Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Lista E

Nome: Yago Neves Yang

Número USP: 10772626

Disciplina: PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Docentes: Décio Crisol e Agenor Fleury

São Paulo

2020

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na sexta lista será analisado o comportamento de um dado sistema mecânico frente à uma variedade de valores de parâmetros escolhidos de tal forma que o sistema apresente resultados diferentes para dados parâmetros. Além disso, será abordado também a utilização da função de transferência para o sistema estudado, bem como algumas de suas implicações.

2 ANÁLISE DO SISTEMA

O sistema a ser analisado é o apresentado na Figura 1 que pode ser observada logo mais abaixo.

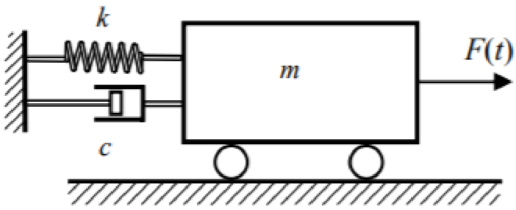

Figura 1 - Sistema mecânico a ser estudado

2.1 Espaço de estados (EE)

O movimento do sistema mecânico apresentado anteriormente pode ser descrito pela seguinte equação diferencial abaixo, onde $x(t)$ indica o deslocamento da massa m.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

Na forma de espaço de estados, essa equação pode ser apresentada da seguinte maneira, considerando-se que a entrada é $u = F(t)$.

$$p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \rightarrow \dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$$

$$\dot{p} = Ap + Bu \rightarrow \dot{p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t)$$

$$y = x_1 = x \rightarrow y = Cp + Du = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + [0]F(t)$$

2.2 Função de transferência

O sistema de equações que regem o comportamento do sistema mecânico em questão é o descrito logo abaixo.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{c}{m}x_2 + \dfrac{F(t)}{m} \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace tem-se o seguinte desenvolvimento.

$$\begin{cases} sX_1 - x_1(0) = X_2 \\ sX_2 - x_2(0) = -\dfrac{k}{m}X_1 - \dfrac{c}{m}X_2 + \dfrac{F'}{m} \end{cases}$$

Resolvendo este último sistema para X_1 e adotando condições iniciais nulas tem-se o seguinte resultado.

$$s^2X_1 = -\frac{k}{m}X_1 - \frac{c}{m}sX_1 - \frac{F'}{m} \rightarrow X_1(ms^2 + cs + k) = F'$$

$$X_1 = \frac{F'}{ms^2 + cs + k}$$

Como $y = x_1 = x$, vem o próximo desenvolvimento.

$$Y = \frac{F'}{ms^2 + cs + k} \leftrightarrow Y = \frac{1}{ms^2 + cs + k}F' \leftrightarrow Y = G(s)F'$$

Assim a função de transferência é dada pela seguinte fórmula.

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

2.3 Simulação do sistema mecânico

Afim de observar-se o comportamento de fato do sistema em estudo, foi feita uma simulação em *Scilab* utilizando-se o método do espaço de estados. Nesta simulação foram abordados três casos distintos relacionados ao parâmetro $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$, sempre fixando-se a massa $m = 1{,}0$ kg e a constante do amortecedor em $b = 10$ N.s/m e variando-se a constante da mola.

Para $\zeta < 1$ foi utilizado $k = 400$ N/m e foram obtidos os gráficos da Figura 2 e da Figura 3.

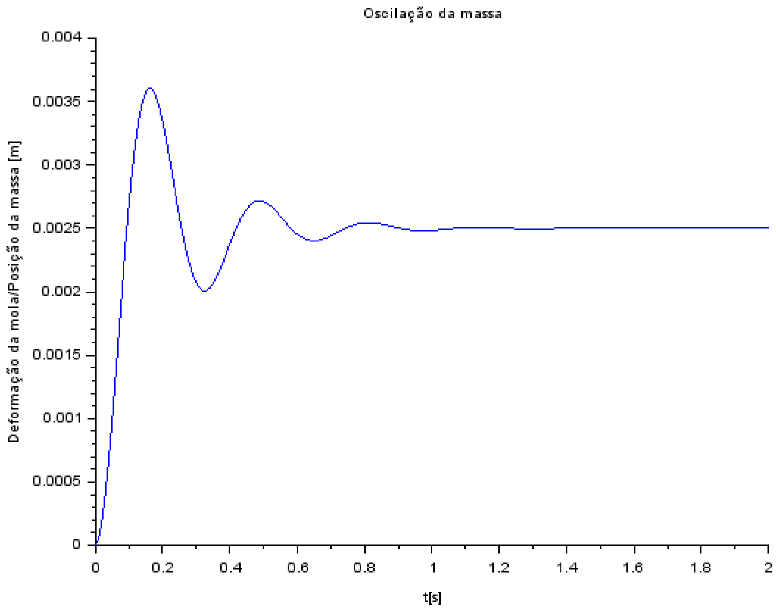

Figura 2 - Gráfico da oscilação da massa em função do tempo

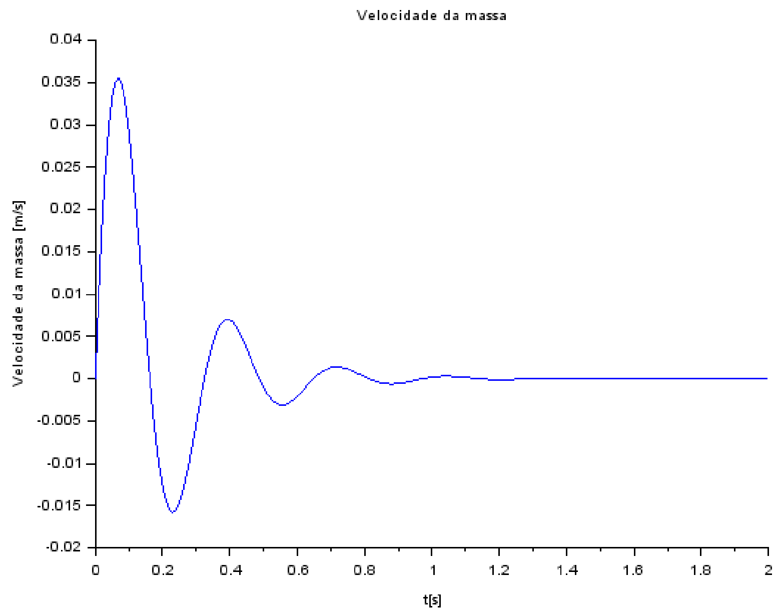

Figura 3 - Gráfico da velocidade da massa em função do tempo

Já para $\zeta = 1$ foi utilizado $k = 25$ N/m e obteve-se os seguintes gráficos da Figura 4 e da Figura 5.

e da Figura 3.

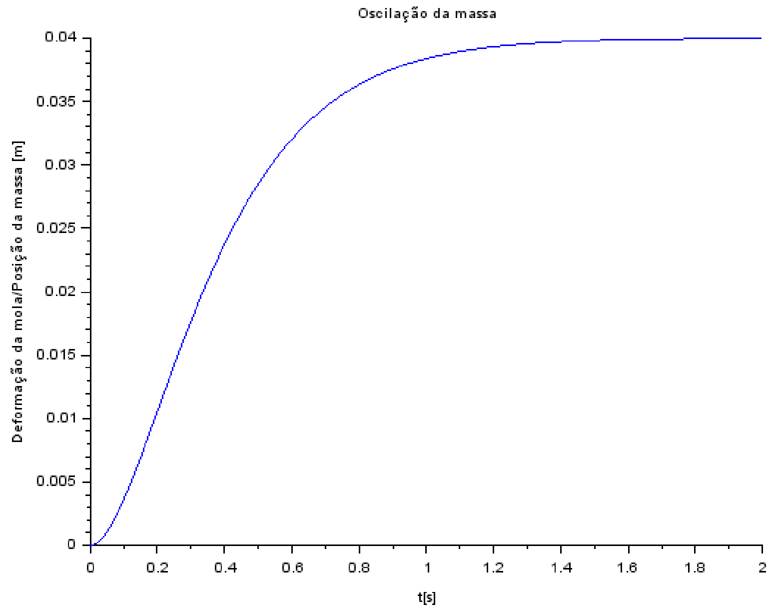

Figura 4 - Gráfico da oscilação da massa em função do tempo

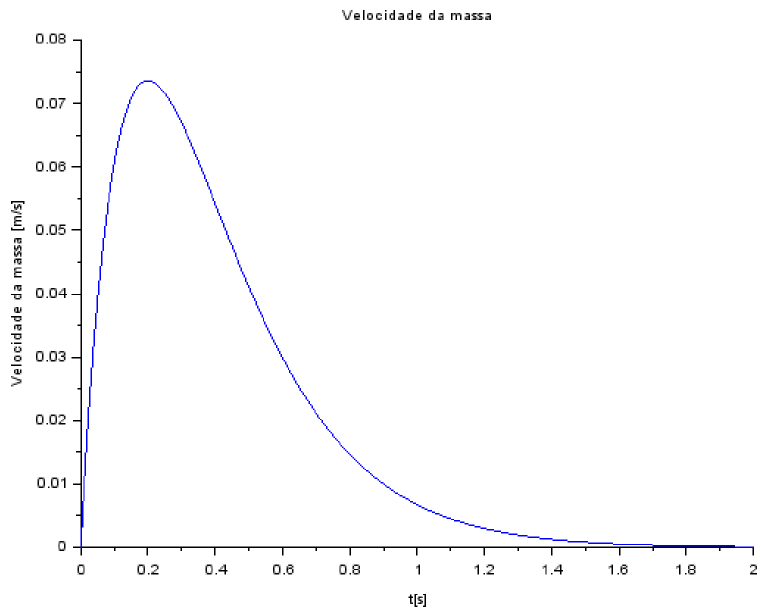

Figura 5 - Gráfico da velocidade da massa em função do tempo

Por fim para $\zeta > 1$ foi utilizado $k = 15$ N/m e foram obtidos os seguintes gráficos da Figura 6 e da Figura 7.

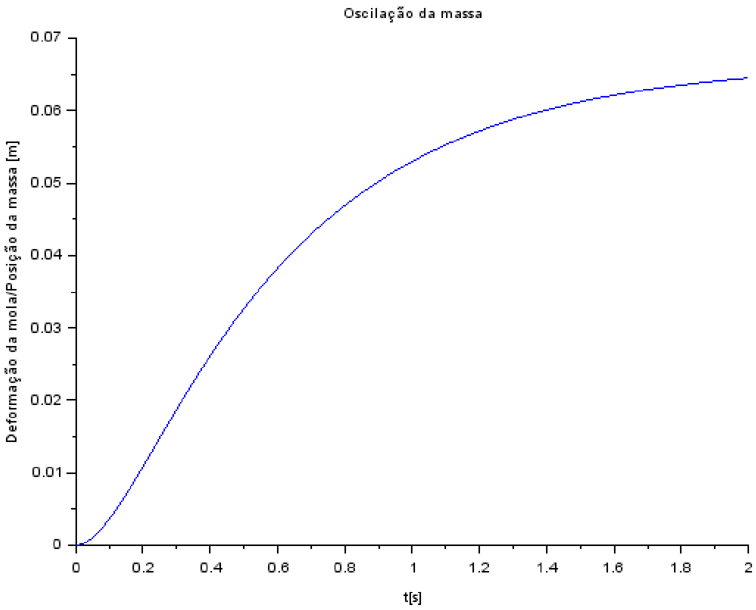

Figura 6 - Gráfico da oscilação da massa em função do tempo

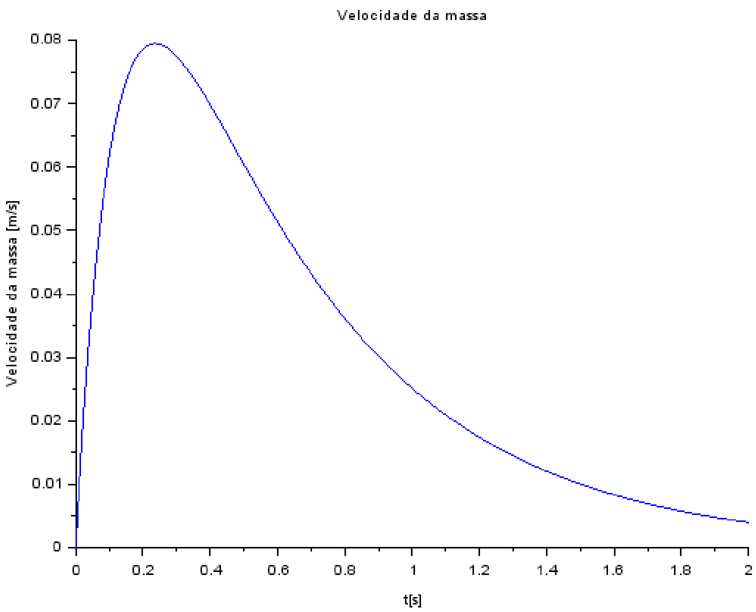

Figura 7 - Gráfico da velocidade da massa em função do tempo

2.4 Lição de casa – exercício 1

A matriz A foi obtida anteriormente e é apresentada logo mais junto com a obtenção de seu polinômio característico.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & \frac{c}{m} \end{bmatrix} \rightarrow p_c(z) = det \begin{bmatrix} 0 - z & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - z \end{bmatrix}$$

$$p_c(z) = z^2 + \frac{c}{m} z + \frac{k}{m}$$

Suas raízes são obtidas fazendo-se o cálculo a seguir.

$$mz^2 + cz + k = 0$$

$$z = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Da mesma forma, as raízes do polinômio do denominador da função de transferência podem ser obtidas com o seguinte desenvolvimento.

$$ms^2 + cs + k = 0$$

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Com isso nota-se que, de fato, as raízes de ambos os polinômio coincidem. Agora leve-se em consideração dos dados numéricos empregados na simulação apresentada anteriormente tal que $\zeta < 1$. Em posse destes valores, calculando-se as raízes através das fórmulas desenvolvidas anteriormente, obtém-se os seguintes valores complexos conjugados.

$$z' = s' = -5 - 5i\sqrt{15}$$

$$z'' = s'' = -5 + 5i\sqrt{15}$$

Note que o módulo dessas raízes é igual à frequência natural do sistema massa-mola-amortecedor.

$$|z'| = |z''| = |s'| = |s''| = \sqrt{5^2 + \left(5 \times \sqrt{15}\right)^2} = \sqrt{400} = 20 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Além disso, dividindo-se o módulo da parte real do número complexo pelo módulo do próprio número complexo obtém-se o coeficiente de amortecimento.

$$\frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{400}} = \frac{5}{20} = 0{,}25 = \frac{b}{2\sqrt{km}} = \frac{10}{2\sqrt{400 \times 1}} = \frac{5}{20} = 0{,}25 = \zeta$$

Por fim é possível perceber que a frequência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária da raiz calculada.

$$5 \times \sqrt{15} \approx 19{,}365 \approx \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{(1-\zeta^2)} \approx \sqrt{400} \times \sqrt{1-\left(\frac{5}{\sqrt{400}}\right)^2} \approx 19{,}365 \approx \omega_{osc}$$

2.5 Lição de casa – exercício 2

Para o exercício 2 será adotada entrada nula, logo $F(t) = 0$. Além disso, serão adotadas condições iniciais não nulas a serem especificadas para diferentes casos relacionados aos tipos dos polos pretendidos (complexos, reais e iguais, reais e diferentes). Por fim, as simulações tomarão como base a representação na forma de espaço de estados, tomarão como fixos os parâmetros de massa $m = 1$ kg e $b = 10$ N.s/m e usarão três condições iniciais não nulas distintas: $\begin{bmatrix} x_{0_1} \\ \dot{x}_{0_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_{0_2} \\ \dot{x}_{0_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x_{0_3} \\ \dot{x}_{0_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Cabe ainda a ressalva de que os serão plotados os polos no plano complexo e os gráficos da velocidade em função da oscilação (posição) da massa.

Para a obtenção de polos complexos, usa-se $k = 400$ N/m, com o qual se obtém os polos complexos já calculados anteriormente.

$$z' = s' = -5 - 5i\sqrt{15}$$

$$z'' = s'' = -5 + 5i\sqrt{15}$$

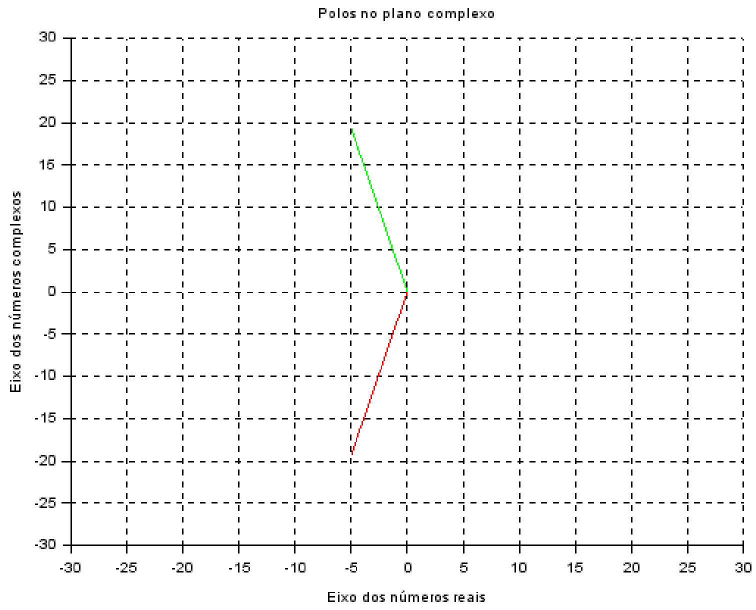

Figura 8 - Polos no plano complexo

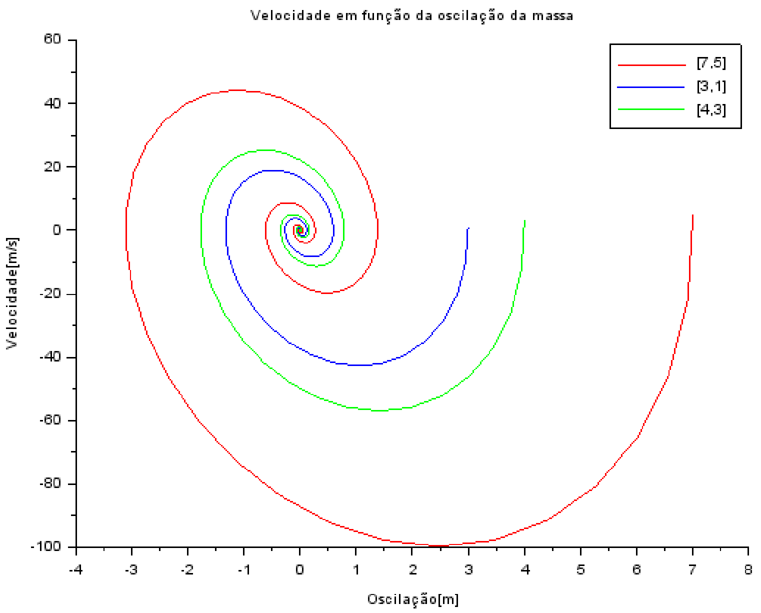

Figura 9 - Velocidade em função da posição da massa

Para a obtenção de polos reais iguais, usa-se $k = 25$ N/m, com o qual se obtém os seguintes polos.

$$z' = s' = z'' = s'' = -5$$

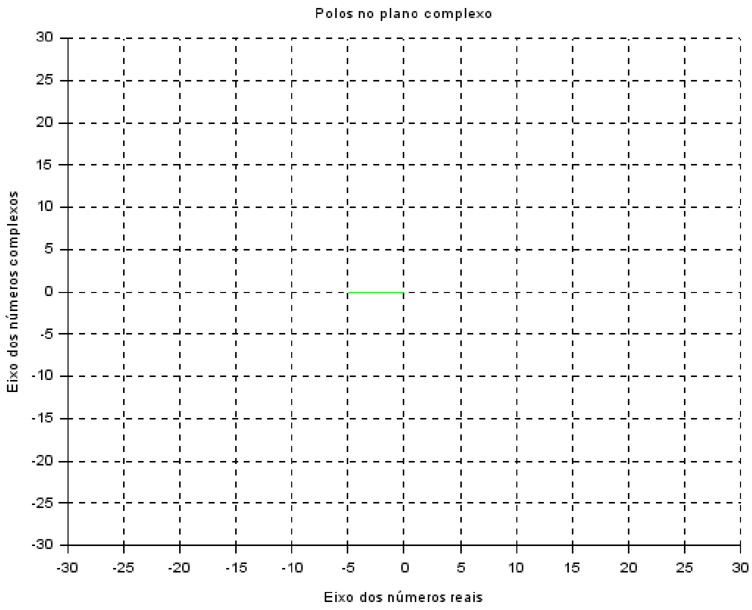

Figura 10 - Polos no plano complexo

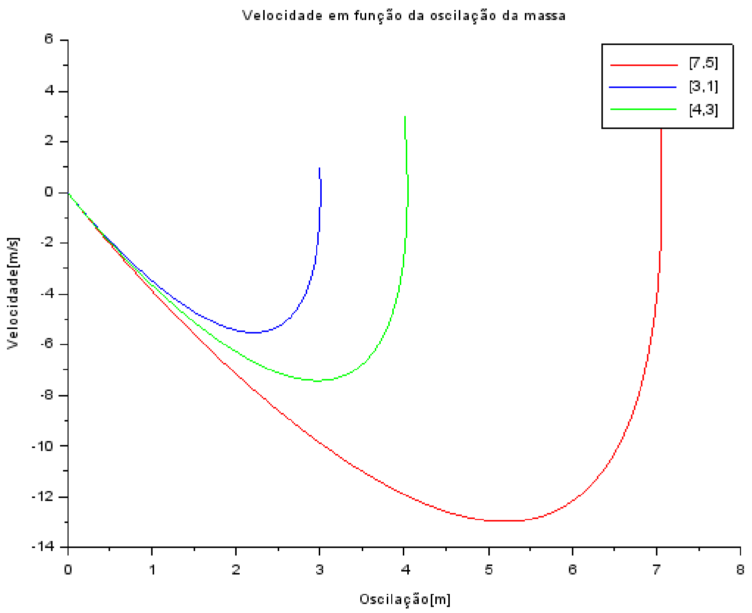

Figura 11 - Velocidade em função da posição da massa

Por fim, para obter-se os polos reais distintos, usa-se $k = 15$ N/m, com o qual são calculados os seguintes polos.

$$z' = s' = -5 - \sqrt{10}$$

$$z'' = s'' = -5 + \sqrt{10}$$

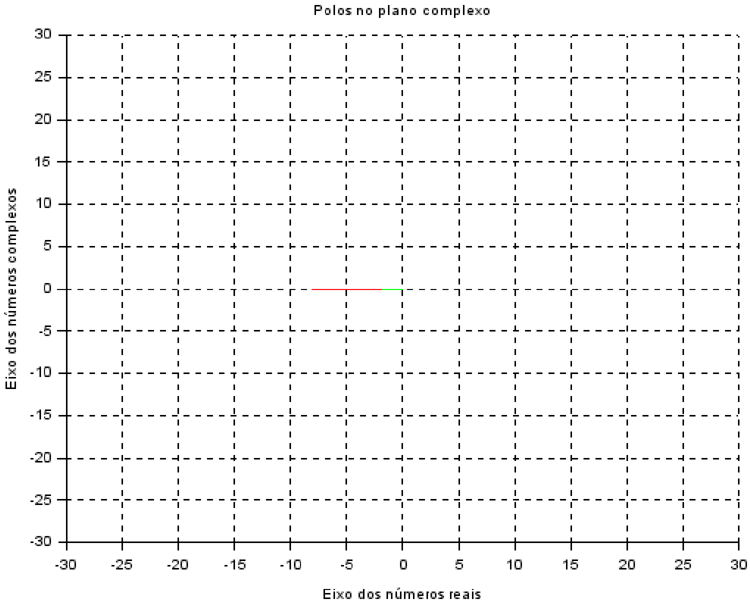

Figura 12 - Polos no plano complexo

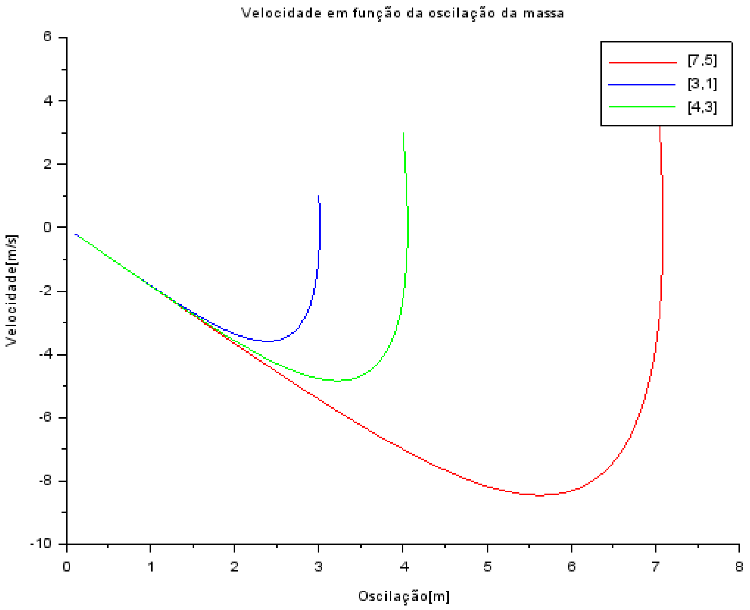

Figura 13 - Velocidade em função da posição da massa

3 BIBLIOGRAFIA

Autor desconhecido – **Lista E** – Acesso em 28/09/2020. Documento PDF disponível no site da disciplina de PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos.

4 APÊNDICE

4.1 Código 1

```
// Definindo os parâmetros do sistema:
m=1 // Massa do corpo [kg];
c=10; // Constante de amortecimento [N.s/m]
k=400; // Constante da mola [N/m]
// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -c/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];
// Montando o sistema:
massa_mola_amort=syslin('c',A,B,C,D);
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u=ones(t);
// Condições iniciais:
x0=[0;0];
// Além de calcular a saída y, a função csim também permite obter o estado x:
[y,x]=csim(u,t,massa_mola_amort,x0);
// Abrindo uma nova janela de gráficos:
xset('window',1)
// Mostrando o resultado da simulação:
plot2d(t,x(1,:),2)
xtitle('Oscilação da massa','t[s]','Deformação da mola/Posição da massa [m]')
// Abrindo uma nova janela de gráficos:
xset('window',2)
// Mostrando o resultado da simulação:
plot2d(t,x(2,:),2)
xtitle('Velocidade da massa','t[s]','Velocidade da massa [m/s]')
```

4.2 Código 2

```
// Definindo os parâmetros do sistema:
m=1 // Massa do corpo [kg];
c=10; // Constante de amortecimento [N.s/m]
k=400; // Constante da mola [N/m]
// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -c/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];
// Montando o sistema:
massa_mola_amort=syslin('c',A,B,C,D);
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
```

```
// Definindo a entrada:
u=zeros(t);
// Condições iniciais:
x01=[7;5];
x02=[3;1];
x03=[4;3];
// Além de calcular a saída y, a função csim também permite obter o estado x:
[y1,x1]=csim(u,t,massa_mola_amort,x01);
[y1,x2]=csim(u,t,massa_mola_amort,x02);
[y3,x3]=csim(u,t,massa_mola_amort,x03);
// Abrindo uma nova janela de gráficos:
xset('window',1)
// Mostrando o resultado da simulação:
plot2d(x1(1,:),x1(2,:),style=color("red"))
plot2d(x2(1,:),x2(2,:),style=color("blue"))
plot2d(x3(1,:),x3(2,:),style=color("green"))
xtitle('Velocidade em função da oscilação da massa','Oscilação[m]','Velocidade[m/s]')
leg = legend(['[7,5]';'[3,1]';'[4,3]'])
// Abrindo uma nova janela de gráficos:
xset('window',2)
// Plotando os polos (mudar de acordo com o caso simulado):
r1=-5 // Parte real do primeiro polo
img1=-5*sqrt(15) // Parte imaginária do primeiro polo
r2=-5 // Parte real do segundo polo
img2=5*sqrt(15) // Parte imaginária do segundo polo
q=gcf()
q.background = -2;
v=gca()
v.data_bounds = [-30,-30;30,30];
xgrid();
plot2d([0 r1],[0 img1],style=color("red"))
plot2d([0 r2],[0 img2],style=color("green"))
xtitle('Polos no plano complexo','Eixo dos números reais','Eixo dos números complexos')
```