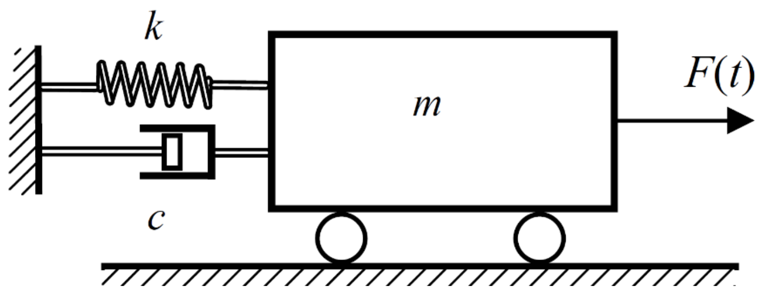
PME3380 - Lista E

Henrique Kuhlmann – 10772672

São Paulo, 22/10/2020O

O problema a ser modelado corresponde a um oscilador massa mola com excitação de uma força F genérica.



Através da aplicação da segunda lei de Newton para o corpo de massa m, obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{F(t)}{m}$$

Pode-se adotar um vetor de estados para reescrever a equação diferencial como um sistema de equações diferenciais:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

De forma que podemos afirmar que:

$$\dot{X} = AX + Bu$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

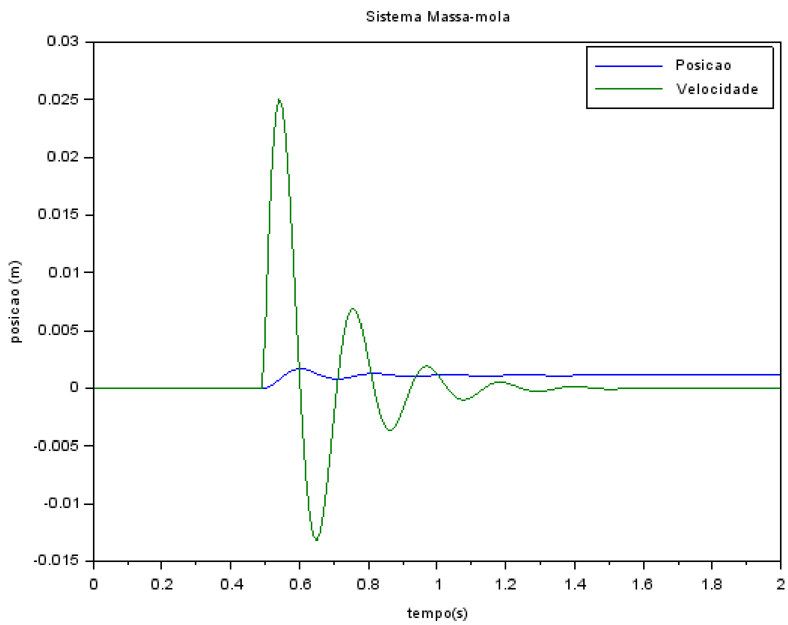
$$u = F(t)$$

A função de transferência pode ser calculada com facilidade a partir da equação diferencial:

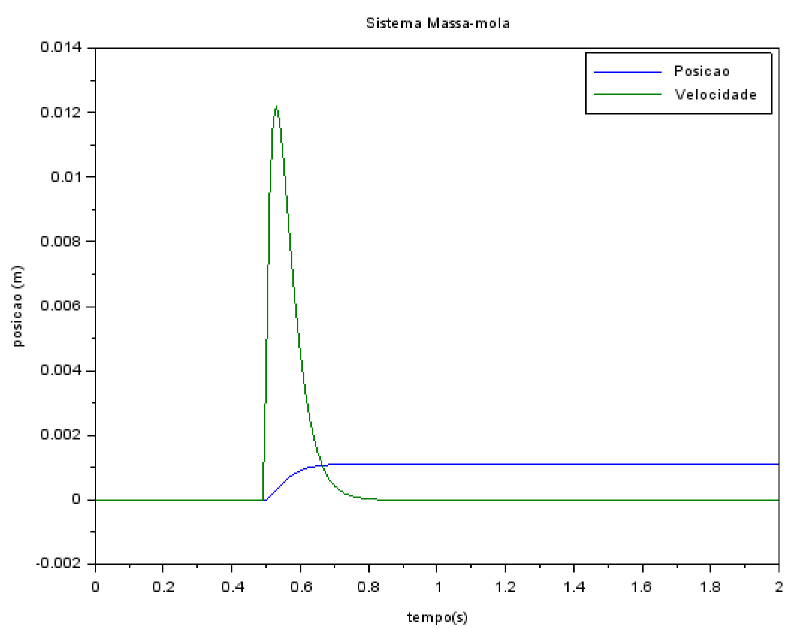
$$FT = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

As simulações foram feitas para diferentes valores de ζ, com condições inicias nulas. Os valores de massa e constante elástica foram de 1kg e 900 N/m, respectivamente. A força aplicada, em todos os casos foi de 1N, do tipo degrau.

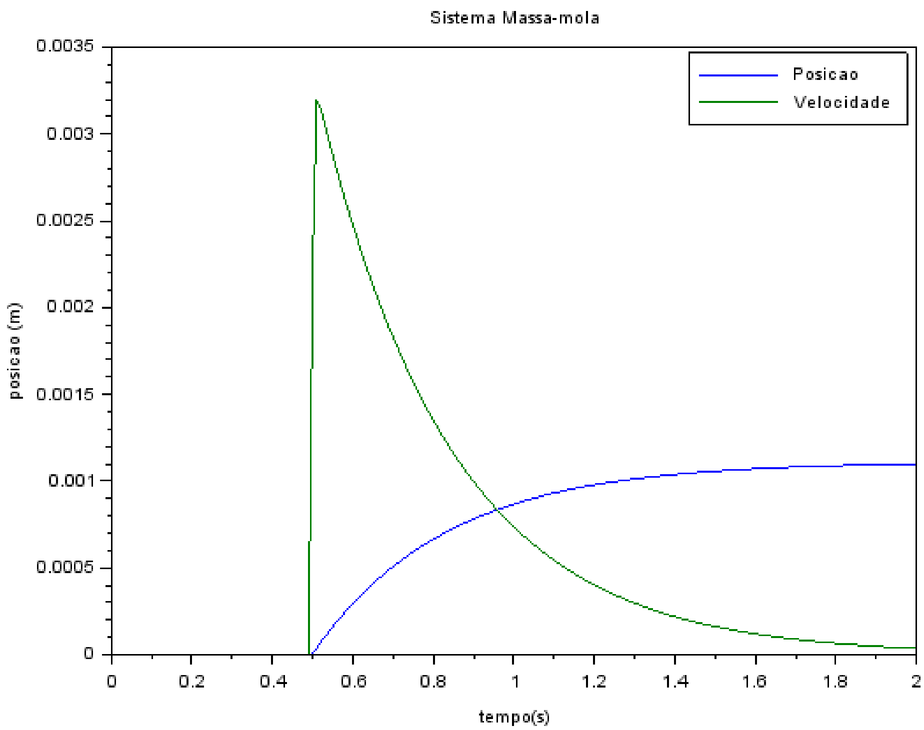
$$\zeta = 0,2$$



$$\zeta = 1$$



$$\zeta = 5$$



Para o cálculo dos auto valores da matriz A, basta calcular o seguinte determinante, igualando-o a zero:

$$\det(A - It)\,0$$

$$mt^2 + ct + k = 0$$

Para a primeira simulação:

$$\zeta = 0{,}2$$

$$c = 12$$

$$t = -6 \pm 12\sqrt{6}\,i$$

Eh possível notar que:

a) O modulo dos polos é igual à frequência natural do sistema:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{6^2 + \left(12\sqrt{6}\right)^2} = 30$$

b) Ao dividir a parte real do polo pelo seu módulo, obtém-se ζ:

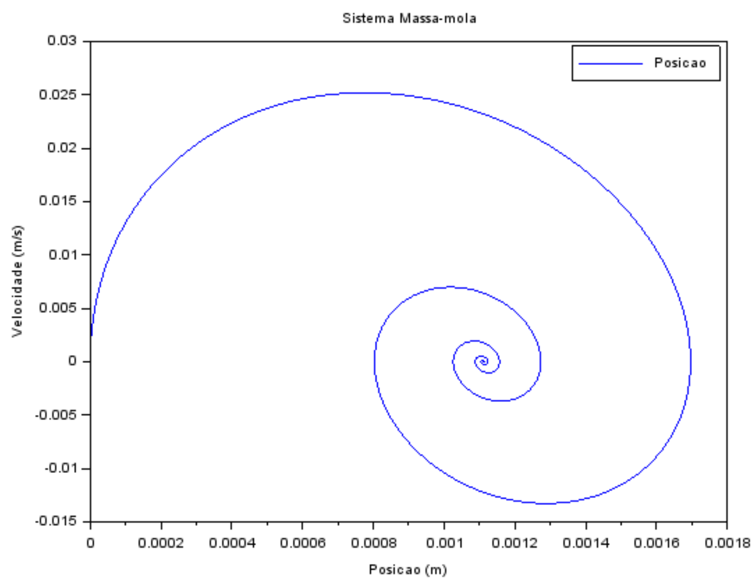
$$\frac{Re(t)}{|\mathrm{t}|} = \frac{6}{30} = 0{,}2$$

c) A frequência de oscilação é igual à parte imaginaria do polo:

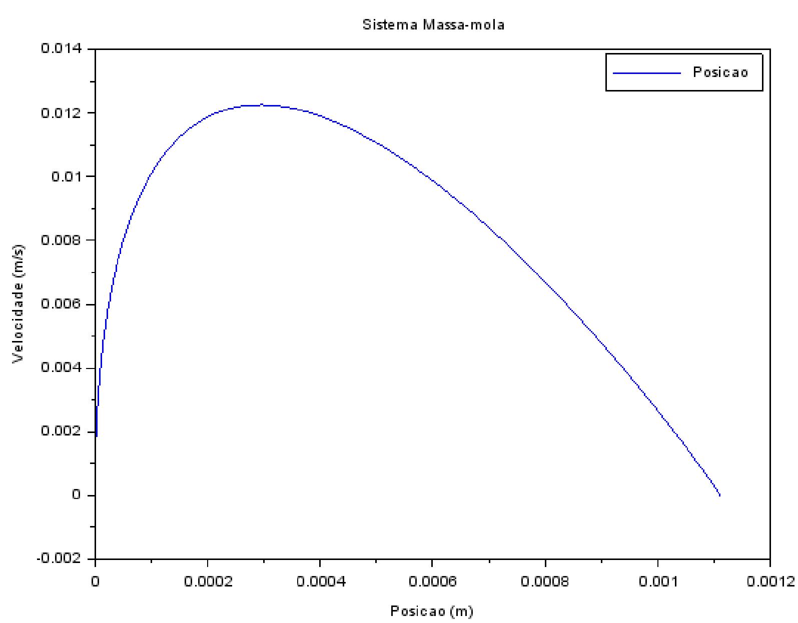
$$Im(t) = 12\sqrt{6} = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$$

Também é possível traçar o gráfico do espaço por velocidade das simulações anteriores:

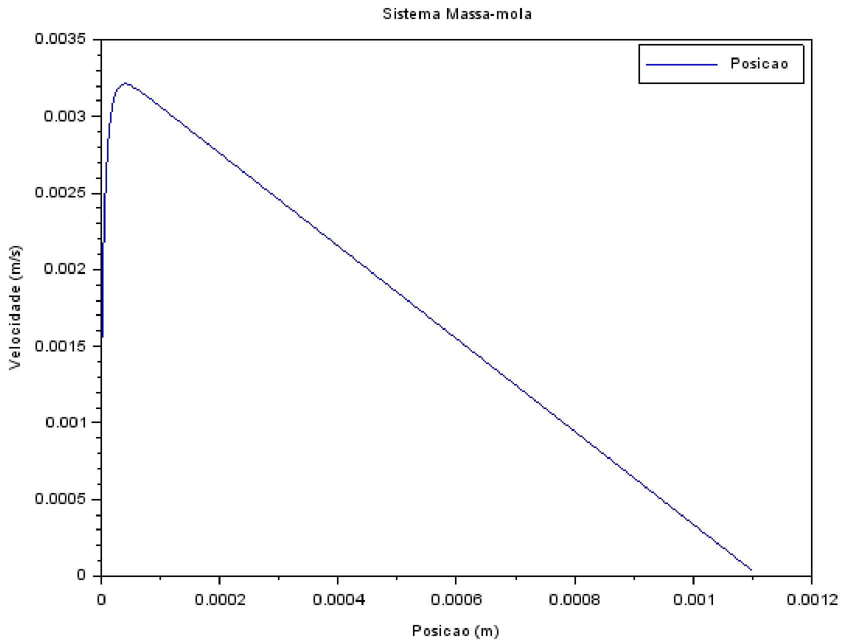
$$\zeta = 0{,}2$$



$$\zeta = 1$$



$$\zeta = 5$$



Sistema Massa-mola
Posicao
Velocidade (m/s)
Posicao (m)
0.0035
0.003
0.0025
0.002
0.0015
0.001
0.0005
0
0.0002
0.0004
0.0006
0.0008
0.001
0.0012