

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA POLITÉCNICA – DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

## **Lista 5**

Pedro Leonel Giannoni de Oliveira

Número USP: 10335569

São Paulo

2020

## 1. Exercício:

Obtenha as equações de estado e a função de transferência do seguinte sistema, e simule para uma entrada  $F(t)$  do tipo degrau (experimente outros tipos de entrada também), considerando a deformação  $x(t)$  da mola como saída:

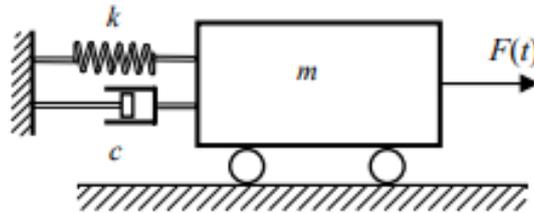


Figura 1 - Sistema massa-mola-amortecedor

- Equações diferenciais lineares:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}F(t) \end{aligned}$$

- EE:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u$$

- Função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Com isso, simulou-se o sistema para os casos propostos por meio do código em Scilab:

```
// Parâmetros do sistema:
```

```
m=1;
```

```
b=10;
```

```
k=1000;
```

```
// Polinômios da função de transferência:
```

```
n=1;
```

```
d=poly([k b m], 's', 'coeff');
```

```
// Função de transferência:
```

```
G=syslin('c',n/d)
```

```

// Resposta do sistema a uma entrada degrau (u=0 para t<0 e u=1 para t>0):
t=0:0.01:3;
u=ones(t);
// Condições iniciais:
x0=[0;0]; // x(0) = 0 e a derivada de x(t) no instante inicial também nula.

// Simulação com o comando csim:
[y]=csim(u,t,G,x0);

xset('window',1)
xset('thickness',2)
plot2d(t,y,2)
xtitle('Resposta degrau','Tempo (s)','Deformação (m)')

```

- Caso 1:  $m = 1$ ;  $b = 10$ ;  $k = 1000$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$$

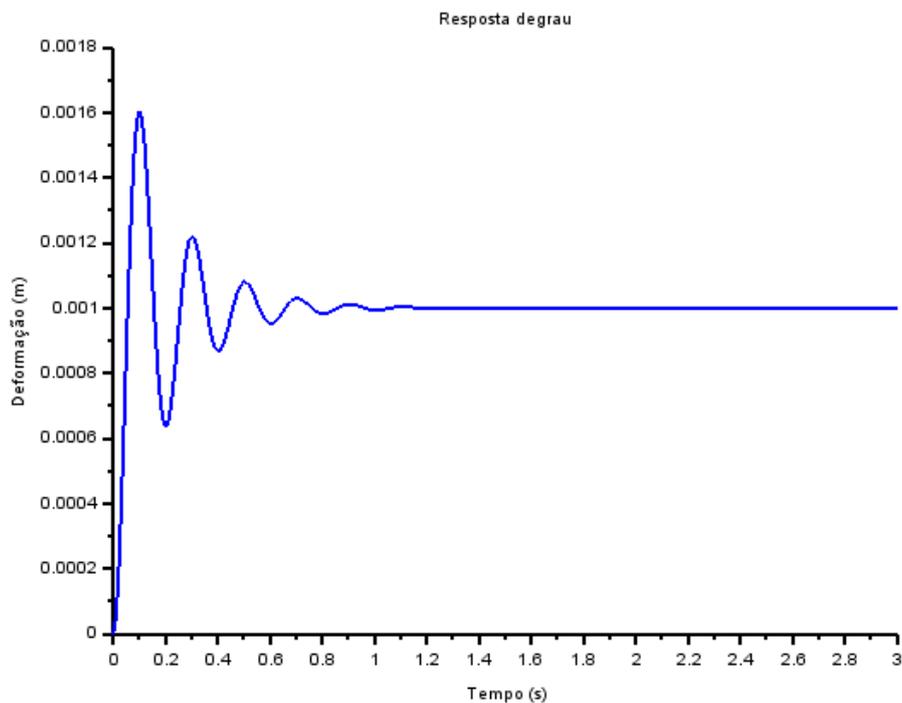


Figura 2 - Simulação de amortecimento subcrítico

Observa-se uma perda de energia oscilatória e decrescente, como é esperado para um amortecimento subcrítico.

- Caso 2:  $m = 1; b = 10; k = 25$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = 1$$

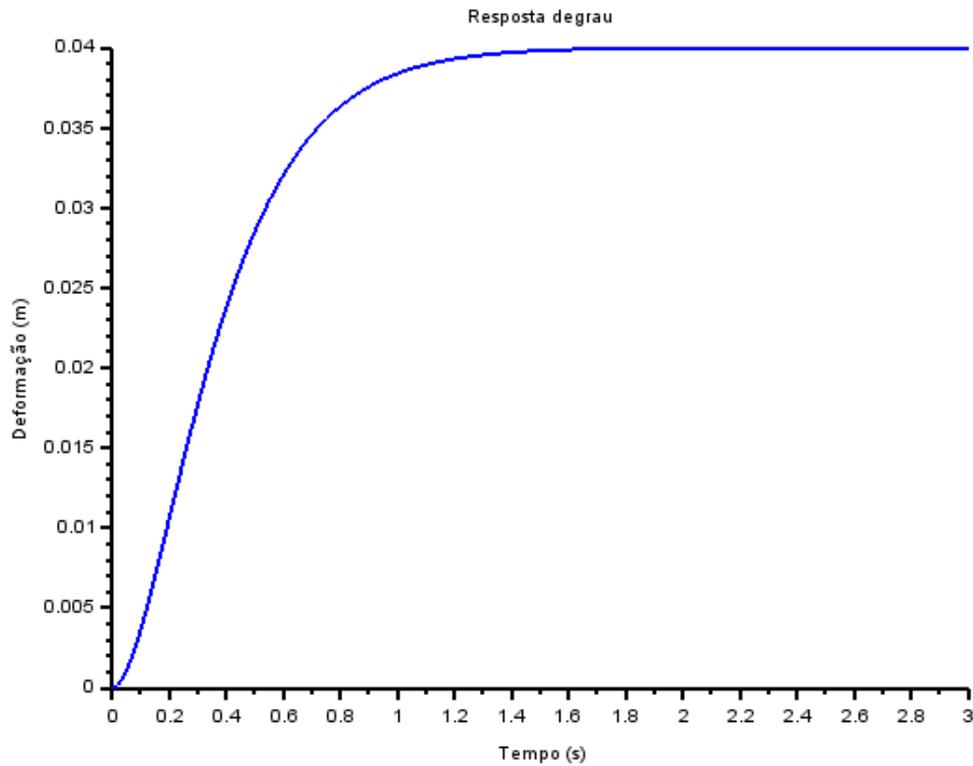


Figura 3 - Simulação de amortecimento crítico

Observa-se uma maior deformação devido a diminuição da constante elástica. Ademais, a resposta de degrau obtida é condizente com um amortecimento crítico, ou seja, sem oscilações e rápida estabilização.

- Caso 3:  $m = 1; b = 100; k = 100$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} > 1$$

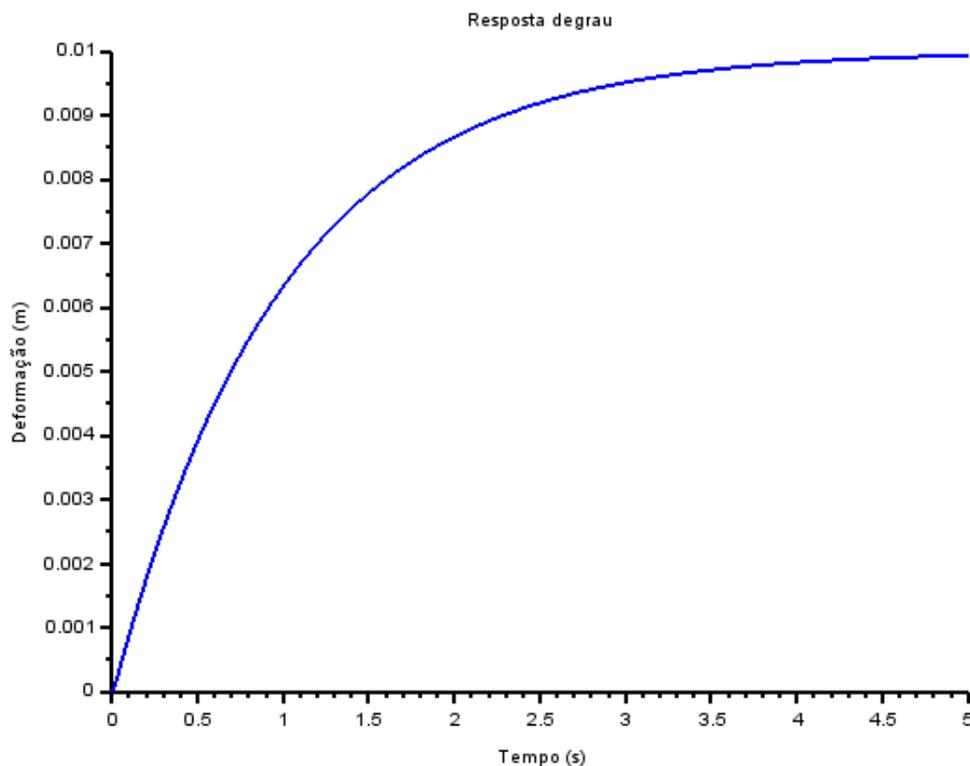


Figura 4 - Simulação de amortecimento supercrítico

Como esperado para um amortecimento supercrítico, o sistema leva mais tempo para se estabilizar quando comparado aos regimes anteriores (tempo de simulação de 5s).

## 2. Lição de casa

**2.1.** Considerando o exercício anterior, calcule os autovalores da matriz  $A$  e calcule as raízes do polinômio no denominador da função de transferência e compare. Estas raízes (e os autovalores) são os polos do sistema. Para o caso  $1 < \zeta$ , observe que as raízes (e também os autovalores) são números complexos. Verifique que o módulo deste número complexo é igual à frequência natural do sistema massa-mola-amortecedor. Verifique ainda que dividindo o módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo se obtém o coeficiente de amortecimento. Observe que a frequência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do polo.

- Autovalores da matriz A:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{m} & \lambda + \frac{c}{m} \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + \frac{c}{m}) + \frac{k}{m} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

- Raízes da função de transferência:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0$$

Assim, percebe-se que os autovalores da matriz A também são as raízes do denominador da função de transferência, que são os polos do sistema. Considerando  $m = k = c = 1$ , obtém-se os polos, a frequência natural e o amortecimento:

- Polos:

$$p_1 = -0.5 + 0.866i$$

$$p_2 = -0.5 - 0.866i$$

- Frequência natural:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$$

- Amortecimento:

$$\xi = \frac{c}{4\sqrt{km}} = 0.5$$

Assim, verifica-se que:

- O módulo dos polos ( $\sqrt{0,5^2 + 0,866^2} = 1$ ) é igual a frequência natural ( $\omega_n = 1$ ).
- Dividindo o módulo da parte real dos polos pelo módulo destes, obtém-se o amortecimento ( $0,5/1 = \xi = 0,5$ ).
- A frequência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária dos polos ( $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 0,866 = Im(p)$ ).

**2.2.** Simule o sistema do exercício para entrada nula e diferentes condições iniciais não nulas. Mostre o gráfico de  $v$  por  $x$ , e experimente mudar os parâmetros do sistema, tal que se obtenha 3 situações diferentes: polos complexos, polos reais e iguais, e polos reais e distintos. O resultado pretendido são três figuras. Na primeira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os polos sejam complexos. Na segunda figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os polos sejam reais e iguais. Na terceira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os polos sejam reais e distintos. Para cada figura construa outra figura mostrando os polos correspondentes no plano complexo. Observe a ligação entre o comportamento transitório e a posição dos polos no plano complexo.

As simulações foram realizadas variando a constante "c" e mantendo  $m = k = 1$ . Ademais, percebe-se que a posição dos polos no plano complexo determina o comportamento transitório, como era esperado.

### 2.2.1. Polos complexos

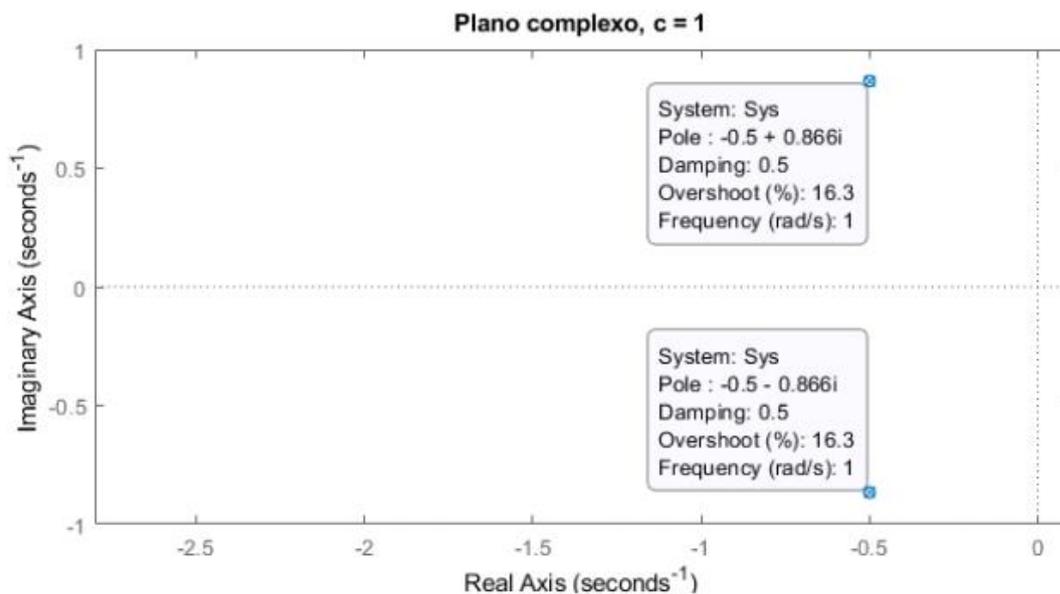


Figura 5 - Polos complexos

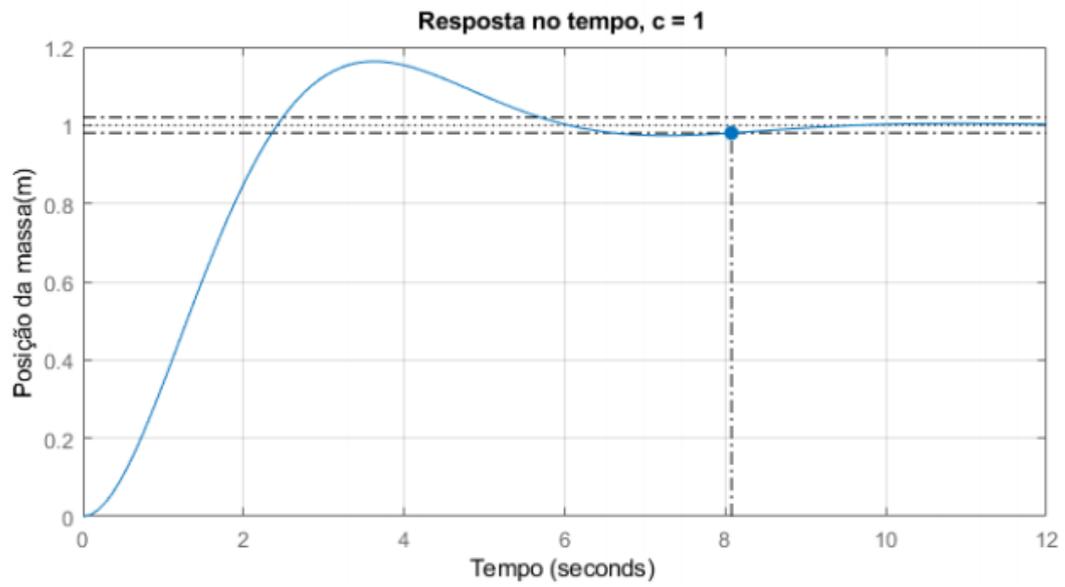


Figura 6 - Resposta no tempo - polos complexos

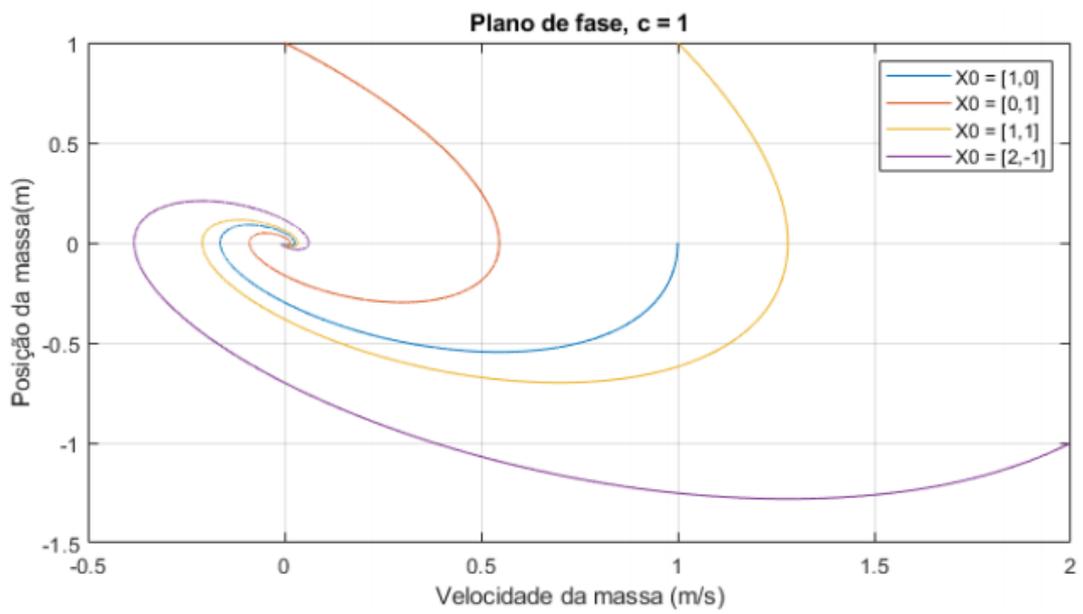


Figura 7 - Plano de fases - polos complexos

## 2.2.2. Polos reais e iguais

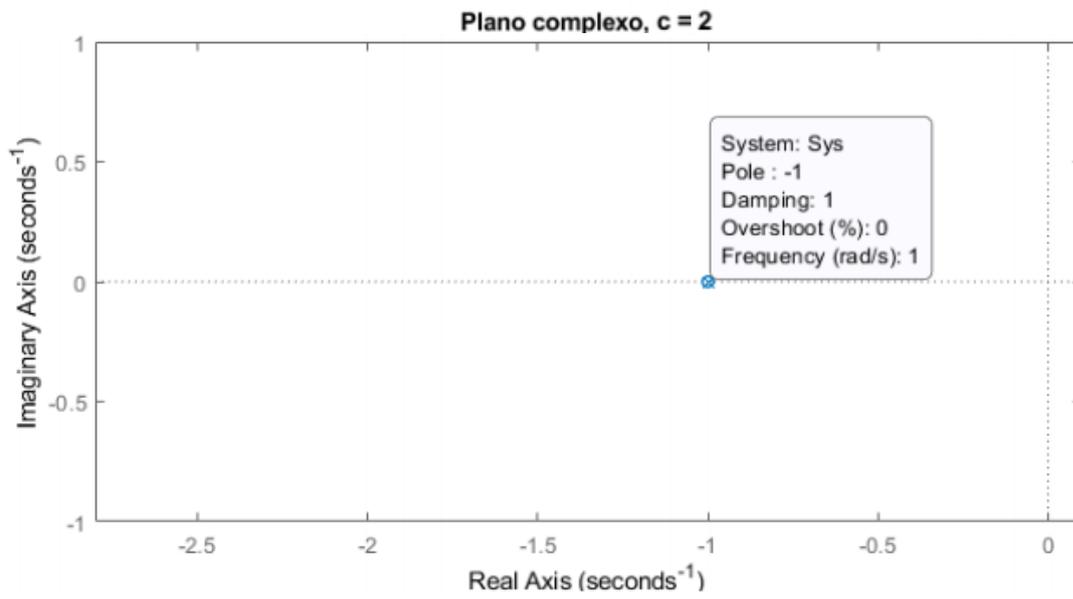


Figura 8 - Polos reais e iguais

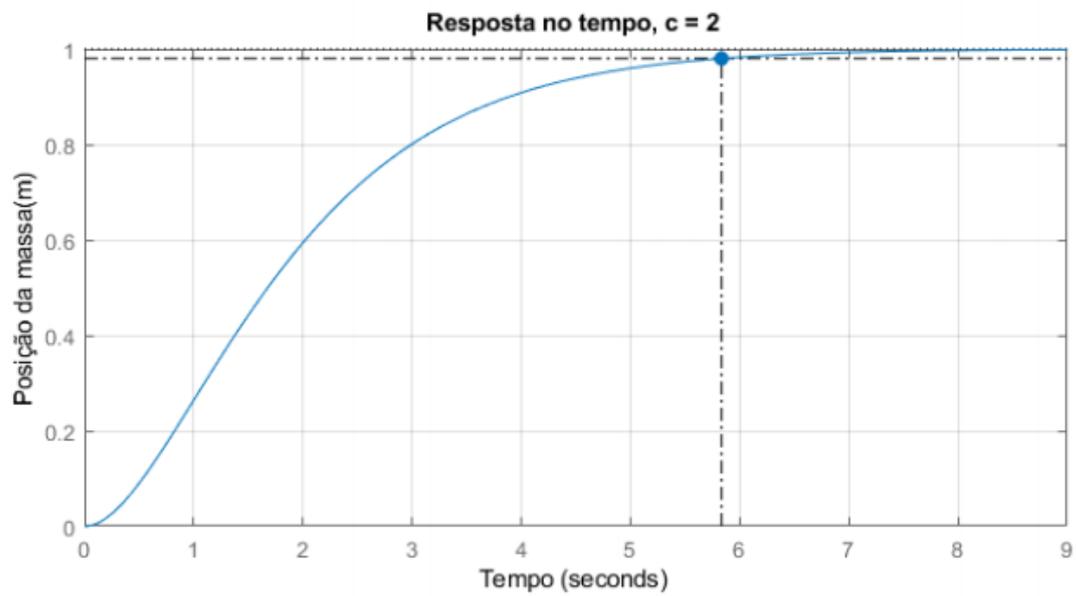


Figura 9 - Resposta no tempo - polos reais e iguais

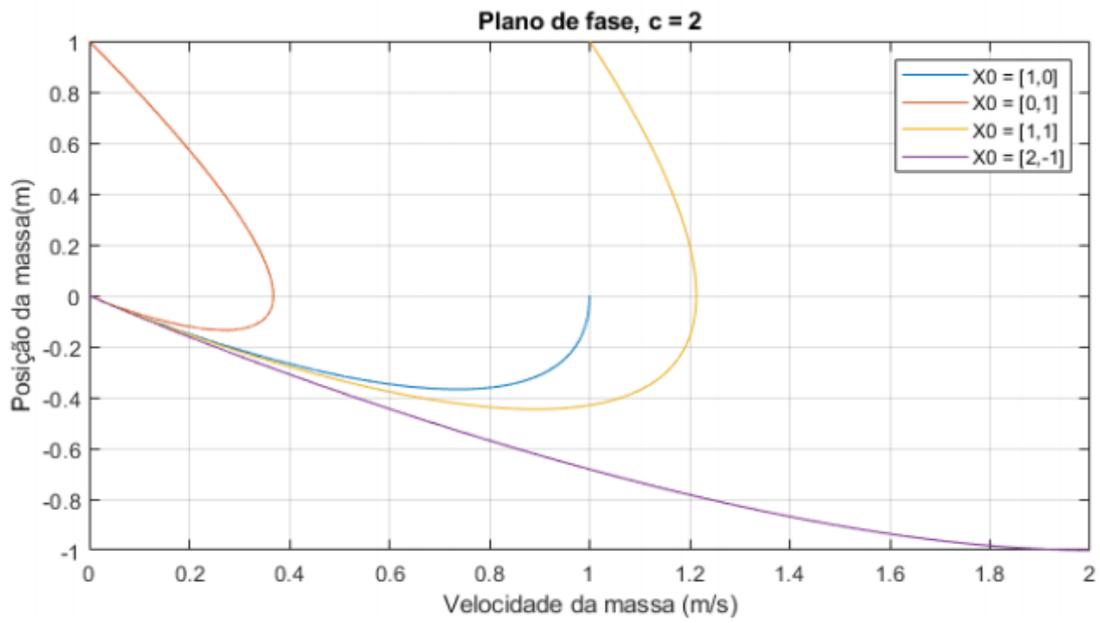


Figura 10 - Plano de fases - polos reais e iguais

### 2.2.3. Polos reais e distintos

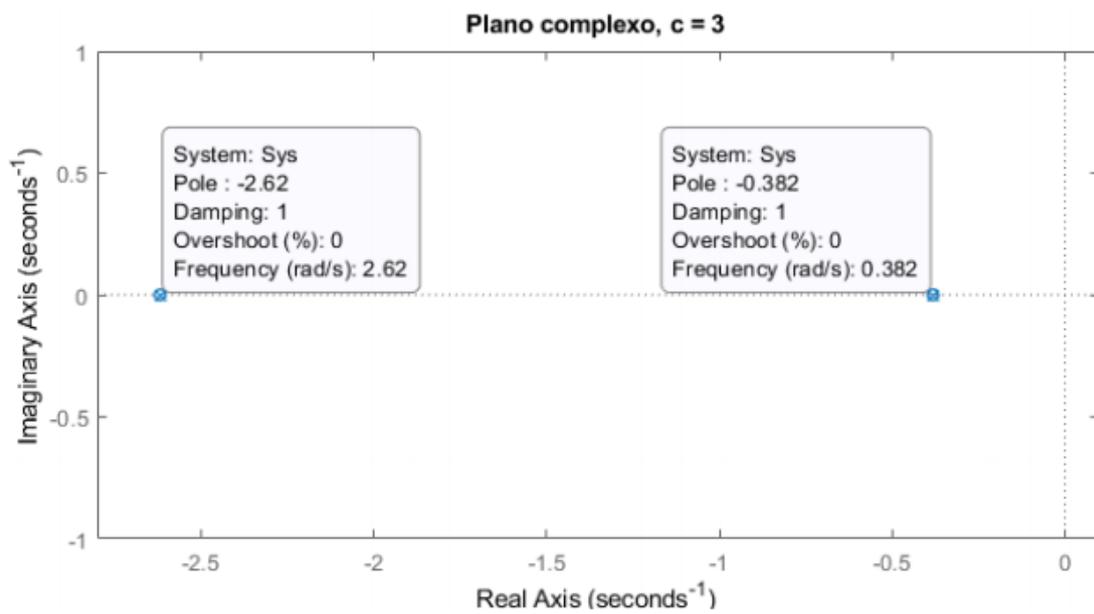


Figura 11 - Polos reais e distintos

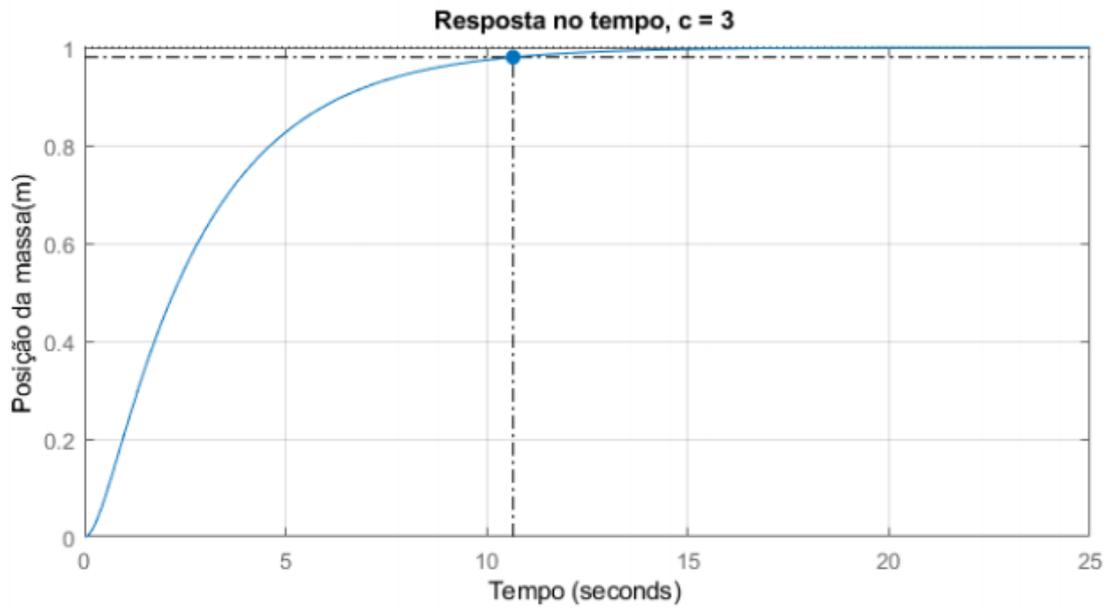


Figura 12 - Resposta no tempo - polos reais e distintos

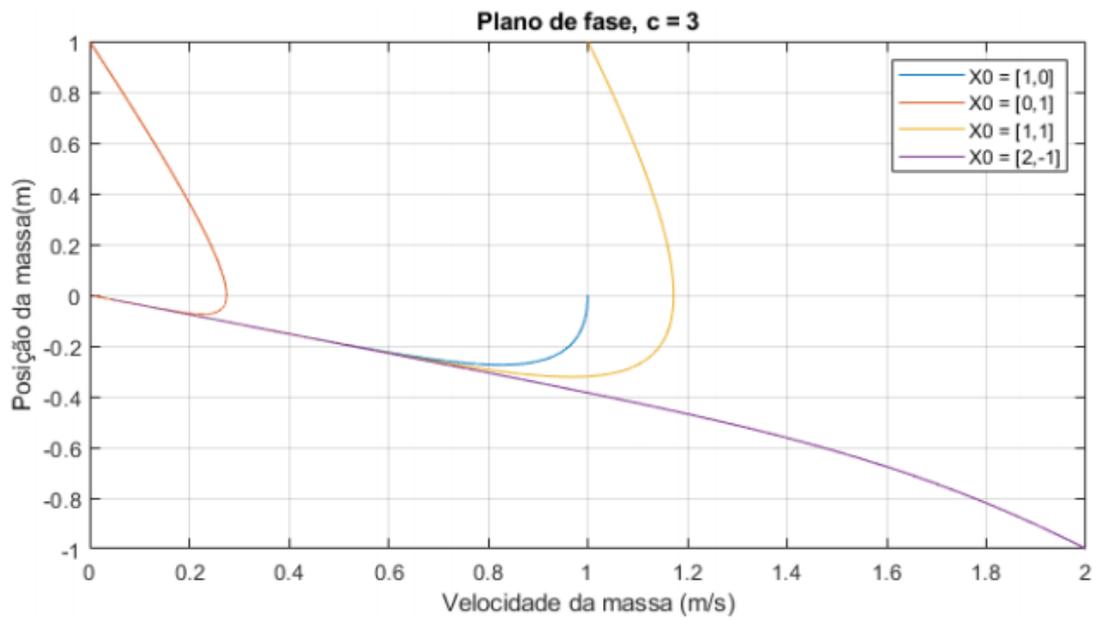


Figura 13 - Plano de fases - polos reais e distintos