do sistema, tal que se obtenha 3 situações diferentes: pólos complexos, pólos reais e iguais, e pólos reais e distintos. O resultado pretendido são três figuras. Na primeira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam complexos. Na segunda figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e iguais. Na terceira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e distintos. Para cada figura construa outra figura mostrando os pólos correspondentes no plano complexo. Observe a ligação entre o comportamento transitório e a posição dos pólos no plano complexo.

3.1 Primeira Figura

Entrada nula, pólos complexos, diversas condições iniciais:

Parâmetros: $m=1$; $c=10$; $k=900$; $Zeta < 1$

Legenda: Preto: $x_0 = 1$; $v_0 = 0$. Azul : $x_0 = 0$; $v_0 = 15$. Verde : $x_0 = 0$; $v_0 = 10$

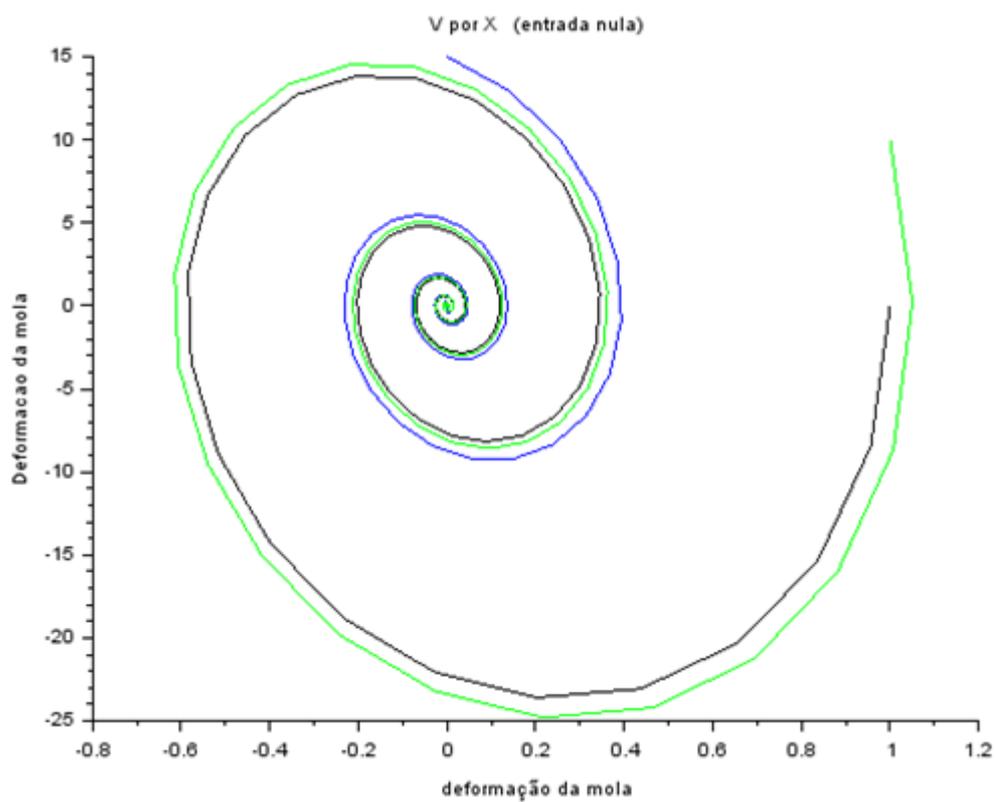


Figura 9 – Primeira Figura

3.2 Segunda Figura

Entrada nula, pólos reais e iguais, diversas condições iniciais:

Parâmetros: $m=1$; $c=60$; $k=900$; $Zeta=1$

Legenda: Preto: $x_0 = 1$; $v_0 = 0$. Azul : $x_0 = 0$; $v_0 = 15$. Verde : $x_0 = 0$; $v_0 = 10$.

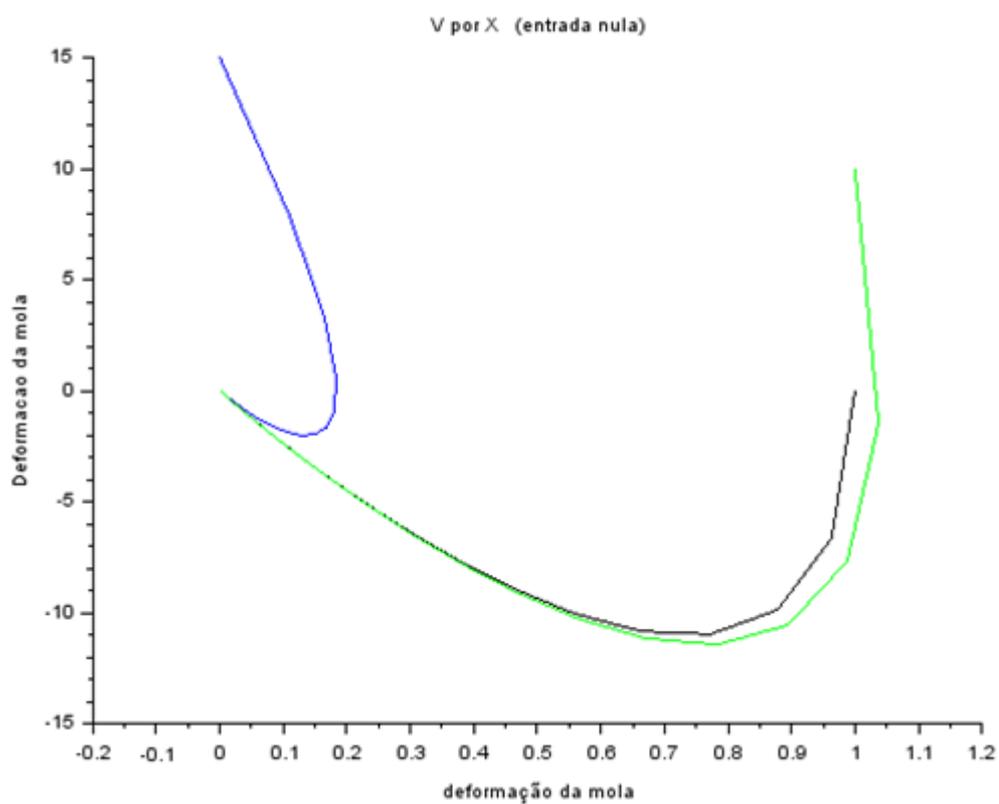


Figura 10 – Segunda Figura

3.3 Terceira Figura

Entrada nula, pólos reais e distintos, diversas condições iniciais:

Parâmetros: $m=1$; $c=120$; $k=900$; $Zeta>1$

Legenda: Preto: $x_0 = 1; v_0 = 0$. Azul : $x_0 = 0; v_0 = 15$. Verde : $x_0 = 0; v_0 = 10$

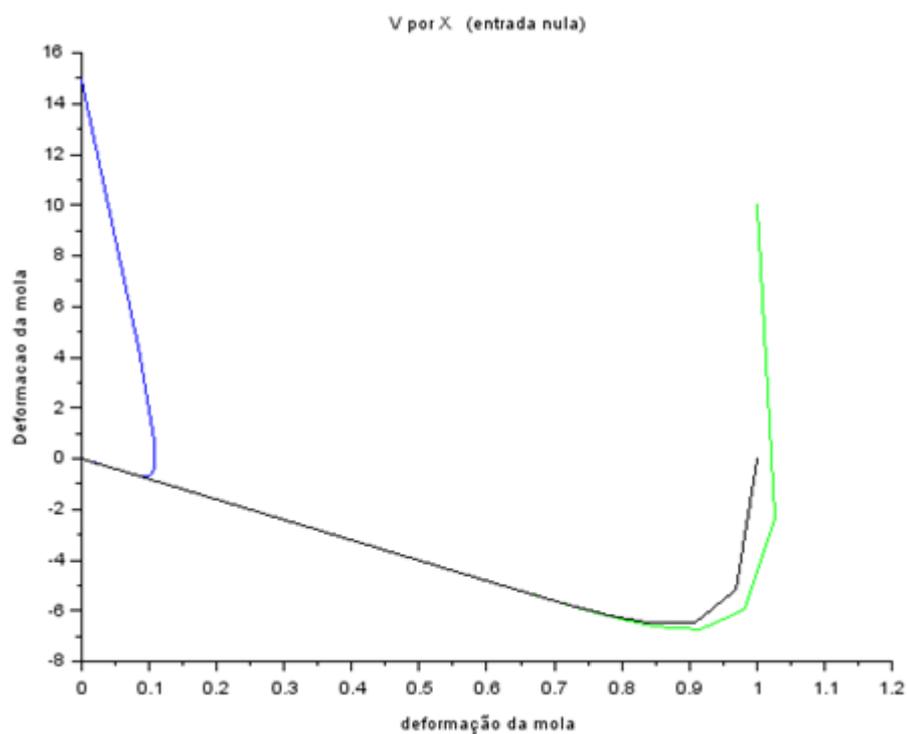


Figura 11 – Terceira Figura

3.4 Lugar Geométrico dos Pólos no Plano Complexo

Preto – zeta < 1 Azul – zeta = 1 Verde – zeta > 1

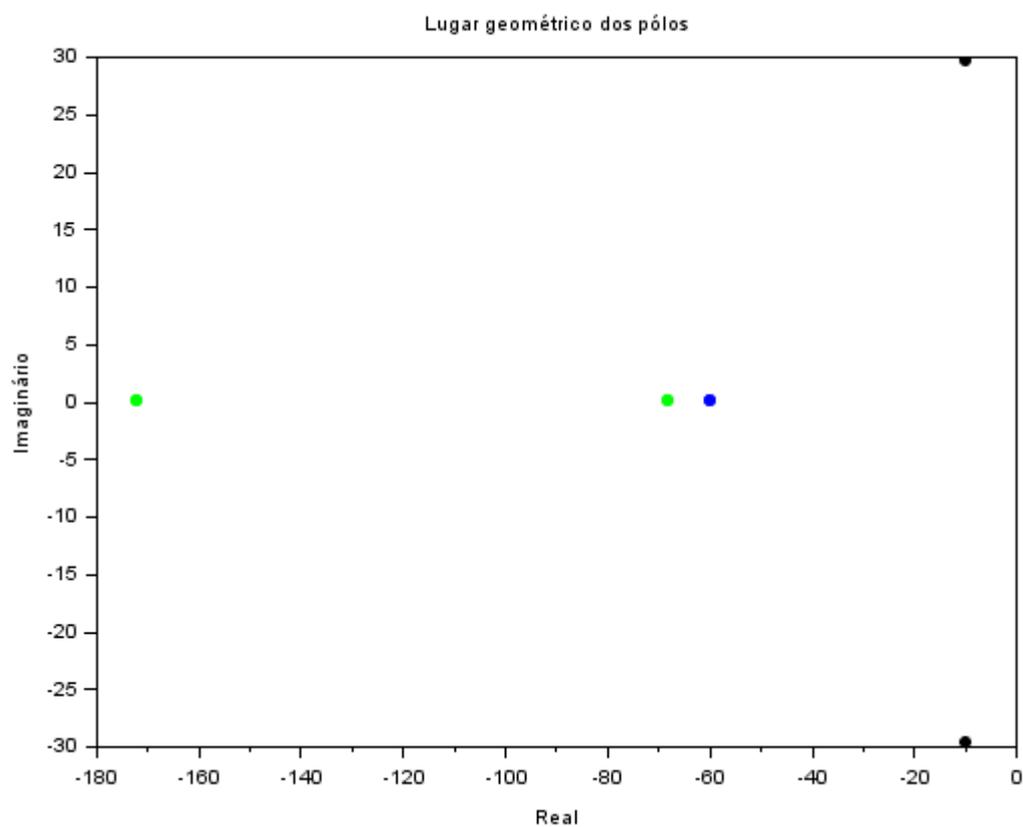


Figura 12 – Lugar Geométrico dos Pólos no Plano Complexo

Através da análise dos lugares geométricos dos pólos no plano complexo, percebe-se que sua posição não depende das condições iniciais, mas sim dos parâmetros pré-estabelecidos. Portanto, os pólos não sofrem influência do comportamento transitório do sistema.