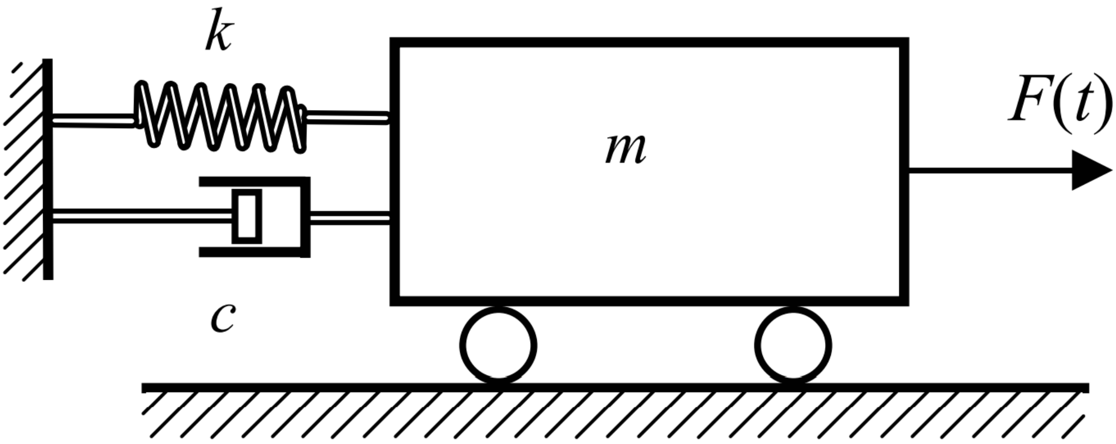
André Kenzo Nakamura NUSP 9787112

Lista E - PME3380 Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Exercício



Para o sistema acima temos a seguinte equação de estado:

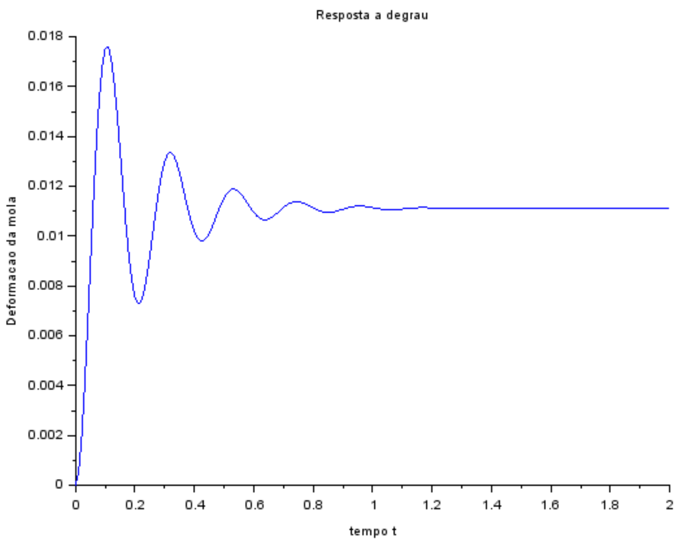
$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -k/m & -b/m\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1/m\end{bmatrix} * F(t)$$

E sua função de transferência é:

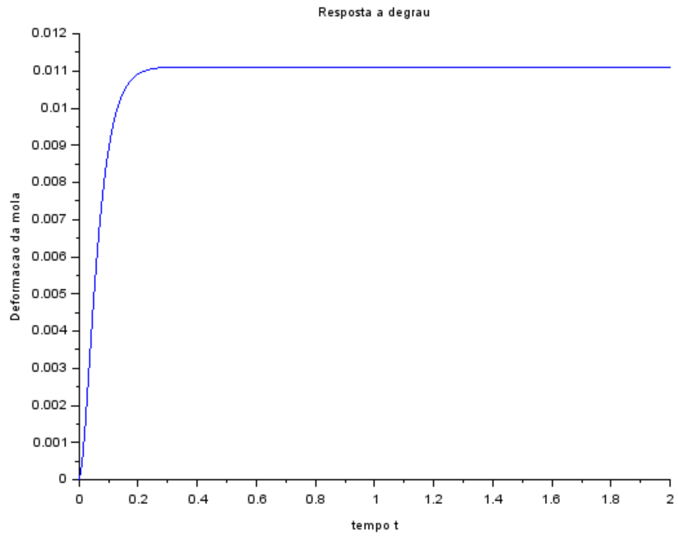
$$H(s) = \frac{\left(\frac{1}{m}\right)}{s^2 + \left(\frac{b}{m}\right) * s + \left(\frac{k}{m}\right)}$$

Considerando a força F de 10N, massa m de 1kg e constante de mola k de 900N/m, tem-se 3 situações a serem analisadas: a subcrítica, a crítica e a supercrítica.

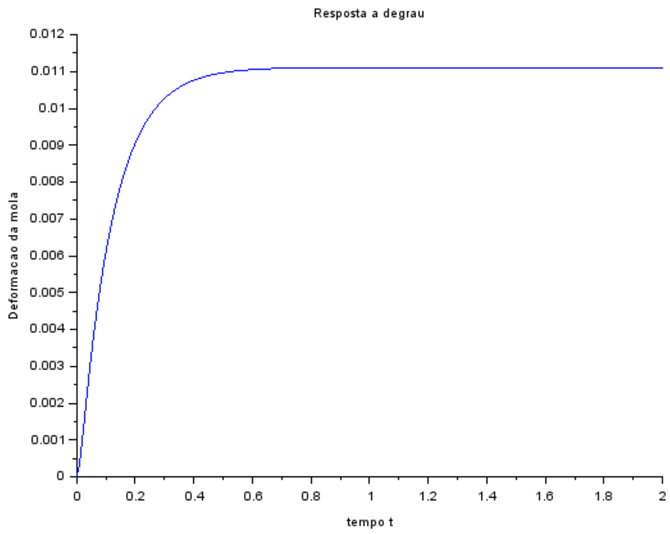
Subcrítica: $\xi < 1 \rightarrow c < 60 \ \rightarrow c = 10Ns/m$



Crítica: $\xi = 1 \rightarrow c = 60Ns$



Supercrítica: $\xi > 1 \rightarrow c > 60 \ \rightarrow c = 110Ns/m$



Como esperava-se, o período de estabilização é o menor possível quando o sistema está em regime crítico, ou seja, $\xi = 1$.

Código

```
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;b=110;k=900;
// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -b/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];
// Montando o sistema:
suspensao=syslin('c',A,B,C,D);
```

```
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u=10*ones(t);
// No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
x0e=[0;0]; // neste caso, x1(0)=0 e x2(0)=0
// Alem de calcular a saida y, a função csim também permite obter o estado x:
[y,x]=csim(u,t,suspensao,x0e);
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,y,2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Deformacao da mola')
// Podemos plotar o grafico do estado x2, por exemplo:
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',2)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,x(2,:),2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Velocidade da massa')
```

Questão 1

Obtenção dos autovalores da matriz A:

$$det\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -900 & -10-\lambda \end{bmatrix} = 0 \ \rightarrow (-\lambda)*(-10-\lambda)-(-900) = 0 \ \rightarrow \lambda = 5 \pm 29{,}58i$$

Nota-se que o polinômio denominador da função de transferência corresponde com o polinômio característico da matriz A. Logo, suas raízes correspondem com os autovalores.

Ao calcular o módulo do autovalor (o valor do módulo é o mesmo para os dois autovalores) chega-se em:

$$|\lambda| = \sqrt{5^2 + 29{,}58^2} = \sqrt{900} = 30$$

E ao calcular a frequência natural também se obtém o mesmo valor, como demonstrado a seguir:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{900}{1}} = 30$$

Ao calcular a razão entre o módulo da parte real pelo módulo do número complexo, chega-se em:

$$\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

Que corresponde ao coeficiente de amortecimento:

$$\xi = \frac{b}{2\sqrt{km}} = \frac{10}{2 * 30} = \frac{1}{6}$$

Questão 2

Para definir as 3 situações diferentes, os parâmetros foram definidos como:

- Situação 1: Raízes imaginárias distintas

$$\left(\frac{b}{m}\right)^2 < 4\left(\frac{k}{m}\right) \rightarrow b < 2\sqrt{mk} \rightarrow b = 10Ns/m$$

- Situação 2: Raízes reais iguais

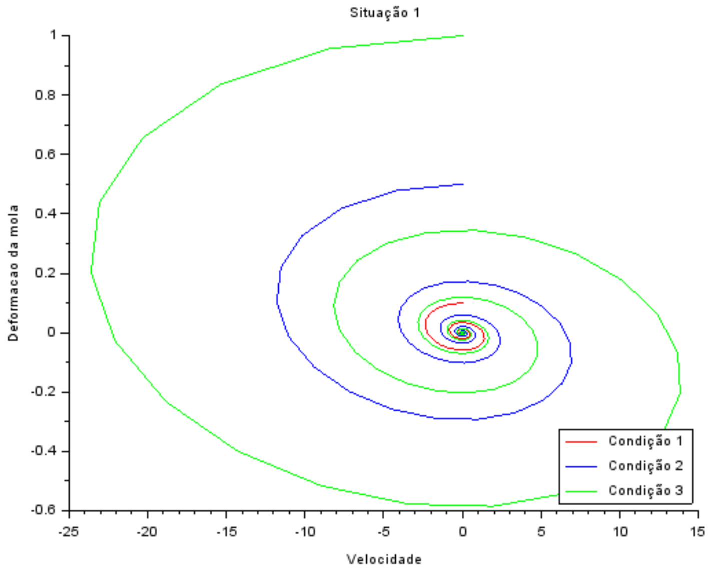
$$\left(\frac{b}{m}\right)^2 = 4\left(\frac{k}{m}\right) \rightarrow b = 2\sqrt{mk} \rightarrow b = 60Ns/m$$

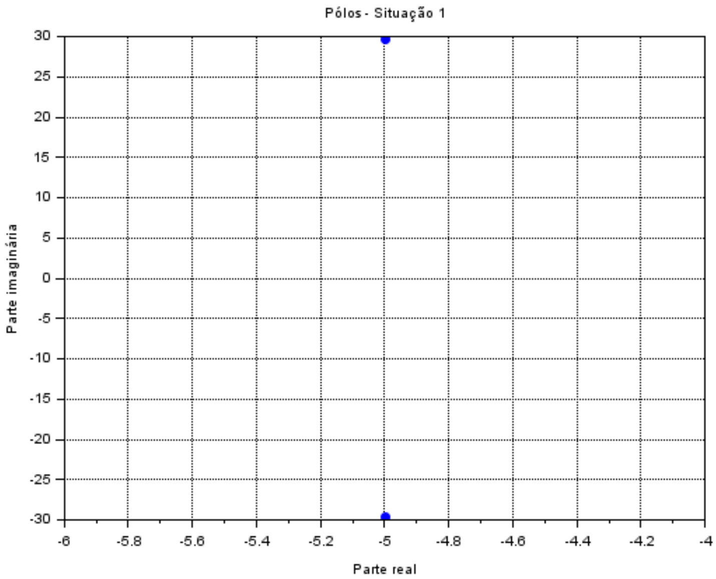
- Situação 3: Raízes reais e distintas

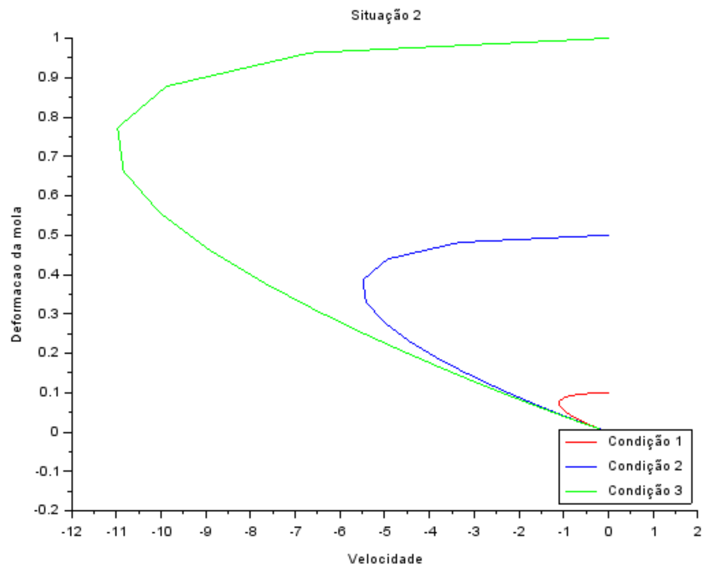
$$\left(\frac{b}{m}\right)^2 > 4\left(\frac{k}{m}\right) \rightarrow b > 2\sqrt{mk} \rightarrow b = 110Ns/m$$

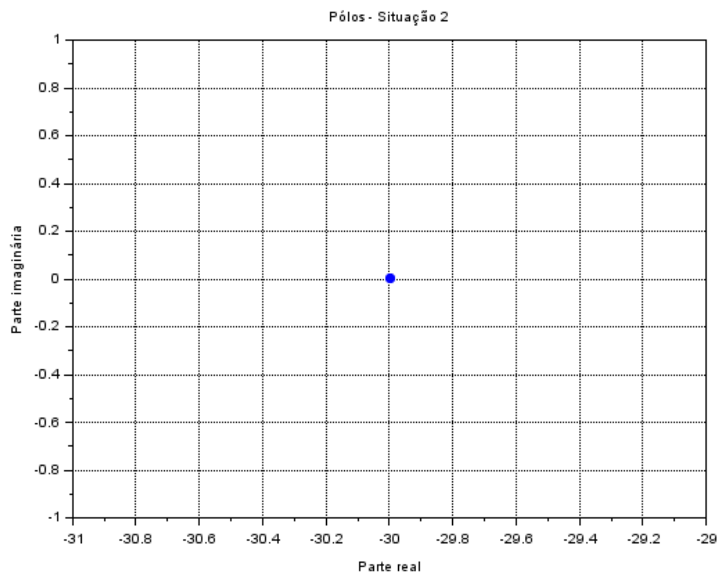
Definidos os parâmetros, as condições iniciais foram escolhidas:

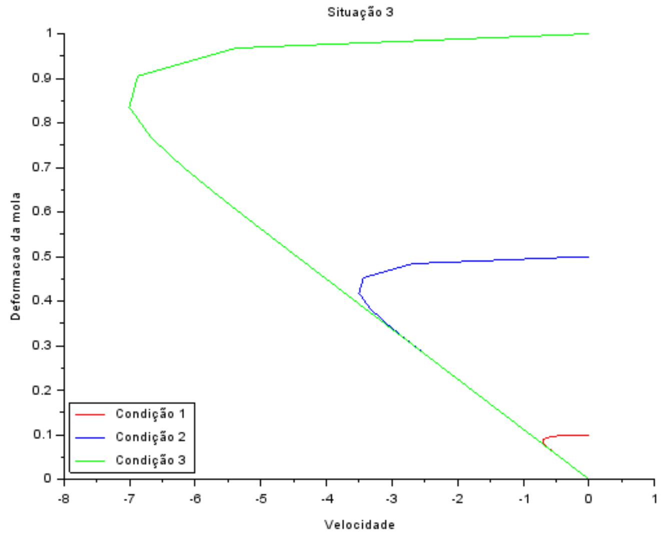
	$\ddot{x}$ [m/s^2]	$\dot{x}$ [m/s]	x [m]
Condição 1	0	0	0,1
Condição 2	0	0	0,5
Condição 3	0	0	1

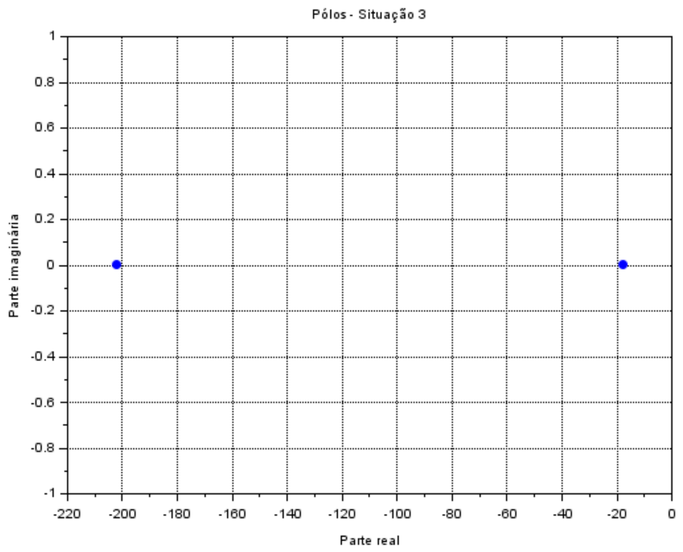

Situação 1
Deformacao da mola
Velocidade
Condição 1
Condição 2
Condição 3
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15


Pólos - Situação 1
Parte imaginária
Parte real
30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-6
-5.8
-5.6
-5.4
-5.2
-5
-4.8
-4.6
-4.4
-4.2
-4


Situação 2
Deformacao da mola
Velocidade
Condição 1
Condição 2
Condição 3


Pólos - Situação 2
Parte imaginária
Parte real





Código

```
clc()

m=1;b=110;k=900;

A=[0 1; -k/m -b/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];
suspensao=syslin('c',A,B,C,D);
t=0:0.01:2;

u=zeros(t);
```

```
x0e=[0.1;0];

[y,x]=csim(u,t,suspensao,x0e);
xset('window',1)
X(1,:)=x(1,:);
V(1,:)=x(2,:);
plot2d(V,X,5)
x0e=[0.5;0];
[y,x]=csim(u,t,suspensao,x0e);
X(1,:)=x(1,:);
V(1,:)=x(2,:);
plot2d(V,X,2)
x0e=[1;0];
[y,x]=csim(u,t,suspensao,x0e);
X(1,:)=x(1,:);
V(1,:)=x(2,:);
plot2d(V,X,3)
xtitle('Situação 3','Velocidade','Deformacao da mola')
legends(["Condição 1","Condição 2","Condição 3"],[5,2,3],3);
```