LISTA E

PME 3380- Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Escola Politécnica

Universidade de São Paulo

São Paulo

2020

Gabriel Rodrigues Camargo

NUSP: 10772460

1. Introdução

No início da tarefa dessa lista, é iniciado um estudo sobre um sistema massa mola amortecedor como mostrado a seguir:

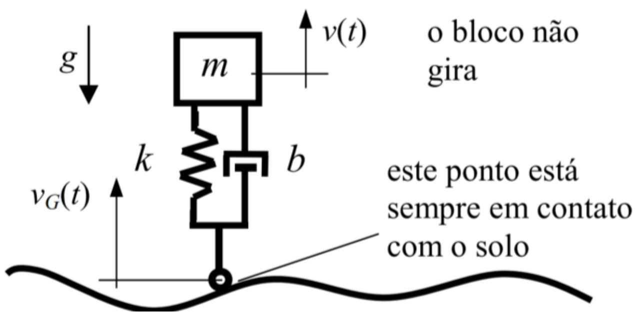

Figura 1- Sistema massa mola amortecedor

Tendo como entrada a velocidade do solo, pode-se simular o sistema com os seguintes parâmetros:

$$m = 1 \text{ kg}$$
$$b = 10 \text{ N.s/m}$$
$$k = 900 \text{ N/m}$$

Dessa forma, obtém-se a seguinte resposta do da deformação da mola:

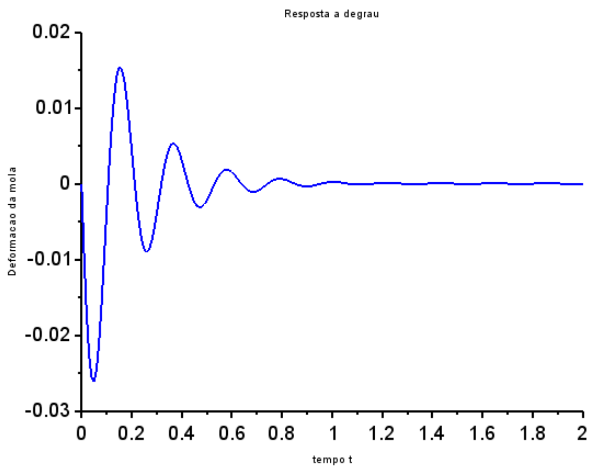

Figura 2-Deformação da mola conforme o tempo

2. Sistema Amortecido Forçado

Para a outra parte da lista, será analisado o sistema massa mola amortecedor forçado na direção horizontal, como pode ser visto na Figura 3:

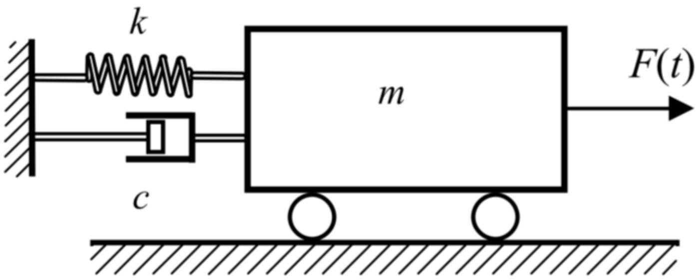

Figura 3- Sistema forçado horizontal

Aplicando o Teorema do Movimento do Baricentro na horizontal obtém se a seguinte equação:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) \tag{1}$$

Fazendo a substituição de $x = x_1$ e $\dot{x} = x_2$ chega-se no seguinte sistema de equações:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{F(t)}{m} \tag{3}$$

E na forma matricial:

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}F(t) \tag{4}$$

Para resolver o sistema, usa-se a transformada de Laplace que resulta em:

$$\mathcal{L}_1: sX_1 = X_2 \tag{5}$$

$$\mathcal{L}_2: sX_2 = -\frac{k}{m}X_1 - \frac{b}{m}X_2 + \frac{f}{m} \tag{6}$$

Lembrando que a saída do sistema será Y=X_1, se escreve a função G(s) como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \tag{7}$$

A partir desses resultados, estuda-se os resultados do sistema para uma excitação de degrau, ressaltando que ambos os métodos usados resultam nos mesmos valores.

2.1 Respostas do sistema

Para a simulação do sistema foram considerados os seguintes parâmetros:

$$\begin{cases} m = 1kg \\ b = 2\zeta\sqrt{km} \\ k = 900N/m \end{cases}$$

Onde as condições iniciais também eram nulas e foi variando os valores de ζ:

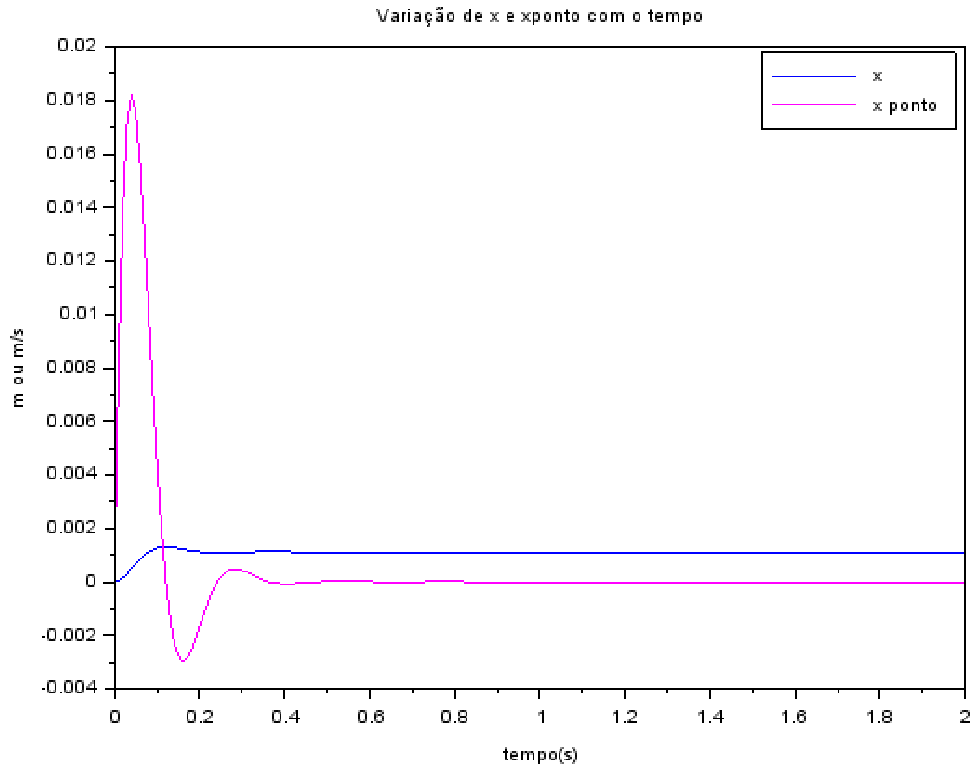

Figura 4- Simulação para $\zeta = 0{,}5$

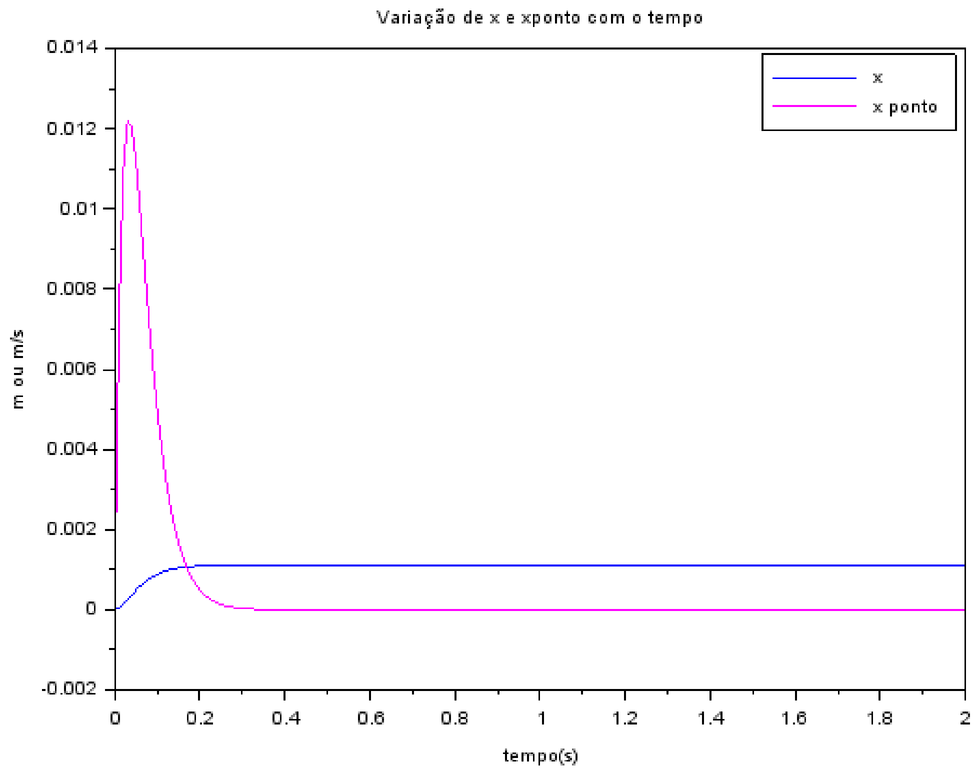

Figura 5- Simulação para $\zeta = 1$

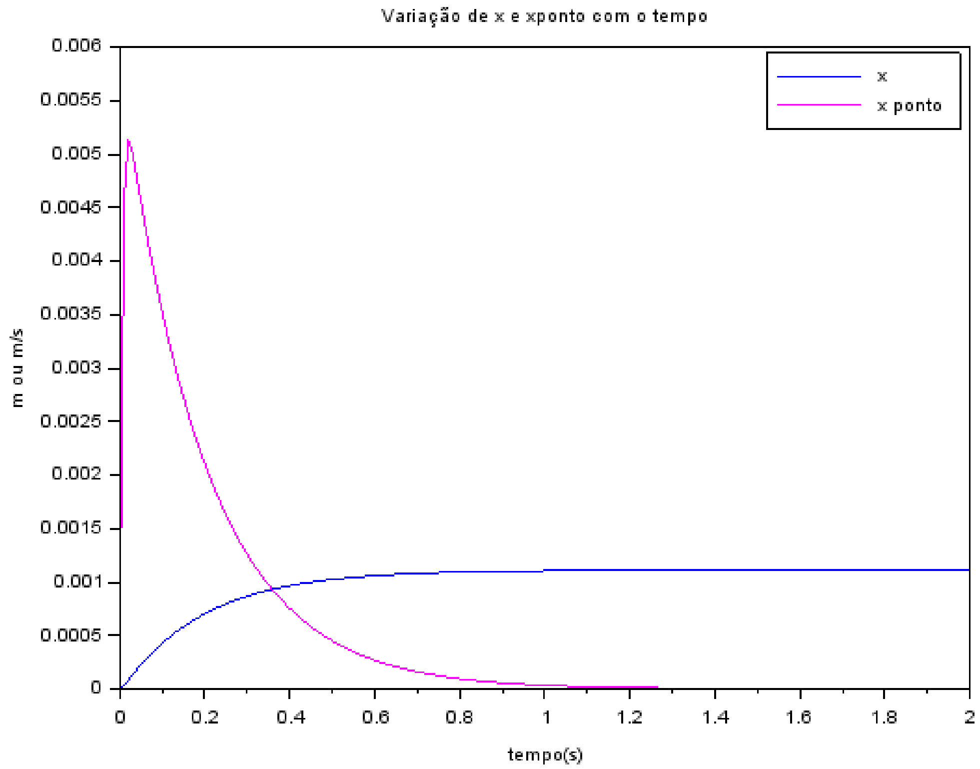

Figura 6- Simulação para $\zeta = 3$

3. Autovalores da matriz A e raízes de G(s)

Os autovalores de A são calculados a partir do determinante da matriz:

$$det\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}-\lambda \end{bmatrix}=0 \tag{8}$$

$$-\lambda\left(-\frac{b}{m}-\lambda\right)-1(-\frac{k}{m})=0 \tag{9}$$

Resolvendo o sistema com os mesmos parâmetros anteriores com $\zeta < 1$, obtém se as mesmas raízes do polinômio G(s) que são:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3 + 9\sqrt{\ } 11\mathrm{i} \\ \lambda_2 = -3 - 9\sqrt{\ } 11\mathrm{i} \end{cases} \tag{10}$$

As principais análises que podem ser feitas com relação a esses resultados são 3 principais. A primeira é que a divisão do módulo da parte real do resultado complexo pelo seu módulo gera o coeficiente de amortecimento (ζ):

$$\frac{|Re(\lambda)|}{|\lambda|} = 0.1 = \zeta \tag{11}$$

Em segundo, é igual os valores do módulo da parte imaginária com a frequência de oscilação:

$$|Im(\lambda)| = 9\sqrt{11} = \sqrt{1-\zeta^2}\omega = 29{,}9\ \mathrm{rad/s} \tag{12}$$

Por último, o módulo do valor do polo é igual ao valor da frequência natural:

$$|\lambda| = 30 = \omega = 30 \tag{13}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{900}{1}} = 30\mathrm{rad/s} \tag{14}$$

3. Resultados com diversas condições iniciais

Para essa secção foram simuladas com os mesmos parâmetros anteriores gráficos da velocidade (V) por tempo, obtendo-se os seguintes resultados:

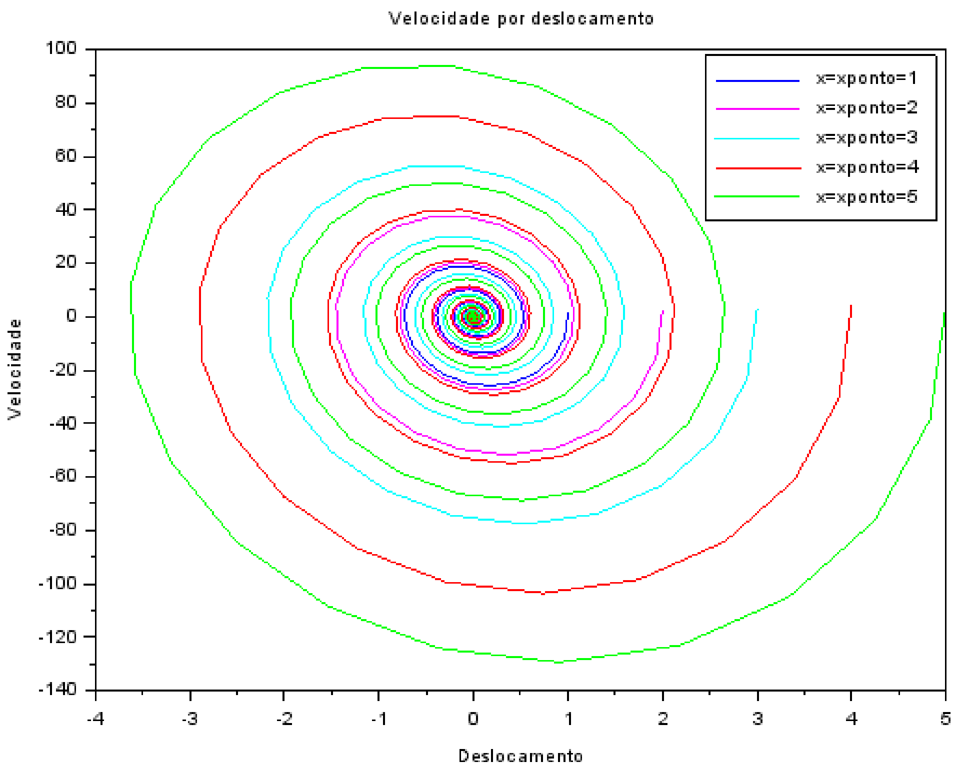

Figura 7- Simulação para $\zeta = 0{,}5$

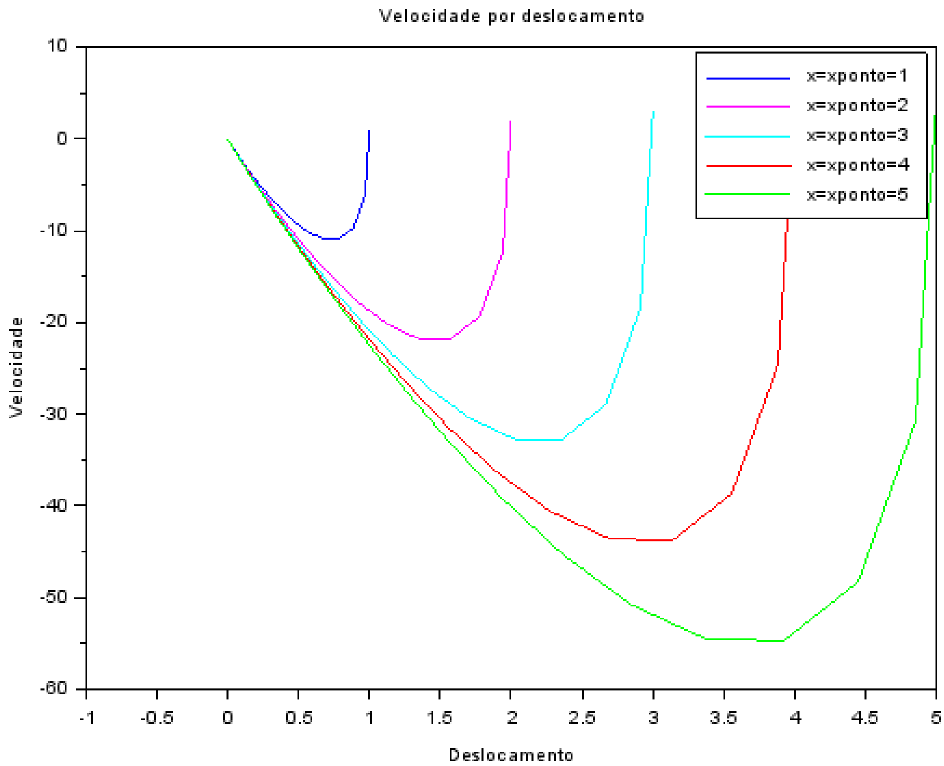

Figura 8- Simulação para $\zeta = 1$

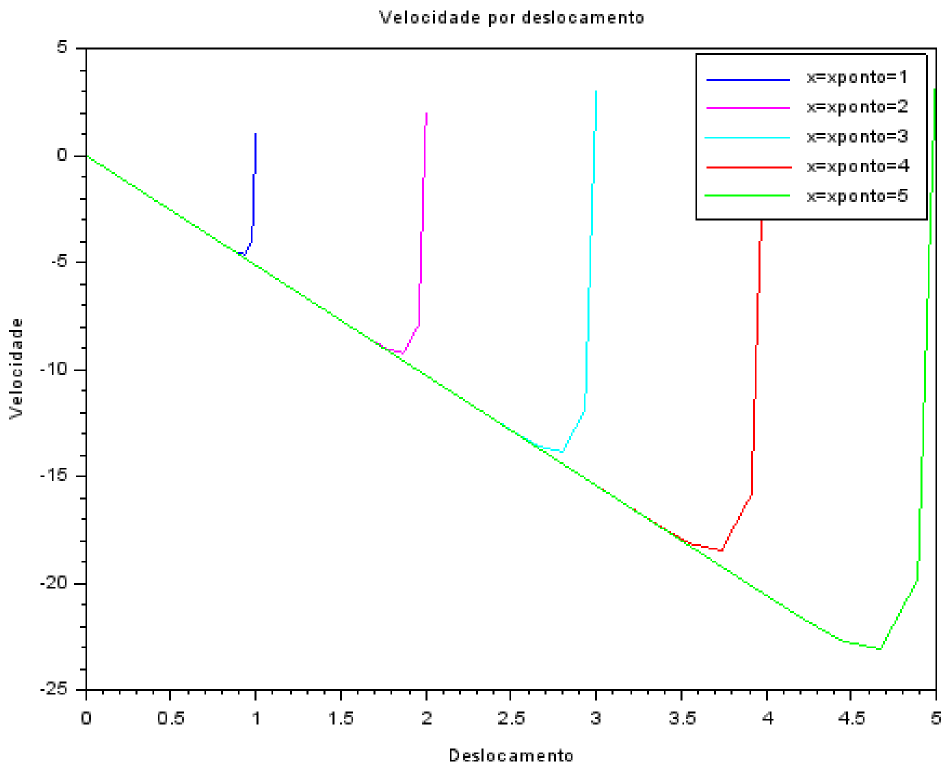

Figura 9- Simulação para $\zeta = 3$

4. Códigos usados

Parte 1

```
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;b=10;k=900;
// Definindo os polinomios da funcao de transferencia:
// Numerador:
n=(-m)*poly(0,'s','roots');
// Denominador
d=poly([k b m],'s','coeff'); //observe a ordem contraria dos coeficientes
// Montando a funcao de transferencia, onde o parametro 'c' indica sistema de
// tempo continuo. Se for um sistema de tempo discreto, use o parametro 'd'.
G=syslin('c',n/d)
// Simulando o sistema para uma entrada degrau (u=0 para t<0 e u=1 para t>0):
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u=ones(t);
// Definindo o vetor de condicoes iniciais:
// O sistema é de segunda ordem, logo sao duas condicoes iniciais.
// Não definindo as condicoes iniciais o programa assume como sendo nulas.
x0=[0;0]; // x(0) = 0 e a derivada de x(t) no instante inicial tambem eh nula.
// Realizando a simulacao com o comando csim:
[y]=csim(u,t,G,x0);
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)
// Mostrando o resultado da simulacao:
xset('thickness',2)
xset('font size',4)
plot2d(t,y,2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Deformacao da mola')
```

Parte 2

```
clear all
//parametros
m= 1;
k=900;
Cc =3;
b=2*Cc*sqrt(k*m);
// definicoes das matrizes
A=[0 1 ; -k/m -b /m] ;
B=[ 0; 1 /m] ;
C=[0 0];
D=[ 0 ];
// sistema de matrizes
Sisforcado=syslin("c",A,B,C,D);
//tempo
t = 0:0.01 :2;
```

```
u=ones(2*t);
//posicao de eq
x0e = [0;0];
// simulacao para o intervalo de tempo proposto
[y,x]=csim (u,t,Sisforcado,x0e);
// valores de velocidade e posicao
xf= x(1,:);
xpf= x(2,:);
f1=scf(1);
plot(t,xf);
plot(t,xpf, "m");
legend(["x" , "x ponto"])
xtitle("Variação de x e xponto com o tempo" , "tempo(s)" , "m ou m/s ") ;
```

Parte 3

```
clear all
//parametros
m= 1;
k=900;
Cc =3;
b=2*Cc*sqrt(k*m);
//diversas condicoes iniciais usadas
x0 = [1 2 3 4 5];
xp0 = [1 2 3 4 5];
//funcao do espaco de estados
funcprot(0)
 function dy=massamol(t, y)
 dy(1) = y(2);
 dy(2) = -(k/m)*y(1) - (b/m)*y(2);
 endfunction

// solucoes do sistema massa mola
for i = 1:length(x0)
 solution = ode([x0(i);xp0(i)],0,t,massamol);

 for j = 1:length(t)
 x(i,j) = solution(1,j);
 xp(i,j) = solution(2,j);
 end
end
//plotagem de graficos com as cores indicadas a seguir
scf(1);
colors = ["b","m","c","r","g"];
xtitle("Velocidade por deslocamento");
xlabel("Deslocamento");
ylabel("Velocidade");
for i = 1:length(x0)
 plot(x(i,:),xp(i,:),colors(i));
```

```
end
legend(["x=xponto=1" , "x=xponto=2","x=xponto=3","x=xponto=4", "x=xponto=5"])
```