

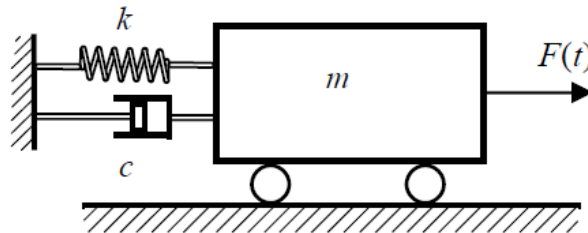
Universidade de São Paulo
Escola Politécnica

PME 3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Lista E

Mariana Claudino Pin 9348644

1)



Equacionamento:

$$m \cdot x'' = -k \cdot x - b \cdot x' + F(t).$$

A partir das considerações sobre equilíbrio, tem-se:

$$m \cdot x_{eq}'' + b \cdot x_{eq}' + k \cdot x_{eq} = F(t) \Rightarrow k \cdot x_{eq} = F(t) \Rightarrow x_{eq} = F(t)/k.$$

$$x_1 = x - x_{eq} \Rightarrow x = x_1 + x_{eq}$$

$$x_2 = x' - x_{eq}' = v - v_{eq} \Rightarrow v = x_2 + v_{eq}$$

$$u = F(t) - F_{eq} = F(t) - k \cdot x_{eq} \Rightarrow F(t) = u + k \cdot x_{eq}$$

Então $x_1' = x_2$ e $m \cdot x_2' = -k \cdot (x_1 + x_{eq}) - b \cdot (x_2 + v_{eq}) + (u + k \cdot x_{eq})$.

Rearranjando a segunda equação:

$$x_2' = (1/m) \cdot (-k \cdot x_1 - b \cdot x_2 - b \cdot v_{eq} + u) = (1/m) \cdot (-k \cdot x_1 - b \cdot x_2 + u).$$

A saída, y , então, será dada por $y = x_1$ e, daí, obtém-se:

$$[x_1'; x_2'] = [0 \ 1; -k/m \ -b/m] \cdot [x_1; x_2] + [0; 1/m] \cdot u$$

$$y = [1 \ 0] \cdot [x_1; x_2] + [0] \cdot u$$

A partir da comparação com $[x_1'; x_2'] = A \cdot x + B \cdot u$, chega-se a:

$$A = [0 \ 1; -k/m \ -b/m].$$

Os autovalores de A serão as raízes do polinômio característico dado por $p(x) = -x(-b/m - x) - 1(-k/m) = x^2 + (b/m) \cdot x + (k/m)$. Essas raízes são $r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4m \cdot k}}{2m}$ e

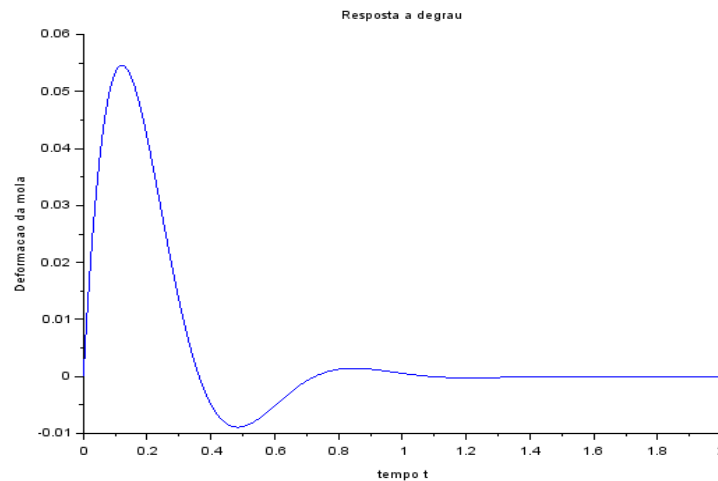
$r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4m \cdot k}}{2m}$. Se $b < 2\sqrt{(m \cdot k)}$, observa-se que r_1 e r_2 serão números complexos. Consequentemente, os autovetores de A também o serão. Faça-se, ainda, a adimensionalização de r_1 e r_2 para perceber que $r_1 = \omega \cdot (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$ e $r_2 = \omega \cdot (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$, onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Isso significa que, se $\zeta < 1$, r_1 e r_2 serão dados por $\omega \cdot (-\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2})$, cujo módulo é igual a $\sqrt{\omega^2 \cdot \zeta^2 + \omega^2 \cdot (1 - \zeta^2)} = \omega$. Da divisão de $|\text{Re}(\omega \cdot (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}))|$ por $|\omega \cdot (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})|$, que, acaba-se de ver, vale ω , observa-se o resultado $\omega \cdot \zeta/\omega$, ou, simplesmente, ζ . A frequência de oscilação, por sua vez, vale, como se pode observar, $\sqrt{1 - \zeta^2}$, que equivale à parte imaginária do número complexo obtido.

Exercício 2

Caso 1

Parâmetros: $m = 1$ kg; $b = 10$ Ns/m; $k = 100$ N/m.

a) Condições iniciais: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.



Para $[R, \text{diagevals}] = \text{spec}(A)$, observa-se:

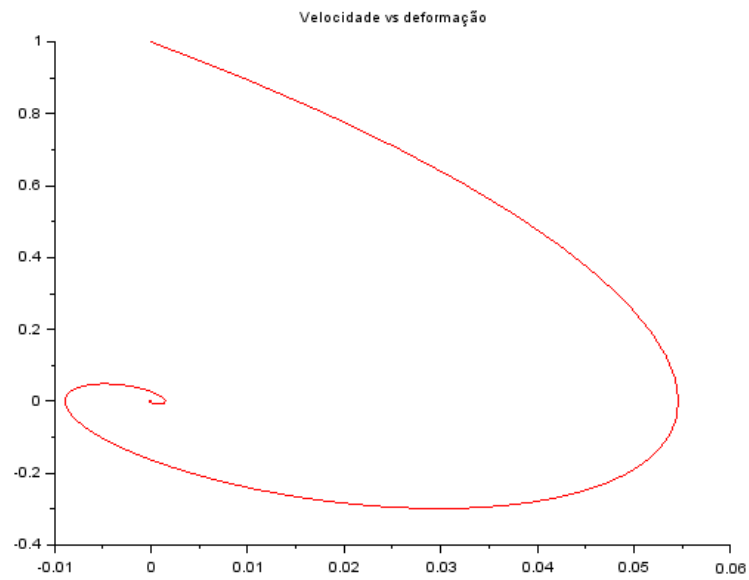
```

R =
- 0.0497519 - 0.0861727i - 0.0497519 + 0.0861727i
  0.9950372          0.9950372

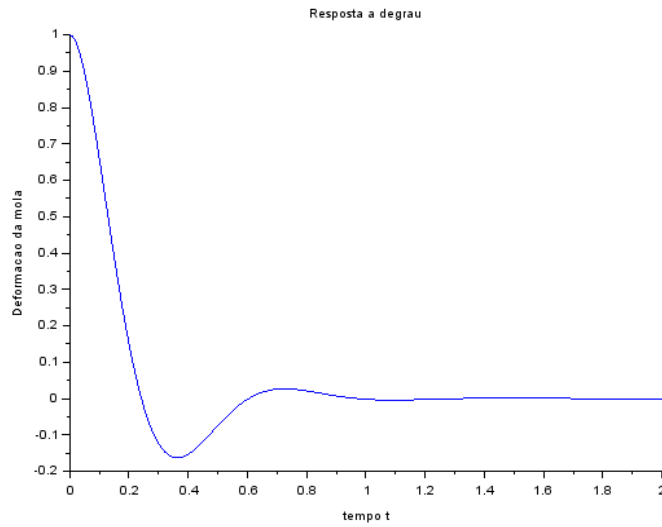
-->diagevals
diagevals =
- 5. + 8.660254i    0
  0                - 5. - 8.660254i

```

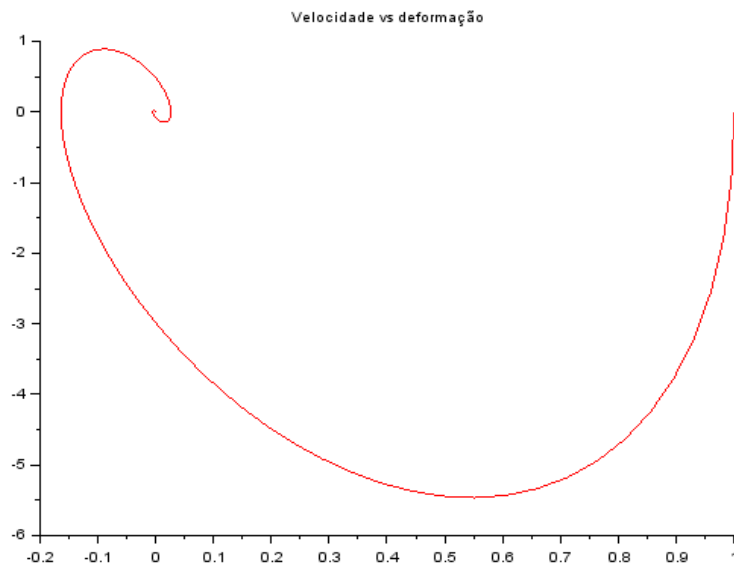
Por fim, o gráfico v vs x fica:



b) Condições iniciais: $x_1 = 1$; $x_2 = 0$.



Como os pólos dependem apenas dos parâmetros, não se observa mudança a partir das condições iniciais. Por fim, gráfico v vs x torna-se:



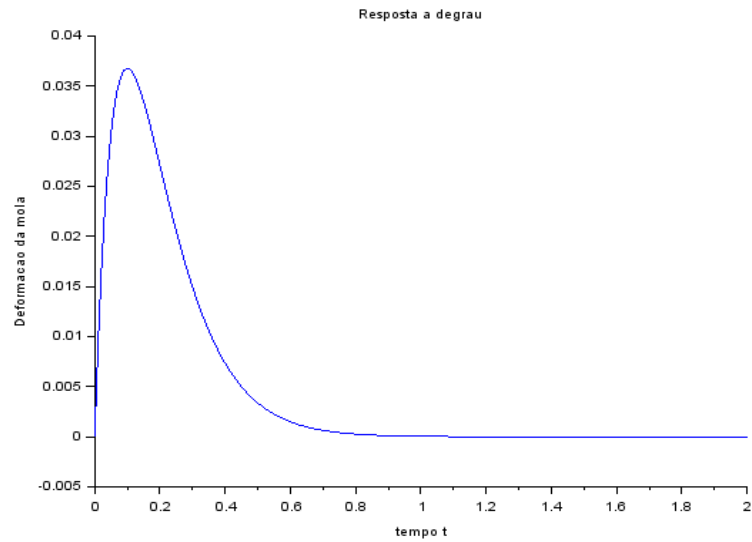
Nota-se, aqui, que, para um vetor condição inicial rotacionado 90° no sentido horário no plano Argand-Gauss, resulta-se em uma figura rotacionada da mesma maneira.

Caso 2

Parâmetros: $m = 1 \text{ kg}$; $b = 20 \text{ Ns/m}$; $k = 100 \text{ N/m}$.

a) Condições iniciais: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

Aqui, o gráfico é coerente com o de um amortecimento crítico, uma vez que o parâmetro ζ vale, agora, 1.



Também como era de se esperar, observa-se que os autovalores de A são iguais (e reais).

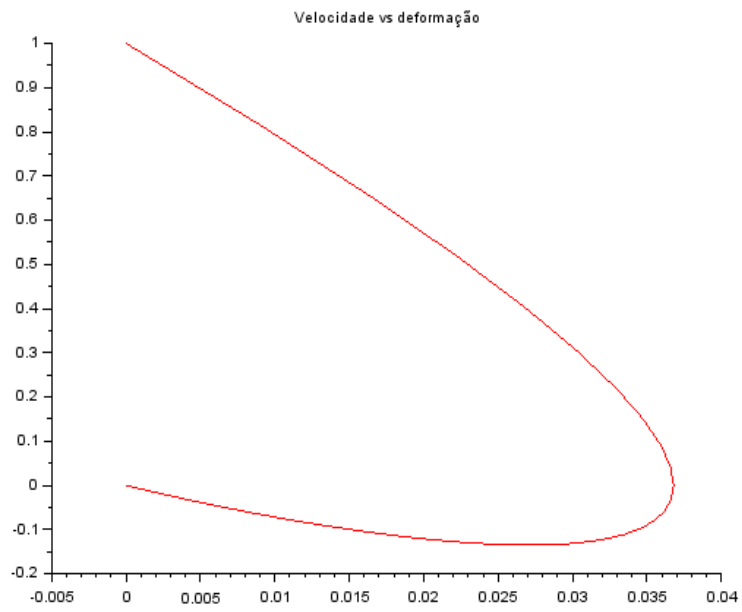
```
-->R
R =

- 0.0995037    0.0995037
  0.9950372    - 0.9950372

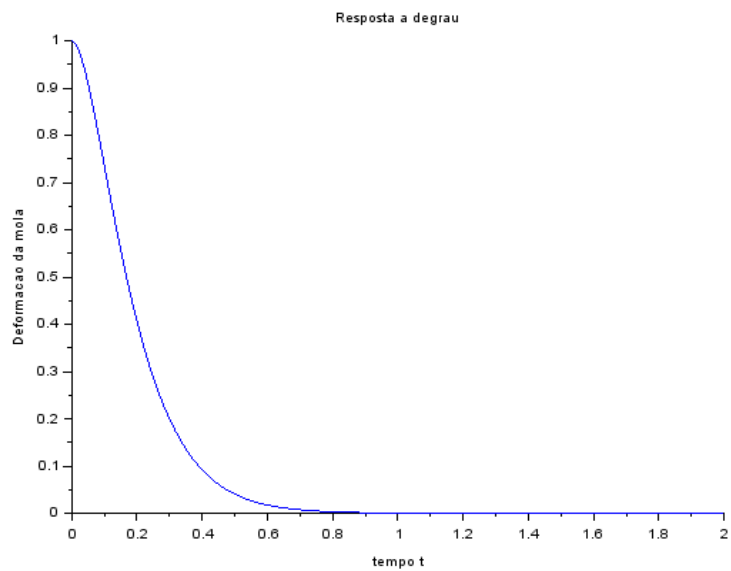
-->diagevals
diagevals =

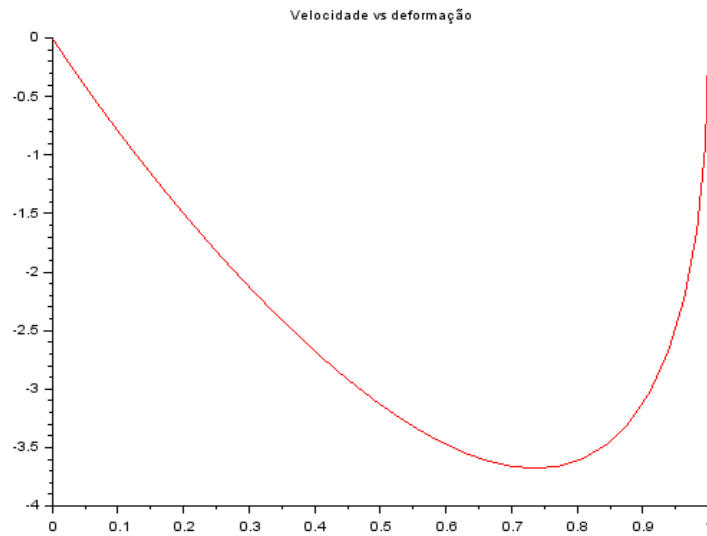
- 10.    0
  0    - 10.
```

Finalmente, o gráfico de v vs x comporta-se da seguinte forma:



b) Condições iniciais: $x_1 = 1$; $x_2 = 0$.



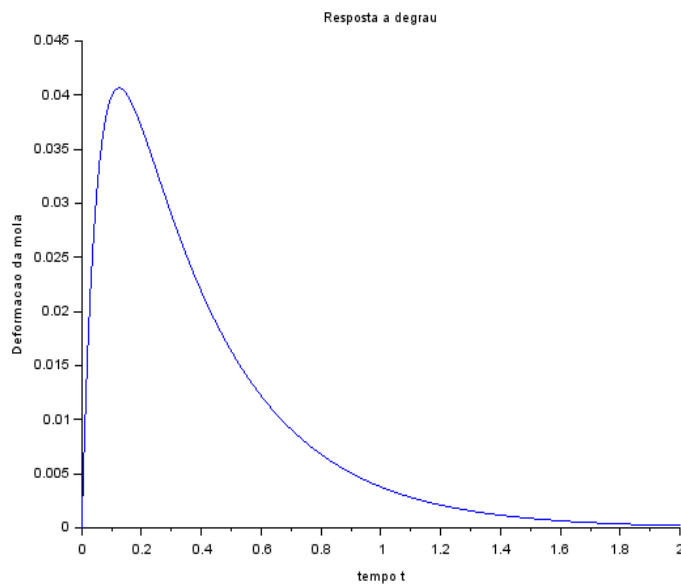


Caso 3

Parâmetros: $m = 1$ kg; $b = 20$ Ns/m; $k = 50$ N/m.

a) Condições iniciais: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

Aqui, observa-se o caso em que ocorre amortecimento supercrítico.



Os dois autovalores, bem como seus autovetores associados, são reais e distintos.


```

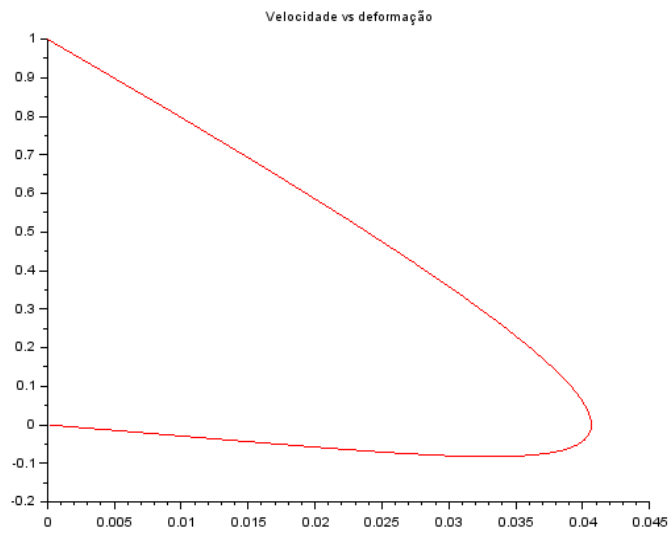
-->R
R =

    0.3231082  - 0.0584784
    - 0.9463620  0.9982887

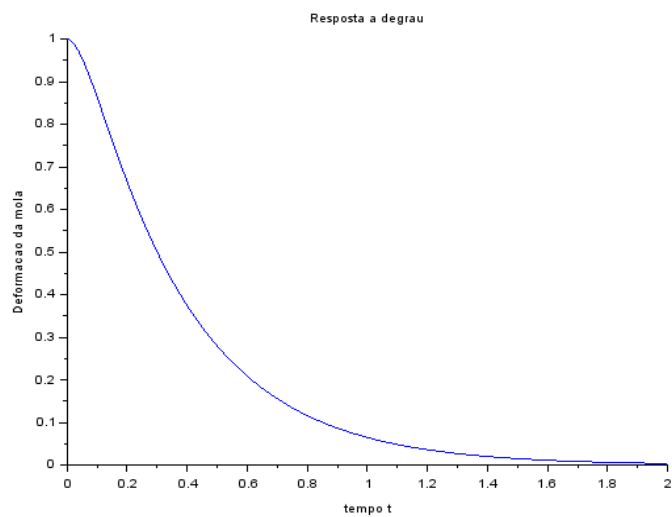
-->diagevals
diagevals =

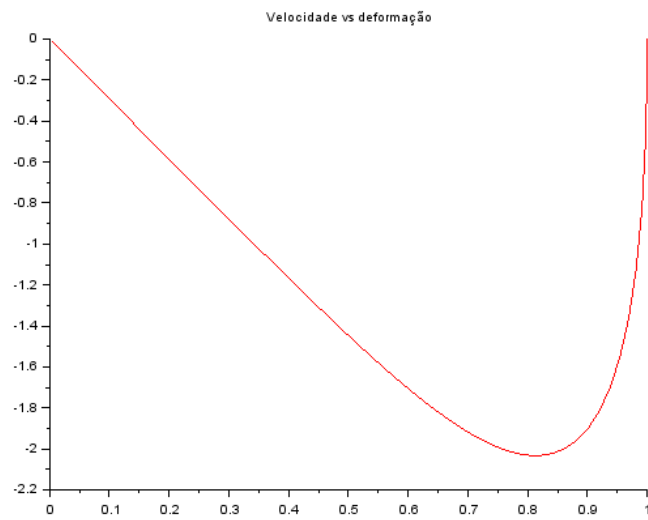
    - 2.9289322  0
    0             - 17.071068

```



b) Condições iniciais: $x_1 = 1$; $x_2 = 0$.





Reitere-se, aqui, que as posições dos pólos no plano complexo independem das condições iniciais e são parâmetros apenas da matriz A , que é relativa apenas à equação diferencial.