Universidade de São Paulo

Escola Politécnica

PME 3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Relatório - Lista 5

Paulo Montijo Bandeira 9348449

São Paulo, outubro de 2020

Exercício 1

Equacionamento: do TMB, $m \cdot x'' = - k \cdot x - b \cdot x' + F(t)$.

Então $m \cdot x'' + b \cdot x' + k \cdot x = F(t)$. A partir das considerações sobre equilíbrio, tem-se:

$$m \cdot x_{eq}'' + b \cdot x_{eq}' + k \cdot x_{eq} = F(t) \Rightarrow k \cdot x_{eq} = F(t) \Rightarrow x_{eq} = F(t)/k.$$

$$x_1 = x - x_{eq} \Rightarrow x = x_1 + x_{eq}$$

$$x_2 = x' - x_{eq}' = v - v_{eq} \Rightarrow v = x_2 + v_{eq}$$

$$u = F(t) - F_{eq} = F(t) - k \cdot x_{eq} \Rightarrow F(t) = u + k \cdot x_{eq}$$

Então $x_1' = x_2$ e $m \cdot x_2' = -k \cdot (x_1 + x_{eq}) - b \cdot (x_2 + v_{eq}) + (u + k \cdot x_{eq})$.

Rearranjando a segunda equação: $x_2' = (1/m) \cdot (-k \cdot x_1 - b \cdot x_2 - b \cdot v_{eq} + u) = (1/m) \cdot (-k \cdot x_1 - b \cdot x_2 + u)$. A saída, y, então, será dada por $y = x_1$ e, daí, obtém-se:

$$[x_1'; x_2'] = [0\ 1; -k/m\ -b/m] \cdot [x1; x2] + [0; 1/m] \cdot u$$

$$y = [1\ 0] \cdot [x1; x2] + [0] \cdot u$$

A partir da comparação com $[x_1'; x_2'] = A \cdot x + B \cdot u$, chega-se a $A = [0\ 1; -k/m\ -b/m]$.

Os autovalores de A serão as raízes do polinômio característico dado por $p(x) = -x(-b/m - x) - 1(-k/m) = x^2 + (b/m) \cdot x + (k/m)$. Essas raízes são $r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4m \cdot k}}{2m}$ e $r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4m \cdot k}}{2m}$. Se $b < 2\sqrt{(m \cdot k)}$, observa-se que r_1 e r_2 serão números complexos. Consequentemente, os autovetores de A também o serão. Faça-se, ainda, a adimensionalização de r_1 e r_2 para perceber que $r_1 = \omega \cdot (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$ e $r_2 = \omega \cdot (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$, onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Isso significa que, se $\zeta < 1$, r_1 e r_2 serão dados por $\omega \cdot (-\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2})$, cujo módulo é igual a $\sqrt{\omega^2 \cdot \zeta^2 + \omega^2 \cdot (1 - \zeta^2)} = \omega$. Da divisão de $|Re(\omega \cdot (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}))|$ por $|\omega \cdot (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})|$, que, acaba-se de ver, vale ω, observa-se o resultado $\omega \cdot \zeta/\omega$, ou, simplesmente, ζ. A frequência de oscilação, por sua vez, vale, como se pode observar, $\sqrt{1 - \zeta^2}$, que equivale à parte imaginária do número complexo obtido.

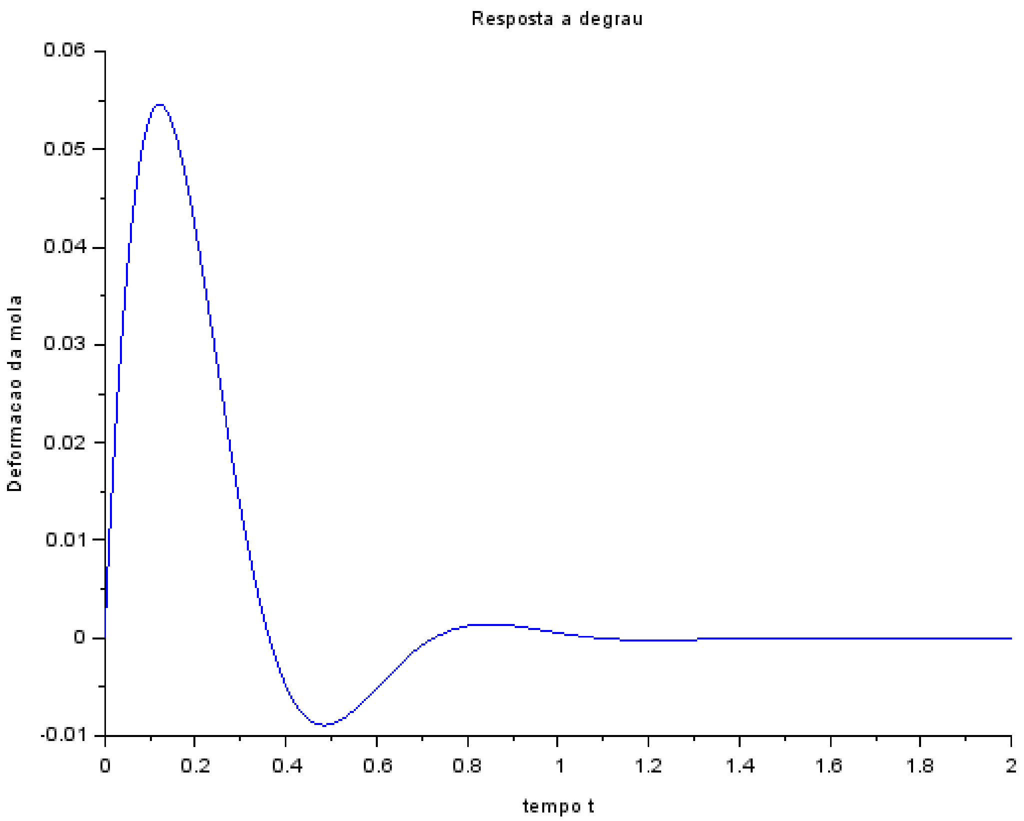
Exercício 2

Aqui, serão observados os casos para 1) entrada nula; pólos complexos; 2) entrada nula; pólos reais e coincidentes; 3) entrada nula; pólos reais e distintos.

Caso 1

Parâmetros: m = 1 kg; b = 10 Ns/m; k = 100 N/m.

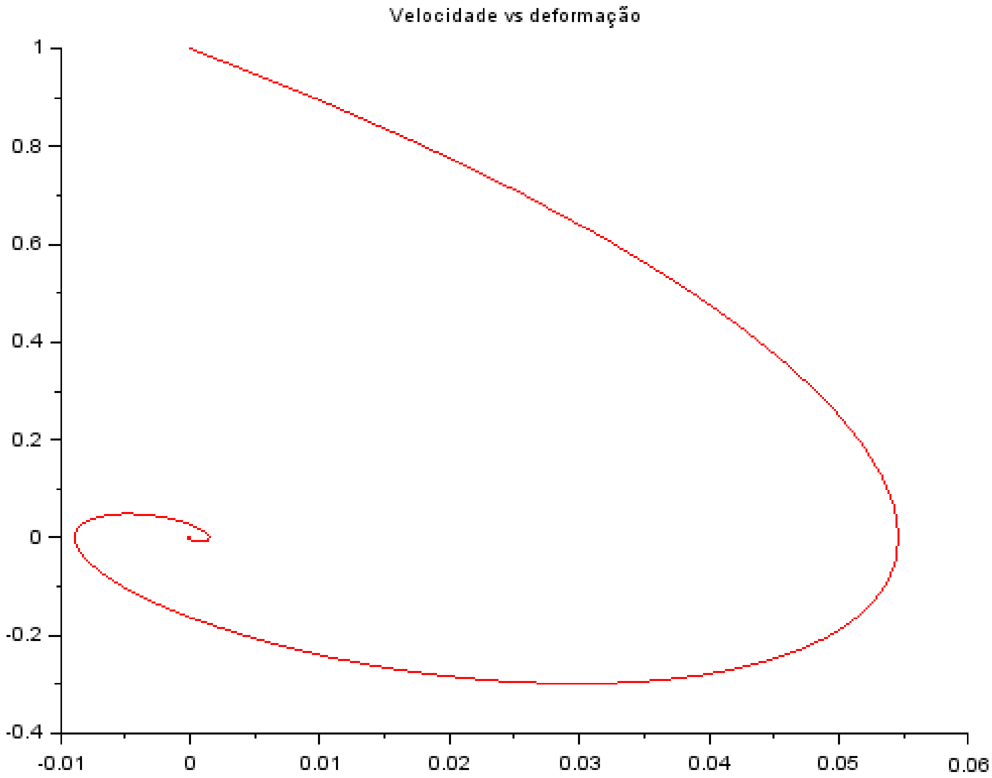
a) Condições iniciais: x1 = 0; x2 = 1.



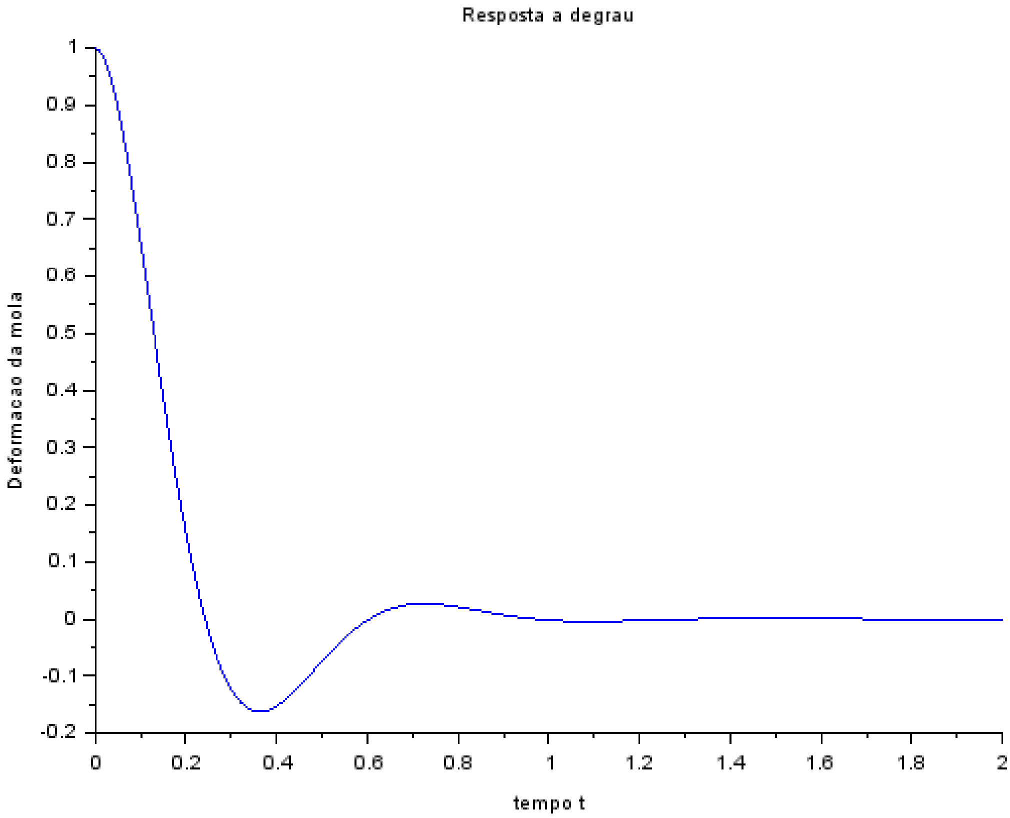
Para [R, diagevals] = spec(A), observa-se:

```
 R  =

  - 0.0497519 - 0.0861727i   - 0.0497519 + 0.0861727i
    0.9950372                   0.9950372

-->diagevals
 diagevals  =

  - 5. + 8.660254i    0
    0                - 5. - 8.660254i
```

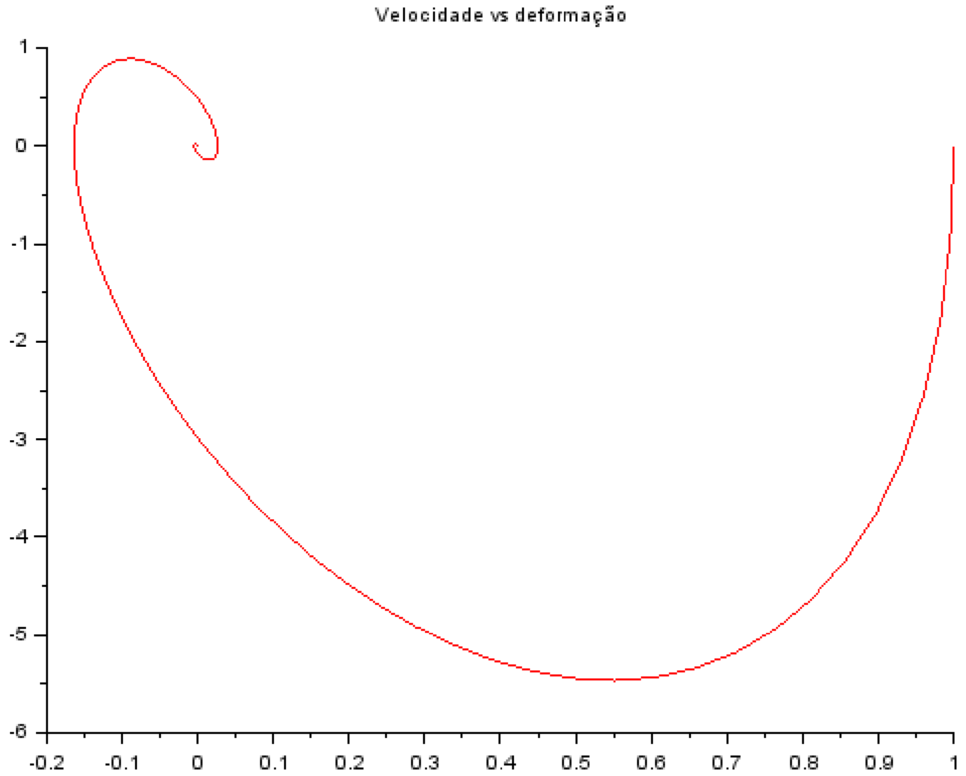
Por fim, o gráfico v vs x fica:



b) Condições iniciais: x1 = 1; x2 = 0.



Como os pólos dependem apenas dos parâmetros, não se observa mudança a partir das condições iniciais. Por fim, gráfico v vs x torna-se:



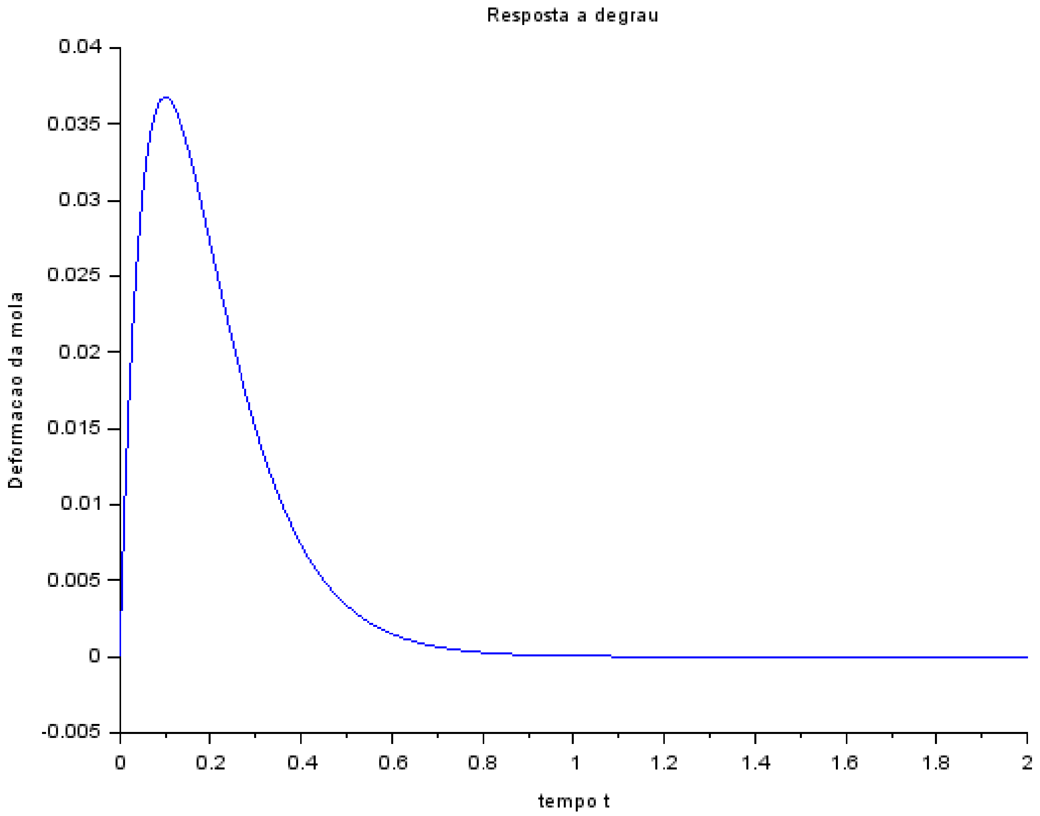
Nota-se, aqui, que, para um vetor condição inicial rotacionado 90º no sentido horário no plano Argand-Gauss, resulta-se em uma figura rotacionada da mesma maneira.

Caso 2

Parâmetros: m = 1 kg; b = 20 Ns/m; k = 100 N/m.

a) Condições inicais: x1 = 0; x2 = 1.

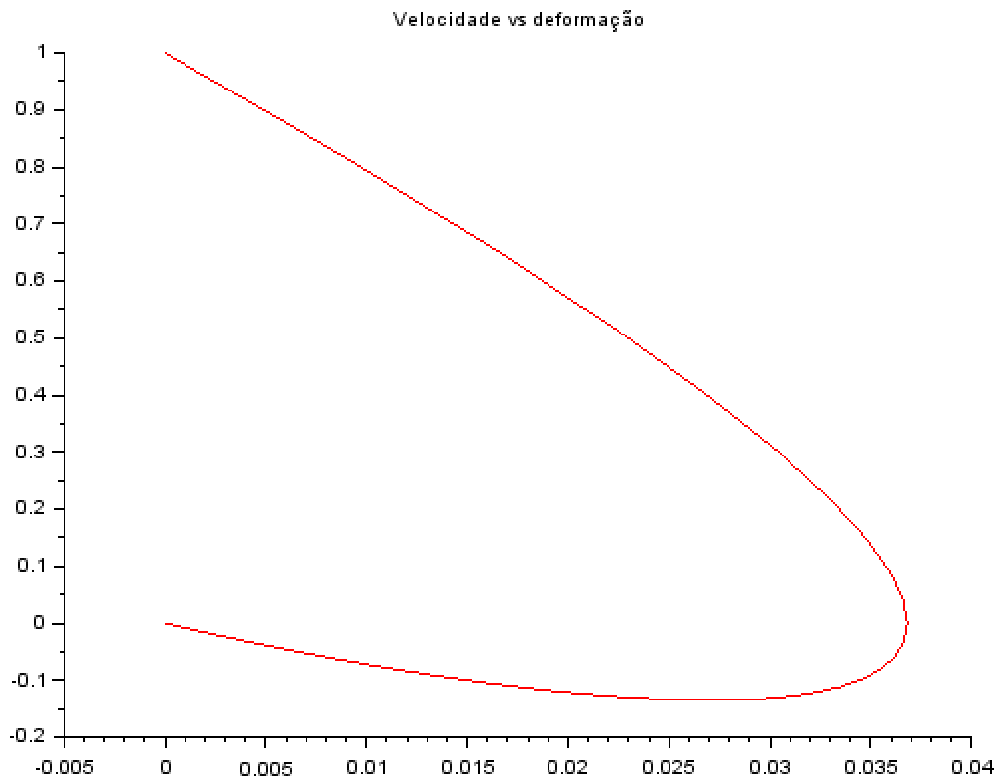
Aqui, o gráfico é coerente com o de um amortecimento crítico, uma vez que o parâmetro ζ vale, agora, 1.



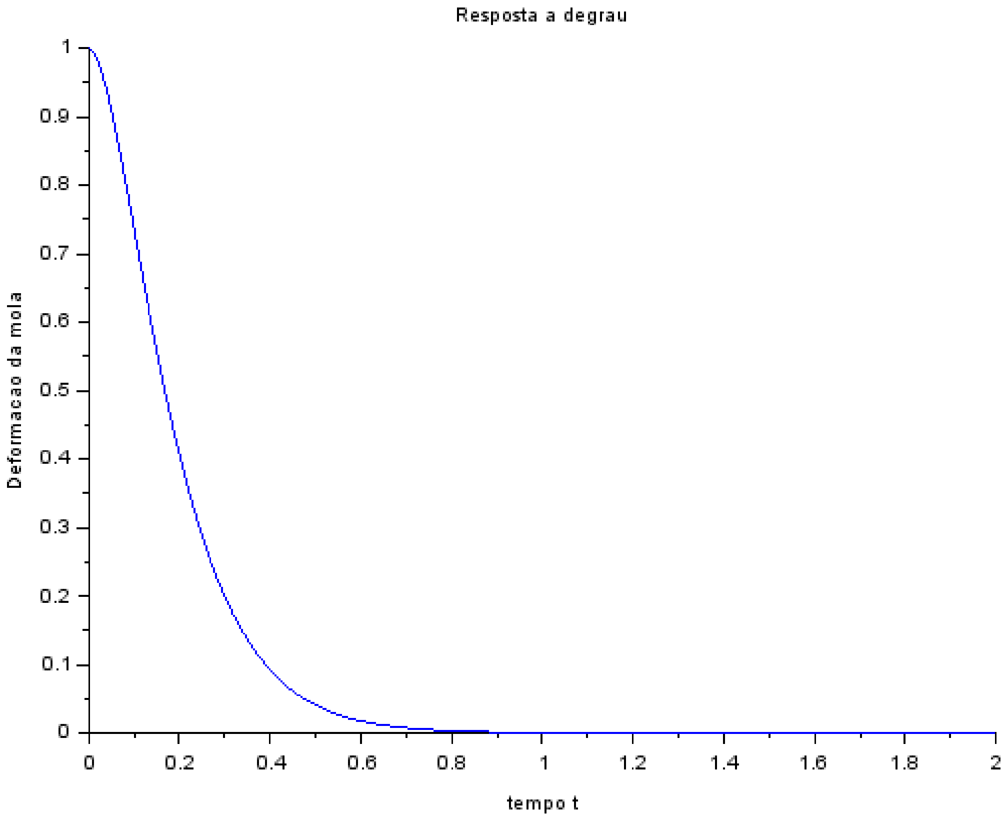
Também como era de se esperar, observa-se que os autovalores de A são iguais (e reais).

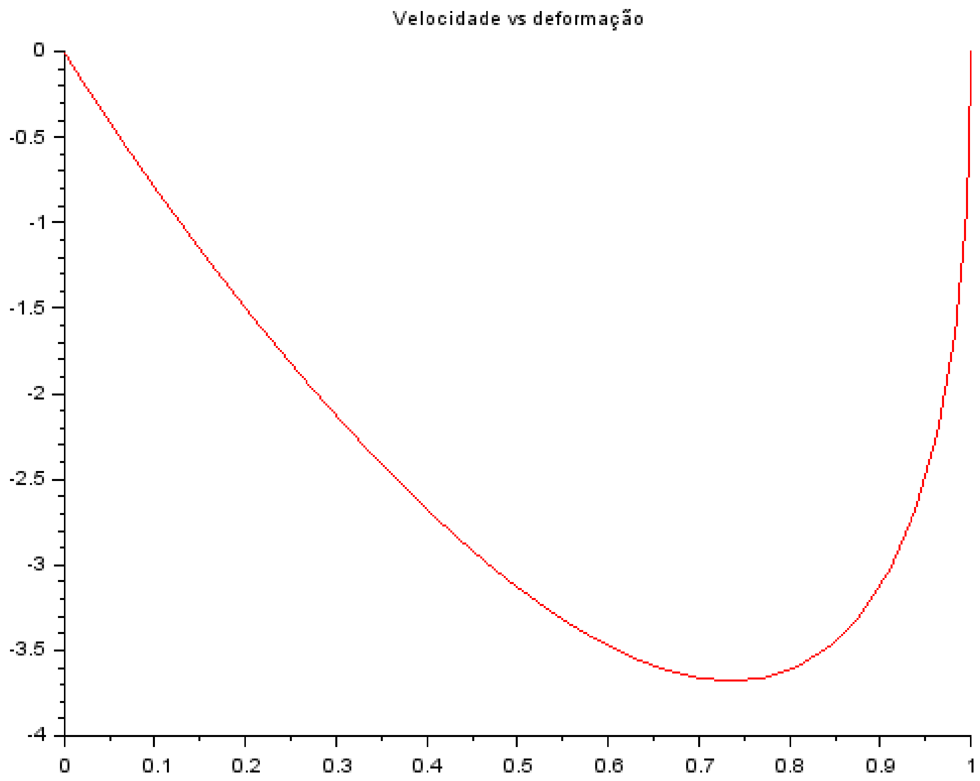
```
-->R
 R  =

  - 0.0995037    0.0995037
    0.9950372  - 0.9950372

-->diagevals
 diagevals  =

  - 10.     0
    0     - 10.
```

Finalmente, o gráfico de v vs x comporta-se da seguinte forma:



b) Condições inicais: x1 = 1; x2 = 0.


Resposta a degrau
Deformacao da mola
tempo t
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

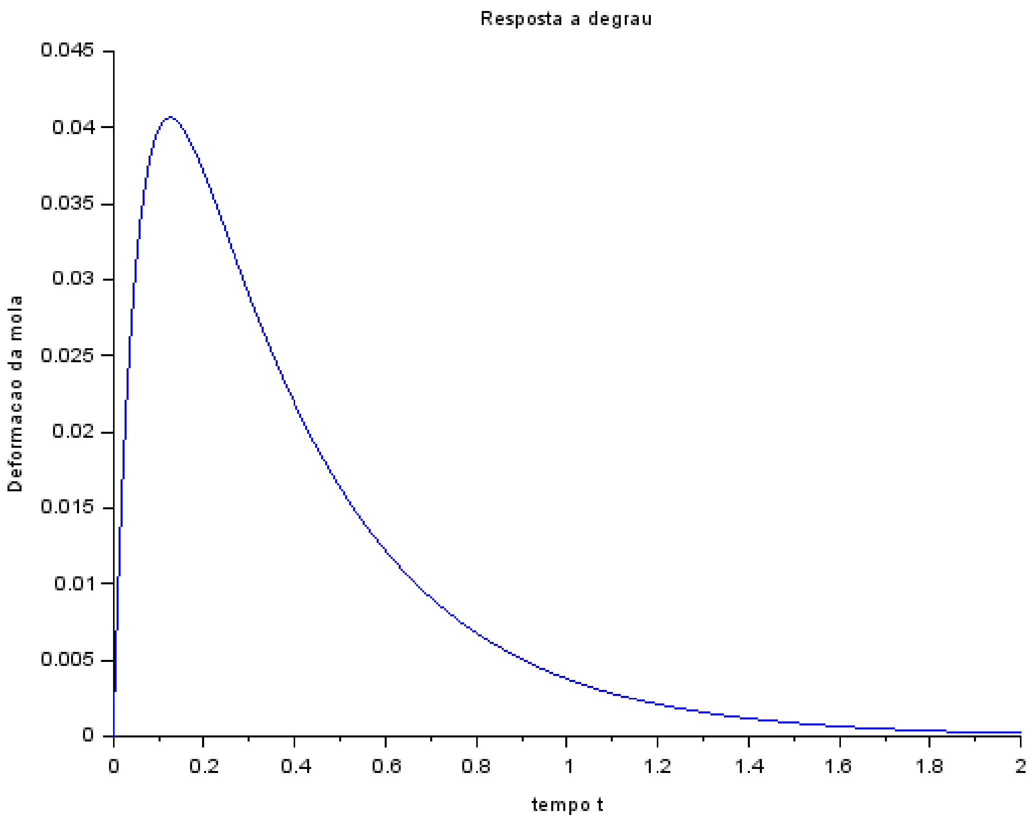

Velocidade vs deformação
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Caso 3

Parâmetros: m = 1 kg; b = 20 Ns/m; k = 50 N/m.

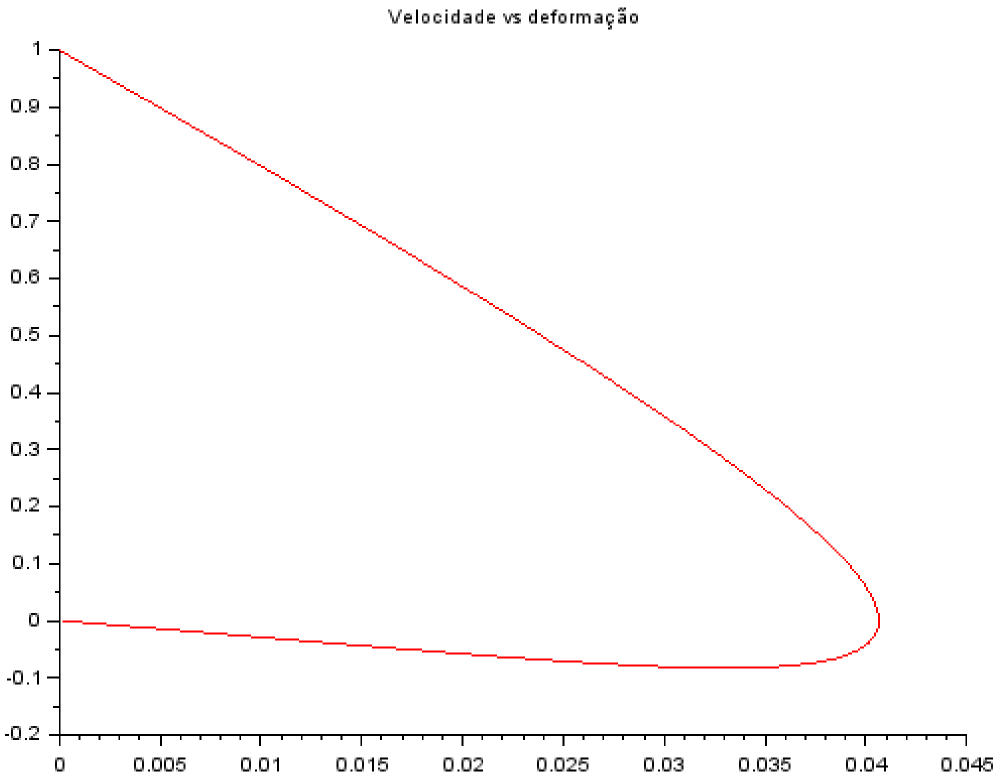
a) Condições iniciais: x1 = 0; x2 = 1.

Aqui, observa-se o caso em que ocorre amortecimento supercrítico.

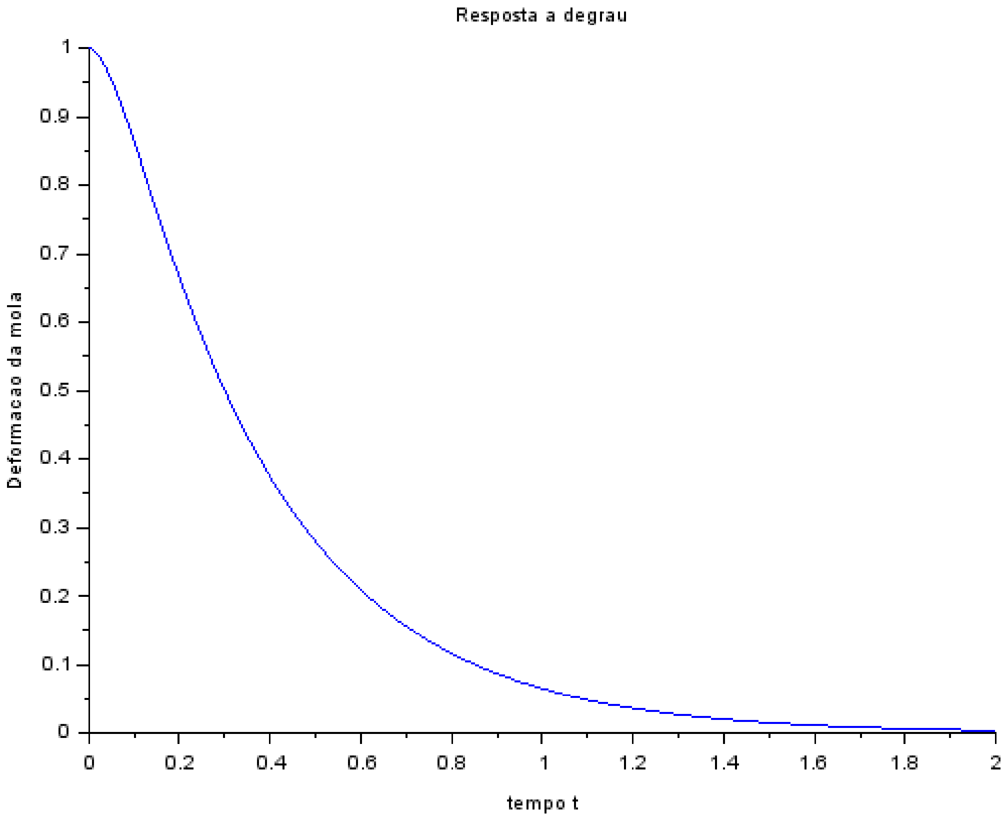


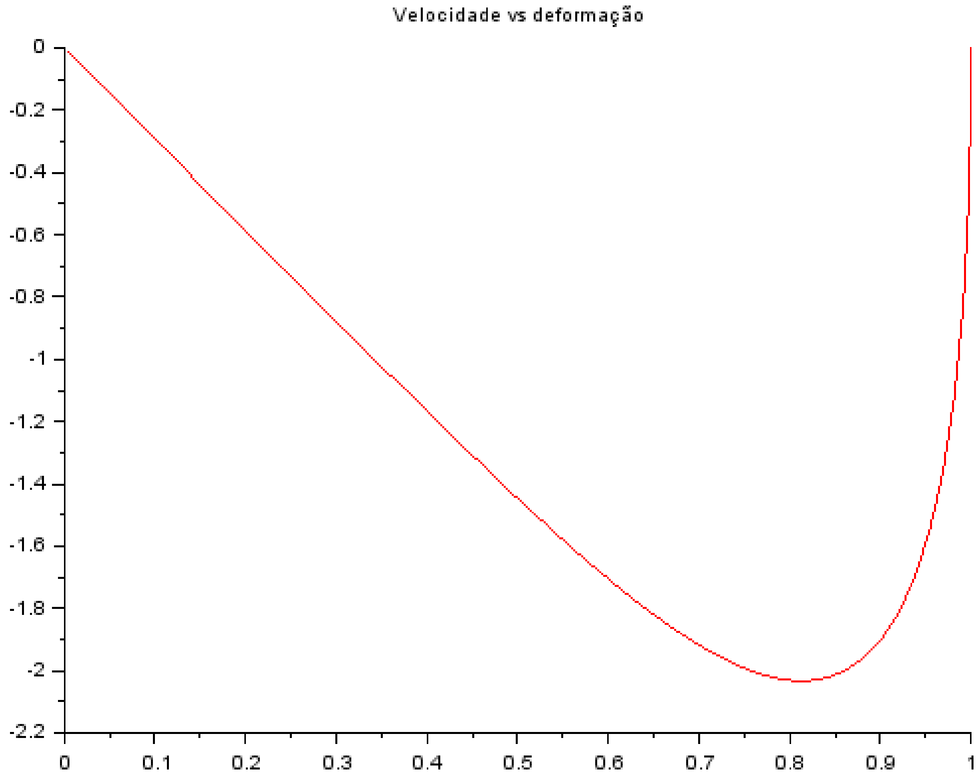
Os dois autovalores, bem como seus autovetores associados, são reais e distintos.

```
-->R
 R  =

    0.3231082  - 0.0584784
  - 0.9463620    0.9982887

-->diagevals
 diagevals  =

  - 2.9289322    0
    0          - 17.071068
```



b) Condições iniciais: x1 = 1; x2 = 0.


Resposta a degrau
Deformacao da mola
tempo t
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2



Reitere-se, aqui, que as posições dos pólos no plano complexo independem das condições iniciais e são parâmetros apenas da matriz A, que é relativa apenas à equação diferencial.

Anexos

Segue, agora, o código utilizado para as simulações realizadas:

```
// Definindo os parametros do sistema:

m = 1; b = 20; k = 50;

// Matrizes do sistema:

A = [0 1; -k/m -b/m];

B = [0; 1/m];

C = [1 0];
```

```
D = [0];
// Montando o sistema:
suspensao = syslin('c', A, B, C, D);
// Definindo o vetor tempo:
t = 0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u = zeros(t) //ones(t);
// No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
x0e = [1; 0]; // neste caso, x1(0) = 0 e x2(0) = 0
// Alem de calcular a saida y, a função csim também permite obter o estado x:
[y, x] = csim(u, t, suspensao, x0e);
// Abrindo uma nova janela de graficos:
                                        xset('window', 1)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t, y, 2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Deformacao da mola')
// Podemos plotar o grafico do estado x2, por exemplo:
// Abrindo uma nova janela de graficos:
//xset('window', 2)
// Mostrando o resultado da simulacao:
//plot2d(t, x(2,:), 2)
//xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Velocidade da massa')

xset('window', 3)
plot2d(y, x(2,:), 5)
xtitle('Velocidade vs deformação')
```

```
omegan = sqrt(k/m);

zeta = b/(2*sqrt(k*m));


[R, diagevals] = spec(A);
```