PME 3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos
Lista E

Luis Palharini - 10773203

23 de outubro de 2020

1 Exercício 1

Inicialmente, analisa-se o sistema dinâmico destacado pela Figura 1.

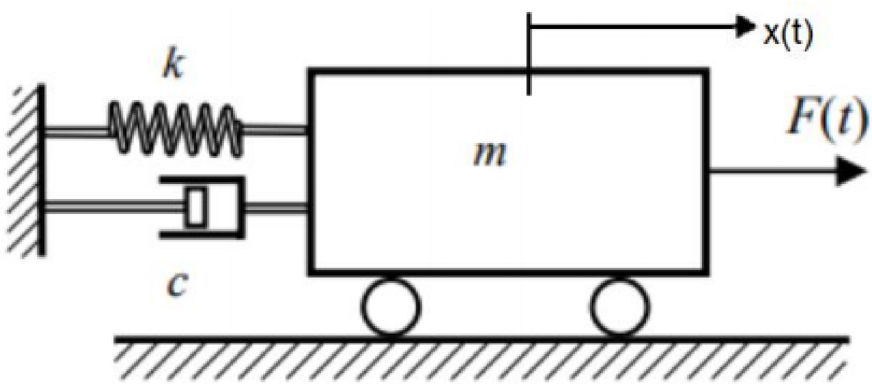

Figura 1: Sistema massa, mola e amortecedor

Ao aplicar a 2ª lei de Newton, obtém-se uma Equação 1 que relaciona os estados x, $\dot{x}$ e $\ddot{x}$. Em seguida, transforma-se esta equação em uma equação matricial 2 com vetores de estados:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + bx = F(t) \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + F(t) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Para calcular os autovalores λ da matriz A principal, basta calcular o determinante de $A - \lambda \cdot I$.

$$det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{3}$$

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{4}$$

Em seguida, deseja-se calcular as raízes do polinômio no denominador da função de transferência $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{5}$$

$$ms^2 + cs + k = 0 \tag{6}$$

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{7}$$

Verifica-se assim que os autovalores λ são iguais às raízes da função $G(s)$. O resultado já esperado demonstra a independência entre o resultado obtido e método utilizado. Agora, volta-se a atenção para o caso específico em que $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$. Neste caso, é fácil observar que as raízes λ_1 e λ_2 serão complexas.

Para obter-se a equação de $x(t)$, pode-se utilizar as raízes como coeficientes da função exponencial, conforme demostra a equação 8. Em seguida, aplicando as relações de 9, chega-se finalmente no resultado da equação 10

$$x(t) = A \cdot^{t+\lambda_1} + B \cdot e^{t+\lambda_2} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \epsilon = \frac{c}{2\sqrt{km}} \end{cases} \tag{9}$$

$$x(t) = e^{-\epsilon\omega t} \cdot \left(A \cdot e^{i\omega t\sqrt{1-\epsilon^2}} + B \cdot e^{-i\omega t\sqrt{1-\epsilon^2}} \right) \tag{10}$$

2 Exercício 2

A partir do resultado obtido no exercício anterior, pode-se aplicar uma simulação numérica para averiguar os resultados. Os parâmetros utilizados estão presentes na equação 11. Como a simulação tem comportamentos consideravelmente distintos para certos fatores de amortecimentos, realiza-se 3 testes, sendo cada qual com $\zeta < 1$ e polos complexos (Figura 2), $\zeta = 1$ e polos iguais (Figura 3) e $\zeta > 1$ e polos distintos (Figura 4.

$$\begin{cases} m = 2kg \\ k = 450kg \\ x(t=0) = 5m \\ \dot{x}(t=0) = 5m/s \\ c(\zeta < 1) = 30N \cdot s/m \\ c(\zeta = 1) = 60N \cdot s/m \\ c(\zeta > 1) = 90N \cdot s/m \end{cases} \tag{11}$$

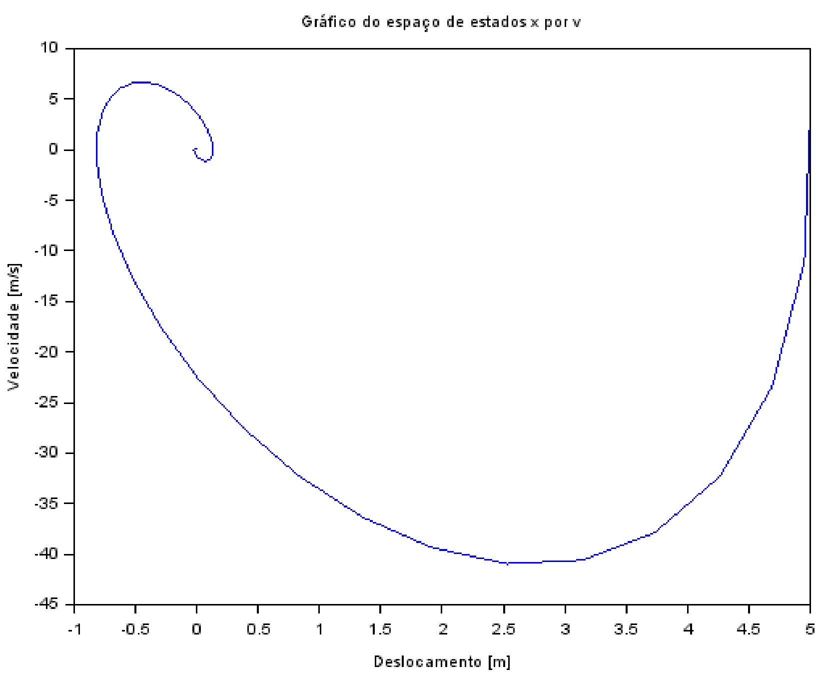

Figura 2: Resultado para $\zeta < 1$

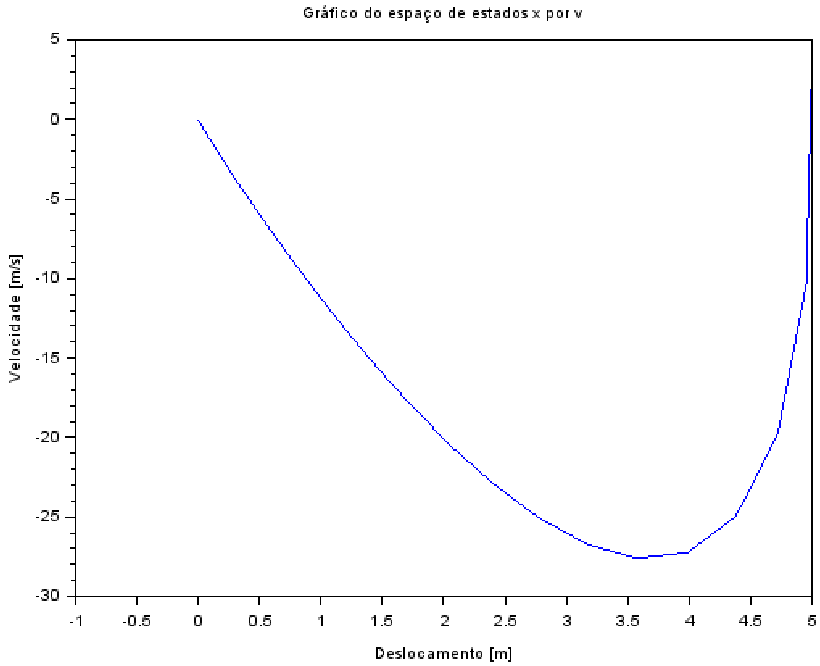

Figura 3: Resultado para $\zeta = 1$

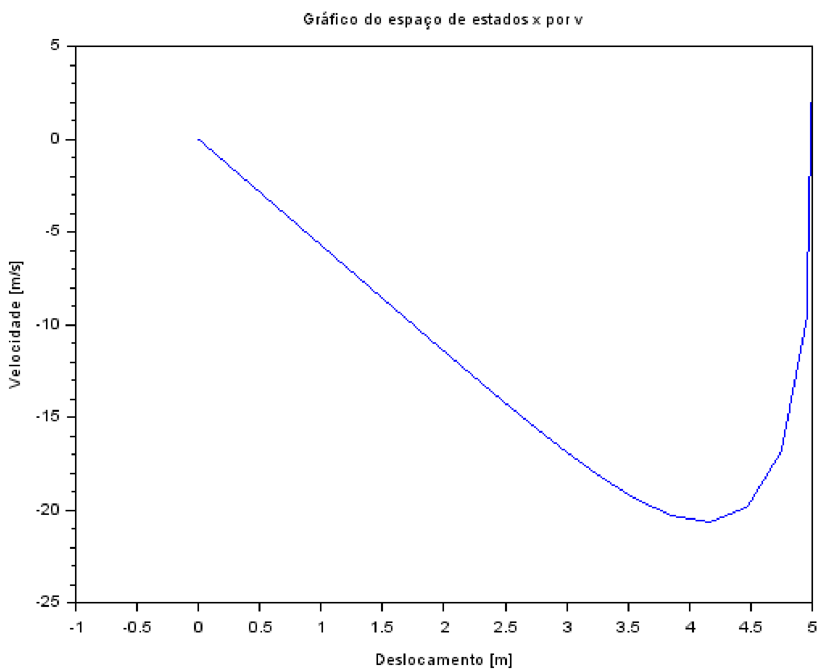

Figura 4: Resultado para $\zeta > 1$