PME 3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Ítalo Gonçalves Sant’ana Paiva - NUSP: 10853310

LISTA E

Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

São Paulo

2020

ANÁLISE TRANSITÓRIA NO SCILAB

O objetivo aqui é observar o comportamento do sistema ao decorrer do tempo, em especial, a parcela transitória. A simulação numérica do modelo matemático, ou seja, fazer a integração numérica das equações diferenciais que representam o comportamento do sistema permite que sejam realizadas análises. Nesse sentido, foi gerada a seguir em Scilab para as seguintes condições iniciais: m=1; b=10; k=900.

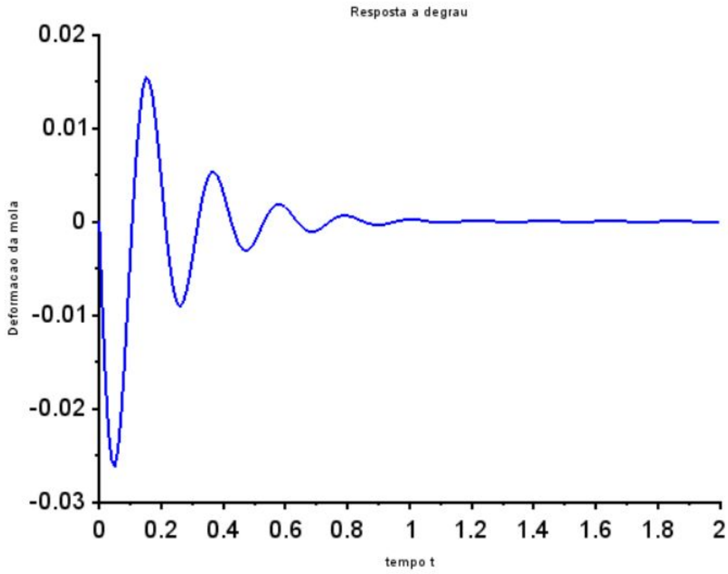


Figura 1: Deformação da mola no tempo

Além disso, a simulação pode ser feita usando o sistema de espaço de estados. Com isso, foi elaborado com os mesmo parâmetros anteriores um gráfico de velocidade da mola em respeito ao tempo, na figura a seguir, além do gráfico de resposta ao degrau da deformação da mola.

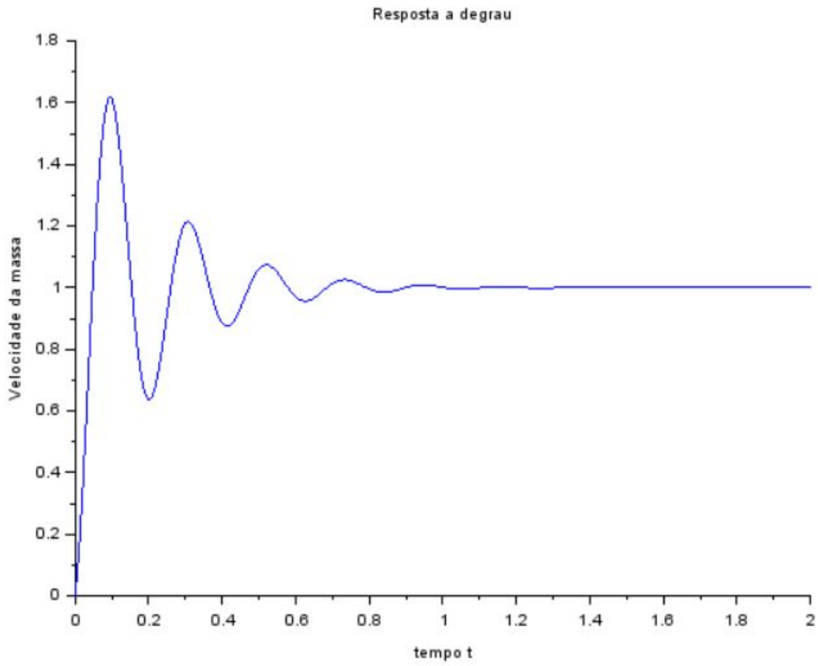
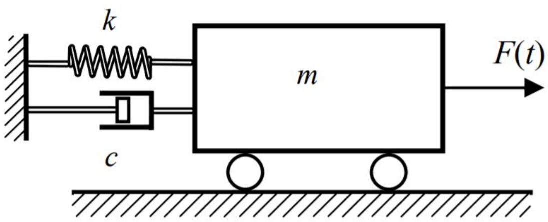


Figura 2: Velocidade da mola

EXERCÍCIO:

1 - Inicialmente, é preciso escrever as equações que regem o movimento para analisar o problema.



Após aplicar o Teorema do Baricentro e reescrever a resposta com variáveis de estado, chega-se a:

$$m\,.\,x'' + b\,.\,x' + k\,.\,x = u$$

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = \frac{-k}{m}x_1 + \frac{-b}{m}x_2 + u$$

Sua representação matricial fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} . u$$

Com a intenção de simular o sistema, considera-se a saída x_1 igual a Y e a entrada u. Após aplicar a transformada de Laplace na equação e resolver o sistema, obtém-se a função de transferência do sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+bs+k}$$

2 - Ao simular o sistema para $\xi = 0,75$, usou-se os parâmetros de entrada b = 9N.s/m ; m= 2kg e k=18N/m:

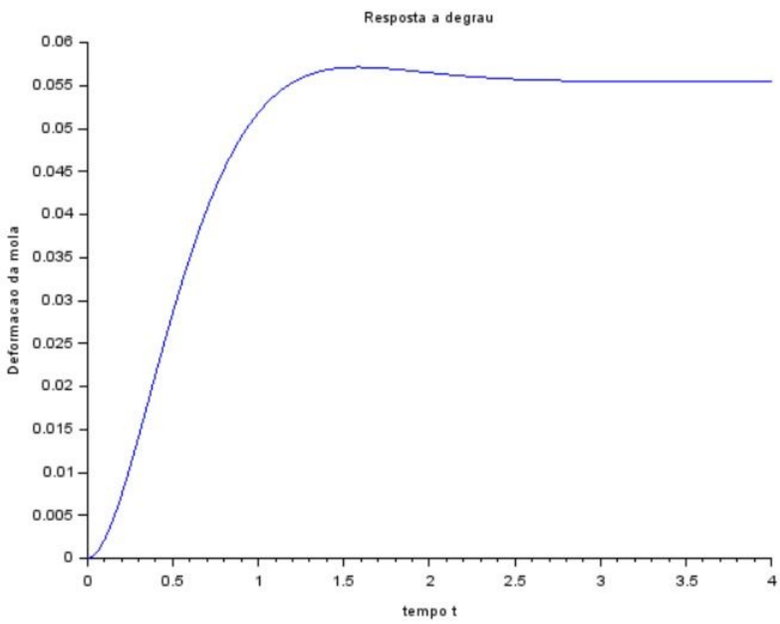


Figura 3: Deformação para $\xi = 0,75$

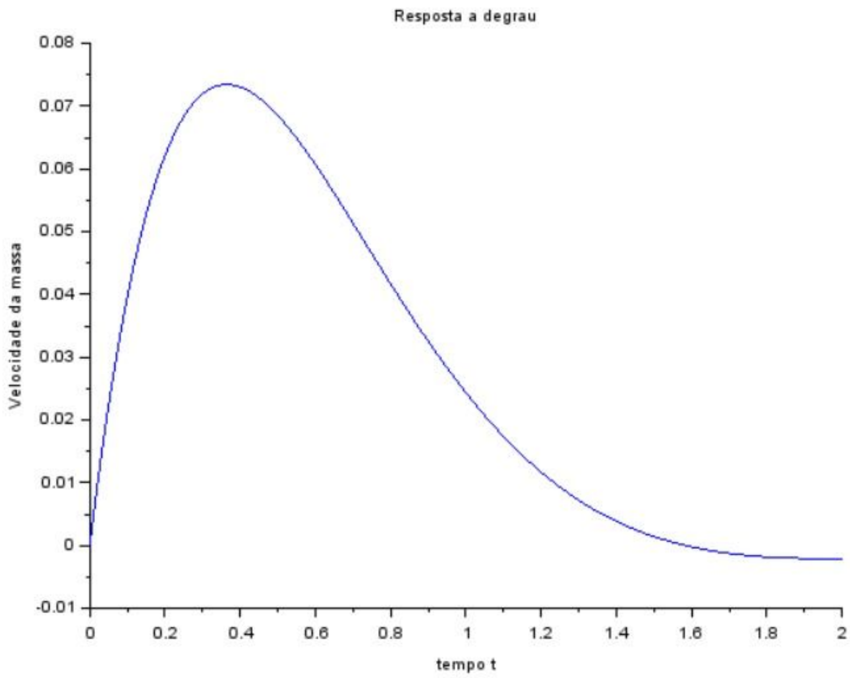


Figura 4: Velocidade para $\xi = 0,75$

3 - Ao simular o sistema para $\xi = 1,0$, usou-se os parâmetros de entrada b = 12N.s/m ; m= 2kg e k=18N/m:

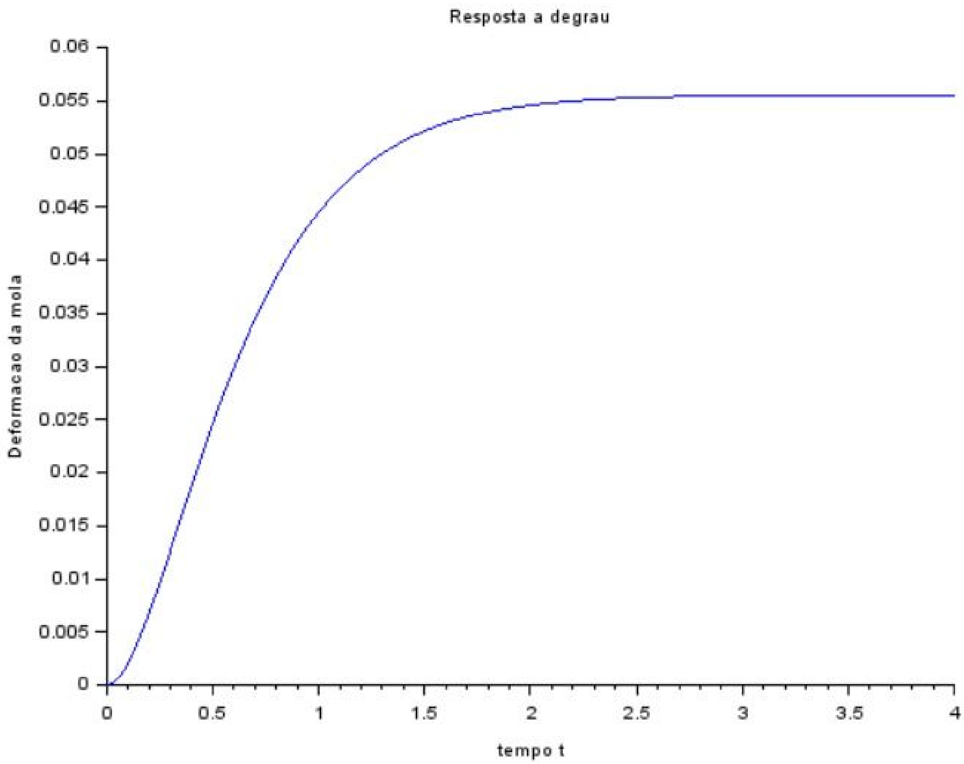


Figura 5: Deformação para $\xi = 1$

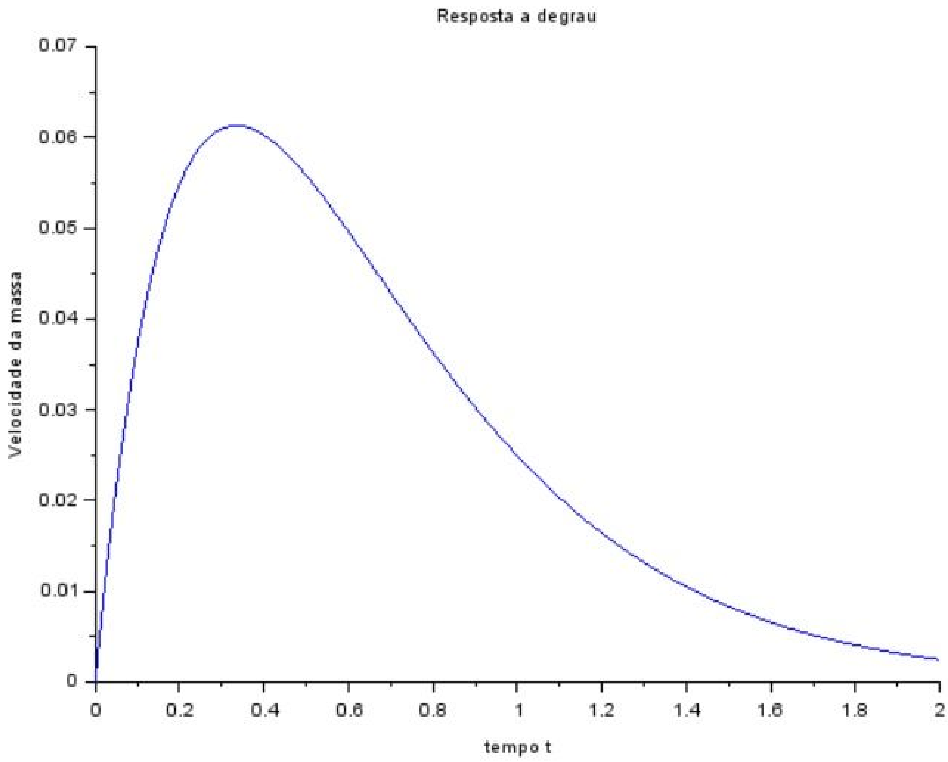


Figura 6: Velocidade para $\xi = 1$

4 - Ao simular o sistema para $\xi = 1,25$, usou-se os parâmetros de entrada b = 15N.s/m ; m= 2kg e k=18N/m::

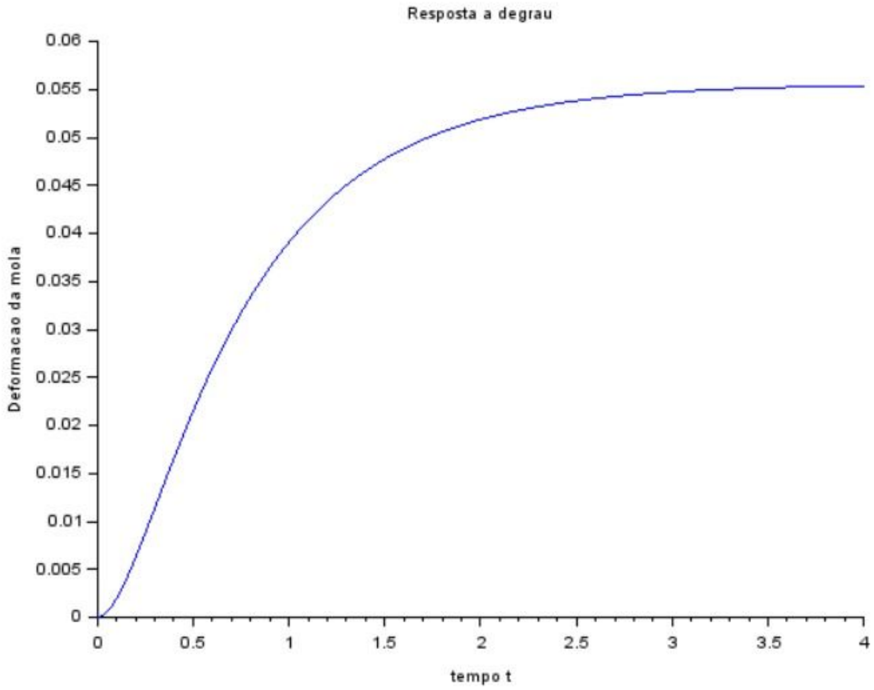


Figura 7: Deformação para $\xi = 1,25$

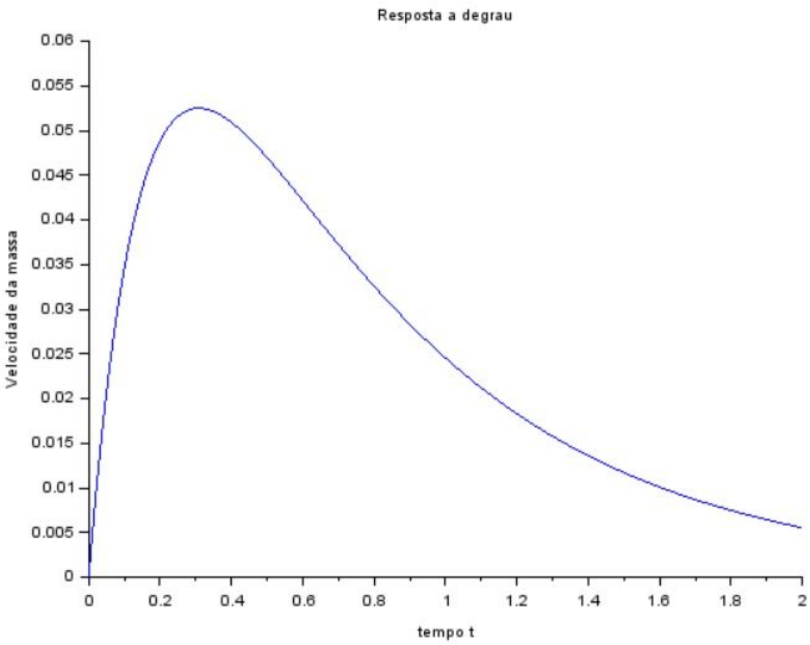


Figura 8: Velocidade caso $\xi = 1.5$

LIÇÃO DE CASA

PARTE 1

Considerando o exercício anterior, calcule os autovalores da matriz A e calcule as raízes do polinômio no denominador da função de transferência e compare. Estas raízes (e os autovalores) são os pólos do sistema.

Os autovalores são obtidos a partir do determinante da matriz (A-Ix).

$$\det\begin{vmatrix} -x & -1-x \\ \frac{-k}{m}-x & \frac{-b}{m}-x \end{vmatrix}=0$$

$$x^2+\frac{b}{m}x+\frac{k}{m}=0$$

Em $\xi = 0.75$, chega-se a raízes imaginárias:

$$x=\frac{-4.5\pm\sqrt{-15.75}}{2}$$

Em $\xi = 1$: , as raízes são reais e iguais a $x_1 = x_2 = -3$

Em $\xi = 1,25$: $x_1 = -1,5$ e $x_2 = -6$

Para o caso $\xi = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$, observe que as raízes (e também os autovalores) são números complexos. Verifique que o módulo desse número complexo é igual à freqüência natural do sistema massa-mola amortecedor. Observe que a freqüência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do pólo.

No item A foi obtido que para $\xi < 1$ os autovalores são realmente encontradas como raízes de números complexos.

Além disso, seu módulo é igual a sua frequência que é

$$\sqrt{(4,5/2)^2 + (1/2 * \sqrt{15,75}\,)^2} = 3 \qquad \omega = \sqrt{\tfrac{K}{m}} = \sqrt{\tfrac{18}{2}} = 3$$

Portanto, o módulo da raiz complexa igual a frequência natural do sistema massa-mola amortecedor.

$$\frac{\textit{módulo da parte real}}{\textit{módulo do número complexo}} = \frac{(4{,}5/2)}{3} = 0,75 = \xi$$

Logo, a divisão do módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo é igual ao coeficiente de amortecimento.

Por fim,

$$\omega_o = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 3\ .\ \sqrt{1-(0,75)^2} = 1,984 = |1/2 * \sqrt{15,75}|$$

PARTE 2

Simule o sistema do exercício para entrada nula e diferentes condições iniciais não nulas. Mostre o gráfico de v por x, e experimente mudar os parâmetros do sistema, tal que se obtenha 3 situações diferentes: pólos complexos, pólos reais e iguais, e pólos reais e distintos. Para cada figura construa outra figura mostrando os pólos correspondentes no plano complexo. Observe a ligação entre o comportamento transitório e a posição dos pólos no plano complexo. O resultado pretendido são três figuras:
Na primeira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam complexos.

Considerando os parâmetros para o caso $\xi = 0,75$, u=0 e variando as condições iniciais do vetor x_o no intervalo de -4 a 4, a figura 9 foi obtida:

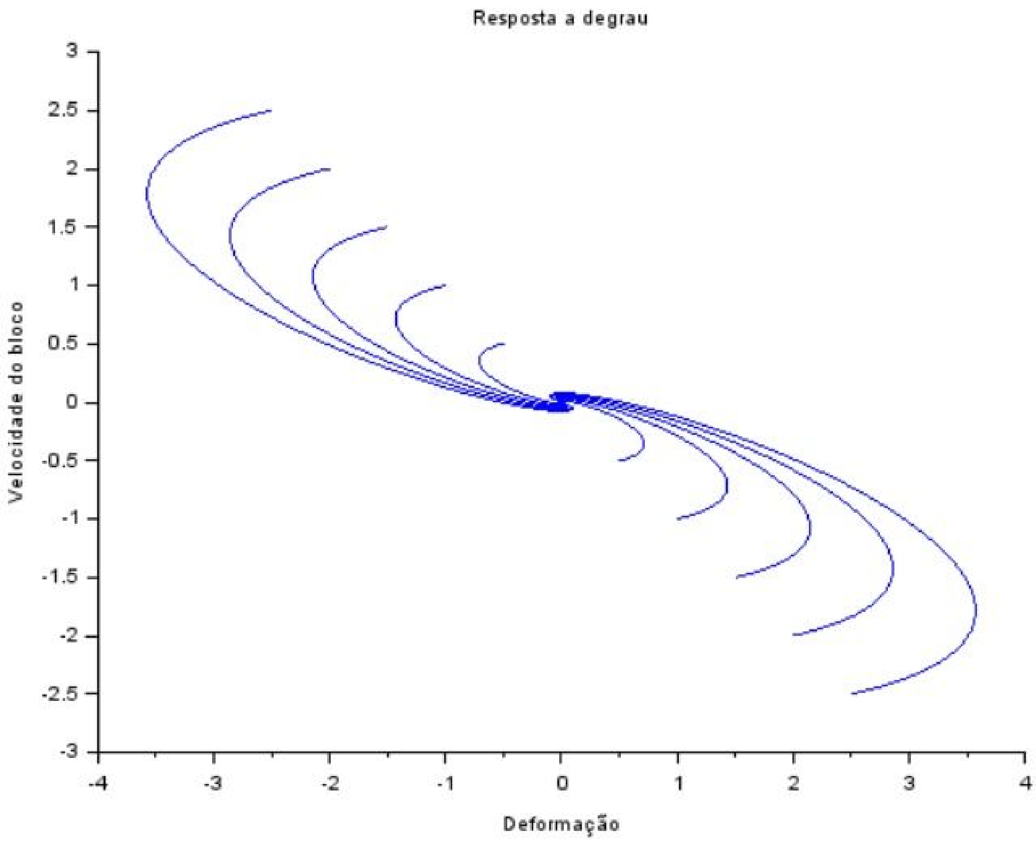


Figura 9: Deformação x Velocidade para $\xi = 0,75$

Na segunda figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e iguais.

Considerando os parâmetros para o caso $\xi = 1$, u=0 e variando as condições iniciais do vetor x_o no intervalo de -4 a 4, a figura 11 foi obtida:

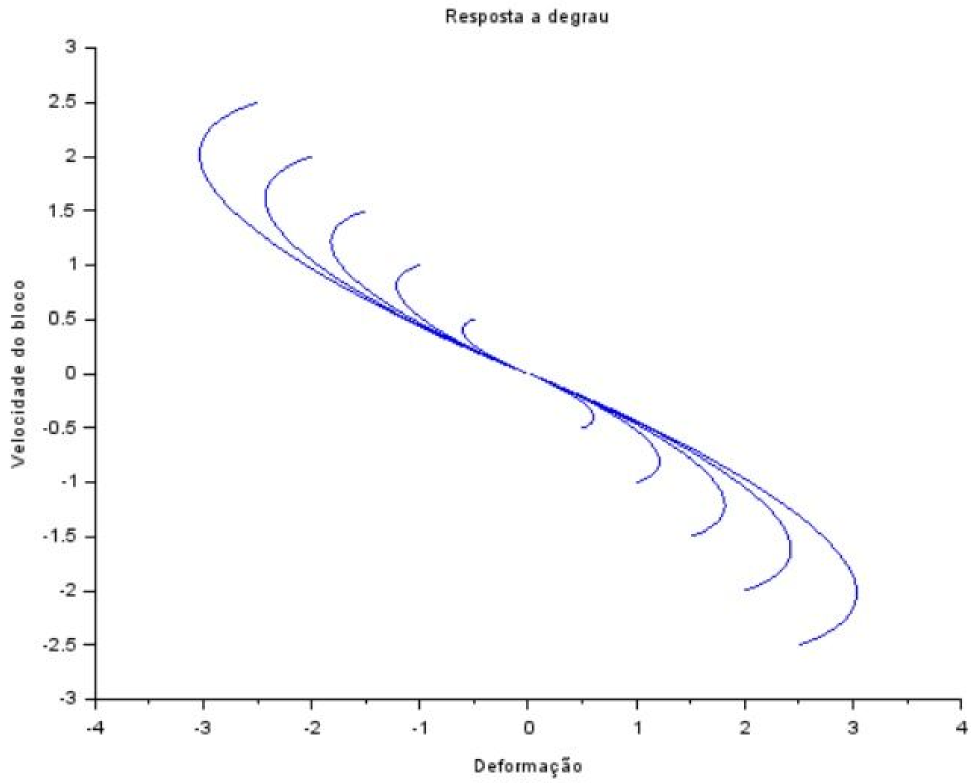


Figura 10: Deformação x Velocidade para $\xi = 1$

Na terceira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e distintos.

Considerando os parâmetros para o caso $\xi = 1,25$, u=0 e variando as condições iniciais do vetor x_o no intervalo de -4 a 4, a figura 13 foi obtida:

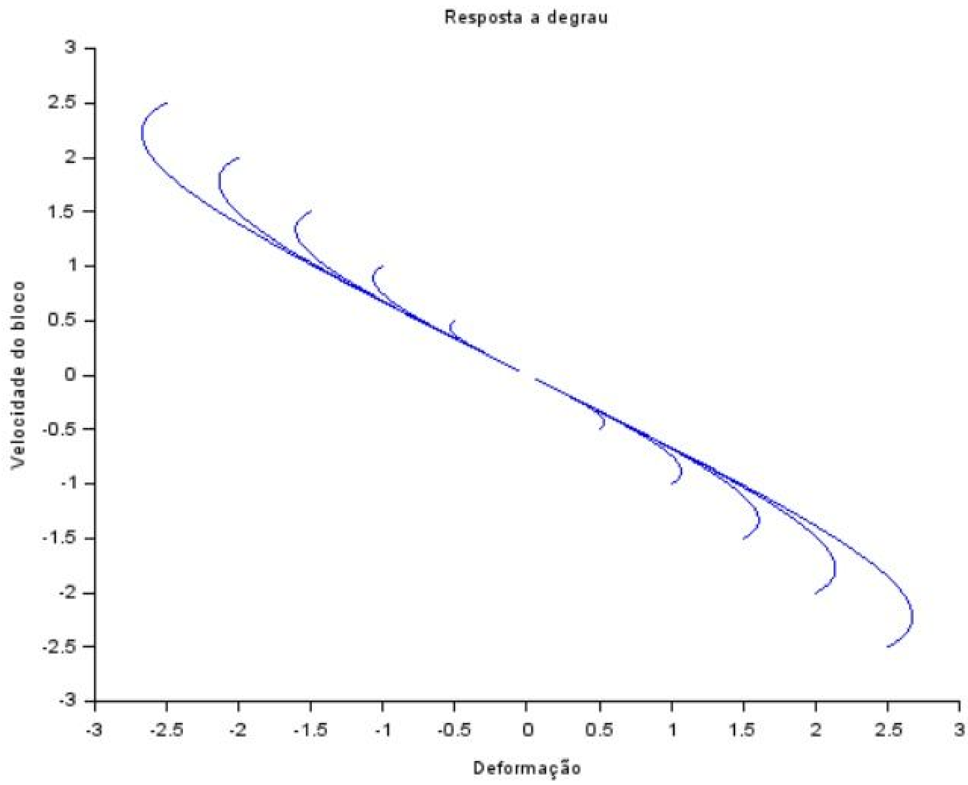


Figura 11: Deformação x Velocidade para $\xi = 1,25$

CÓDIGO:

O código em SciLab utilizado foi o mesmo do exemplo fornecido pelo professor, com modificações nos parâmetros e condições iniciais de acordo com a questão.