UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

VICTOR MANOEL FERREIRA ROSA DA COSTA

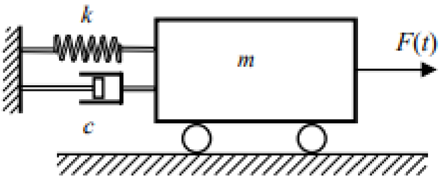
10772713

Modelagem de sistemas dinâmicos- Lista E

São Paulo

2020

O sistema modelado a seguir tem como entrada uma força F(t) do tipo degrau e como saída a deformação da mola x(t):



Encontrando a equação diferencial pelo método de Lagrange:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

$$R = \frac{1}{2}b\dot{x}^2$$

$$Q^{ext} = F(t)$$

$$L = T - V$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q^{ext} \Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

Fazendo:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$u = F(t)$$

A equação pode ser reescrita na forma de espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u - bx_2 - kx_1}{m} \end{cases}$$

$$y = x_1$$

Aplicando transformada de Laplace:

$$\begin{cases} sX_1 - x_1(0) = X_2 \\ sX_2 - x_2(0) = \dfrac{U - bX_2 - kX_1}{m} \end{cases}$$

Manipulando as equações, considerando as condições iniciais nulas, tem-se:

$$X_1 = \frac{1}{ms^2 + bs + k} U \Rightarrow Y = G(s)U$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

A partir disso, pode-se simular o problema. Existem três casos a serem analisados, dependendo do valor do fator de amortecimento. Os valores dos parâmetros serão escolhidos de forma a se obter esses casos.

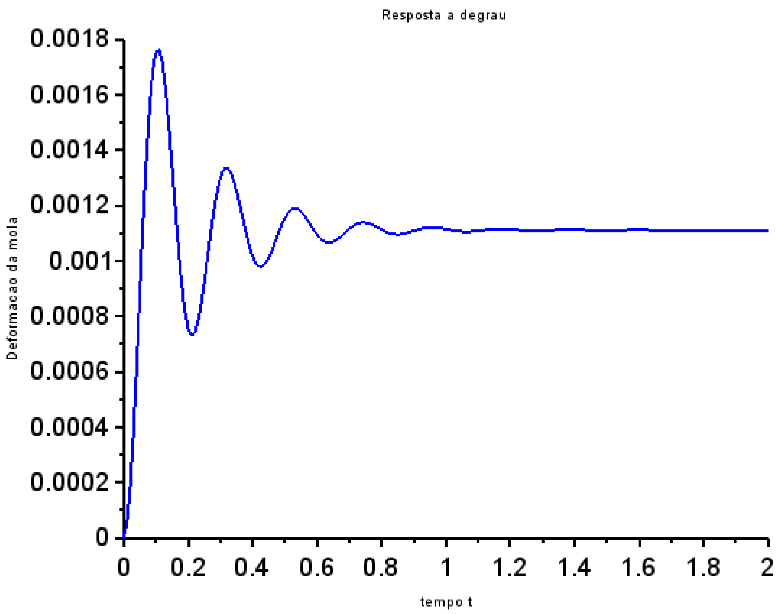
$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

- Caso subamortecido (ζ<1):

Com os valores:

$$m = 1\,kg \quad k = 900\frac{N}{m} \quad b = 10\frac{Ns^2}{m}$$

O resultado obtido é:

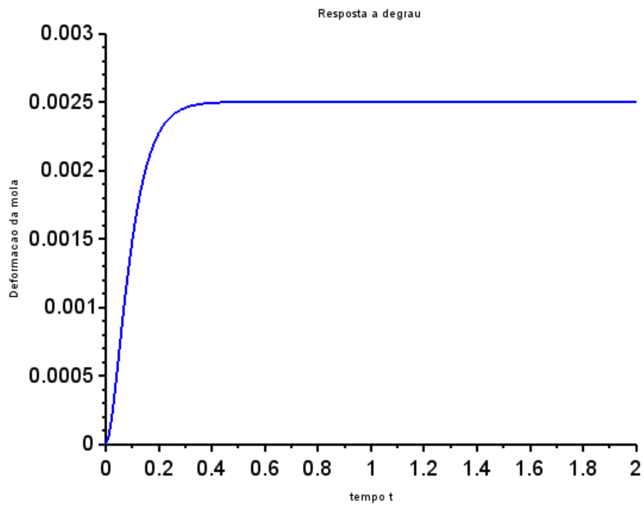


- Caso criticamente amortecido (ζ=1):

Com os valores:

$$m = 1\,kg \quad k = 400\frac{N}{m} \quad b = 40\,\frac{Ns^2}{m}$$

O resultado obtido é:

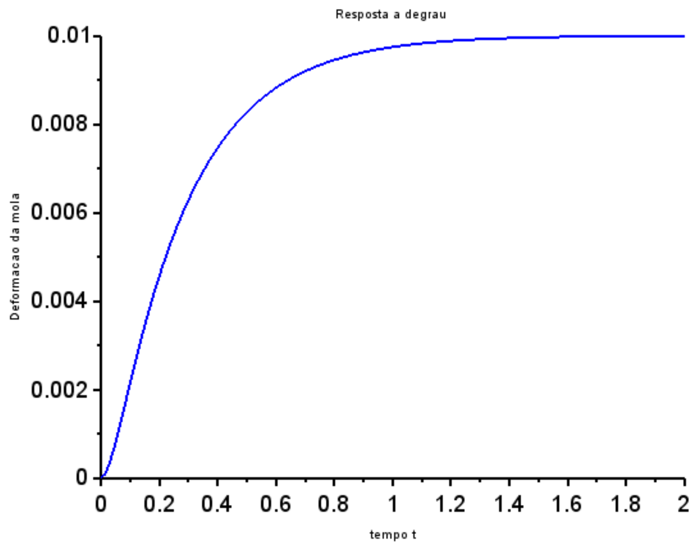


- Caso superamortecido (ζ>1):

Com os valores:

$$m = 1\,kg \quad k = 100\frac{N}{m} \quad b = 30\,\frac{Ns^2}{m}$$

O resultado obtido é:



1- A equação do sistema na forma de espaço de estados é:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -k/m & -b/m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1/m\end{bmatrix}u$$

A matriz A é:

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -k/m & -b/m\end{bmatrix}$$

Calculando os autovalores:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -k/m & -\dfrac{b}{m}-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4mk}}{2m}$$

Para o caso subamortecido, tem-se:

$$\zeta < 1 \Rightarrow b^2 - 4km < 0$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \imath\sqrt{b^2-4mk}}{2m}$$

As raízes do denominador da função de transferência são:

$$ms^2 + bs + k = 0 \Rightarrow s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4mk}}{2m}$$

Percebe-se que as raízes do denominador da função de transferência e os autovalores da matriz A são equivalentes, sendo denominados de polos. Neste caso, trata-se de polos complexos.

A frequência natural do sistema é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Outra maneira de obtê-la é pelo módulo dos polos:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{b^2-4mk}{4m^2}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

O fator de amortecimento b aparece na razão do módulo da parte real pelo módulo do número:

$$\zeta = \frac{b/2m}{\sqrt{k/m}} \Rightarrow \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

A frequência de oscilação é obtida a partir do módulo da parte imaginária do polo:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{4m^2}} \Rightarrow \omega_d = \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

2- Códigos:

```
m=1; b=30; k=100;

s=poly(0,'s');

f='[1/(m*s^2+b*s+k)]';

g=evstr(f);

G=syslin('c',g);

t=0:0.01:2;

u=ones(t);

x0=[0;0];

[y]=csim(u,t,G,x0);

xset('window',1);

xset('thickness',2);
xset('font size',4);
plot2d(t,y,2);
xtitle('Resposta a degrau','tempo t', 'Deformacao da mola');
```