ESCOLA POLITÉCNICA DA USP

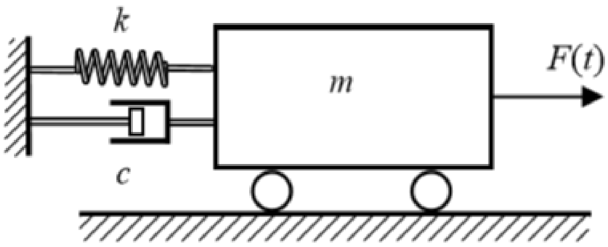
LISTA E

Nome: Wallace Moreira e Silva
Número USP: 10823772
Disciplina: PME 3380

São Paulo, 22 de Outubro de 2020

1. EXERCÍCIO 1)

1 – Obtenha as equações de estado e a função de transferência do seguinte sistema, e simule para uma entrada F(t) do tipo degrau (experimente outros tipos de entrada também), considerando a deformação x(t) da mola como saída



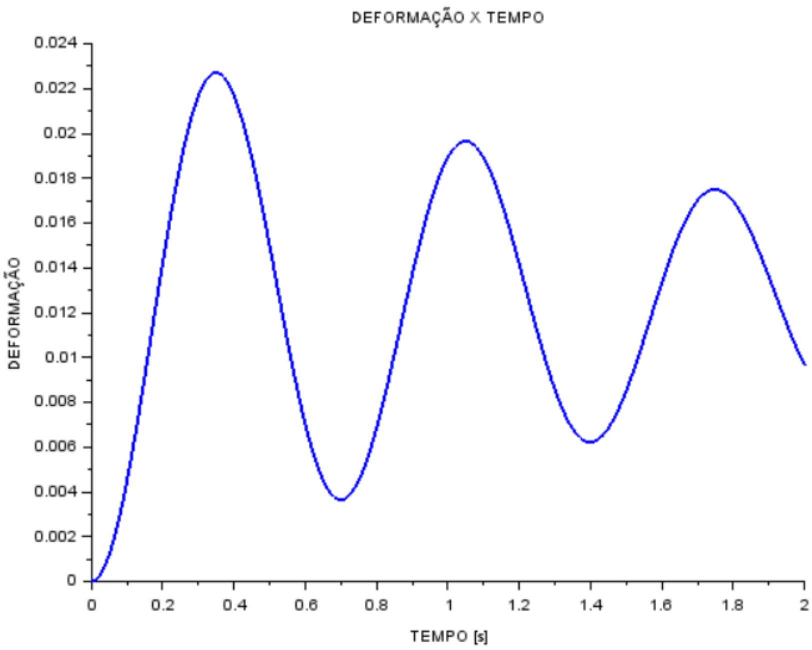
Simule o sistema para diferentes valores de m, c e k, de tal forma que se tenha uma simulação para cada um dos três casos a seguir:

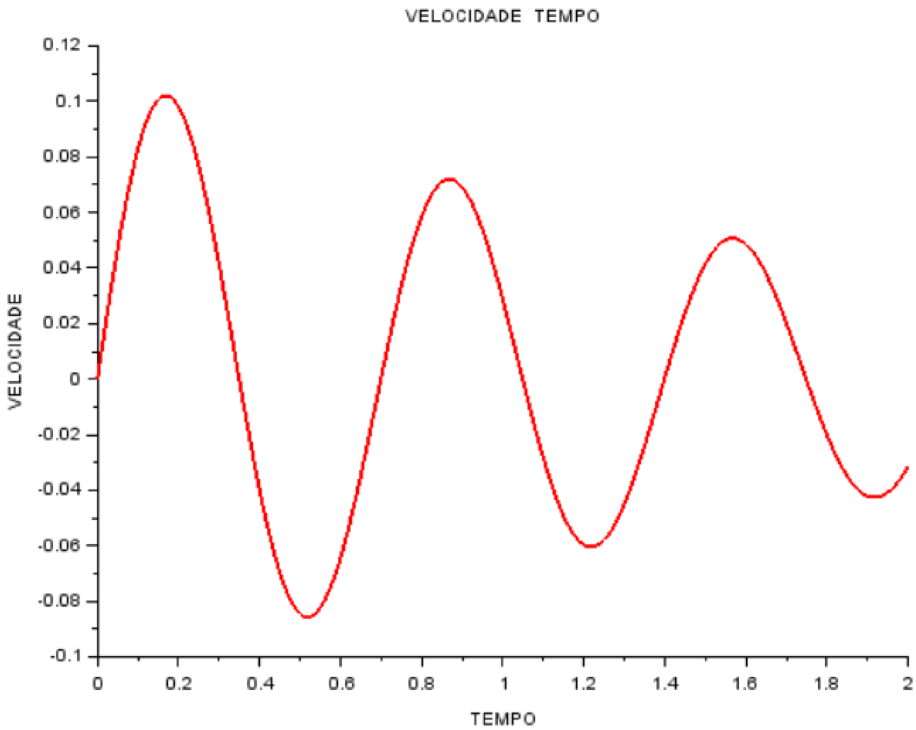
$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1 , \qquad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = 1 , \qquad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} > 1$$

Posteriormente, calcule os autovalores da matriz A e calcule as raízes do polinômio no denominador da função de transferência e compare. Estas raízes (e os autovalores) são os polos do sistema. Para o caso $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$ *observe que as raízes (e também os autovalores) são números complexos. Verifique que o módulo deste número complexo é igual à frequência natural do sistema massa-mola amortecedor. Verifique ainda que dividindo o módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo se obtém o coeficiente de amortecimento. Observe que a frequência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do polo.*

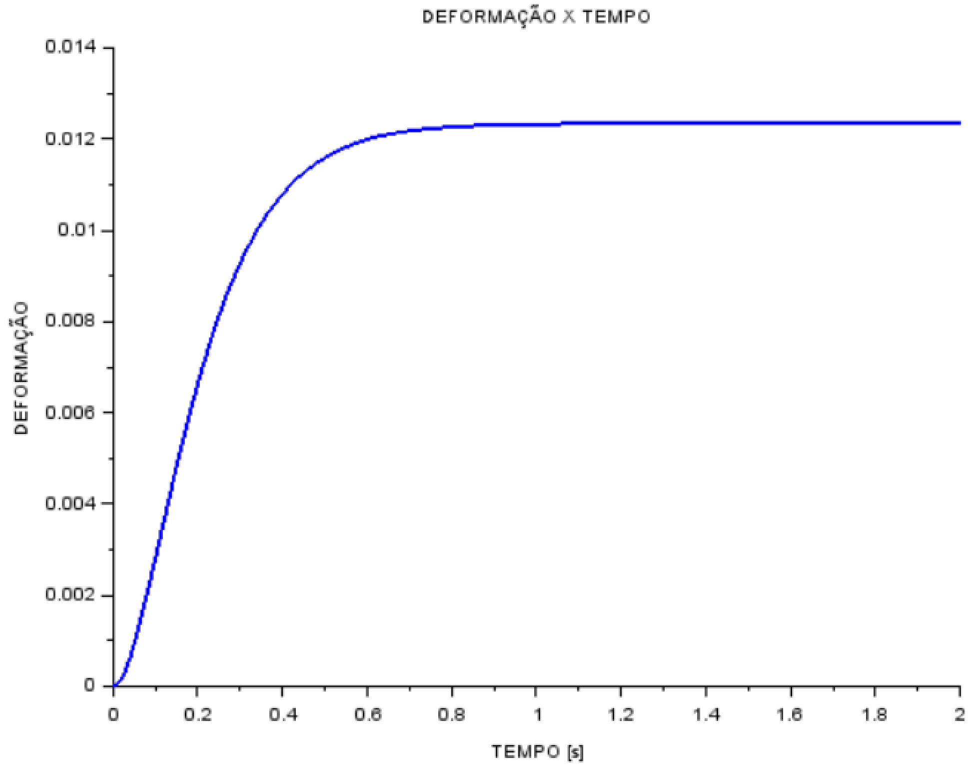
1.1 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA - 1)

$\underline{\boldsymbol{m} = \mathbf{1};\ \boldsymbol{c} = \mathbf{1};\ \boldsymbol{k} = \mathbf{81};\ \boldsymbol{\zeta} < 0}$

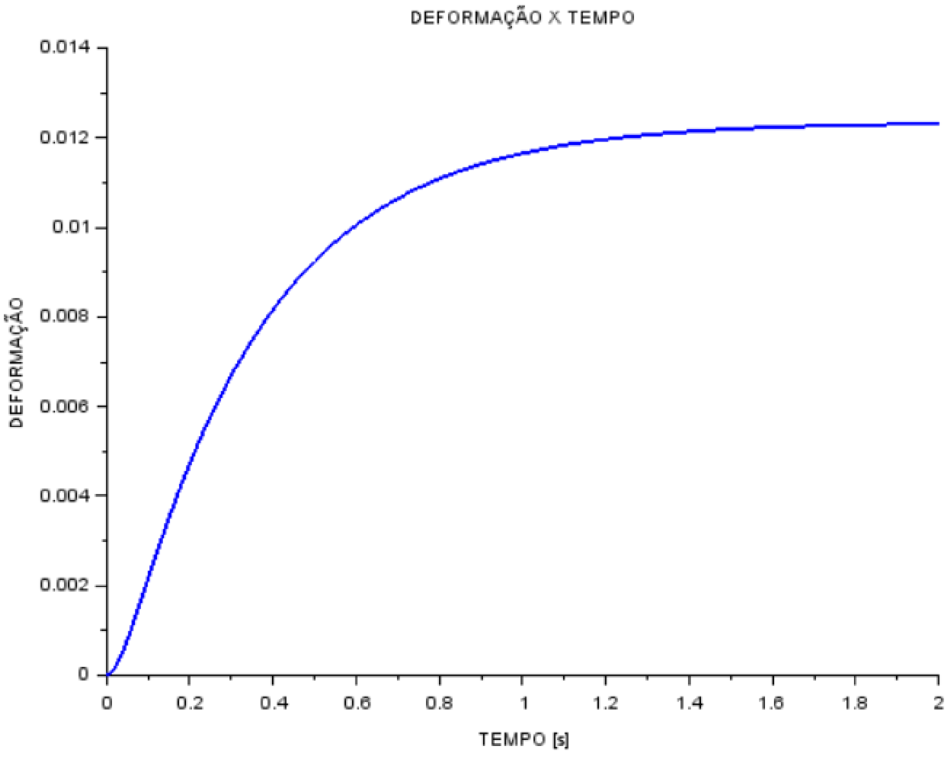




$\underline{m = 1;\ c = 18;\ k = 81;\ \zeta = 1}$



$\underline{m = 1;\ c = 30;\ k = 81;\ \zeta > 1}$



1.2 EQUACIONAMENTO DO SISTEMA

O sistema a ser equacionado a seguir é composto por um bloco de massa m, um amortecedor de intensidade b e uma mola de coeficiente de elasticidade k:

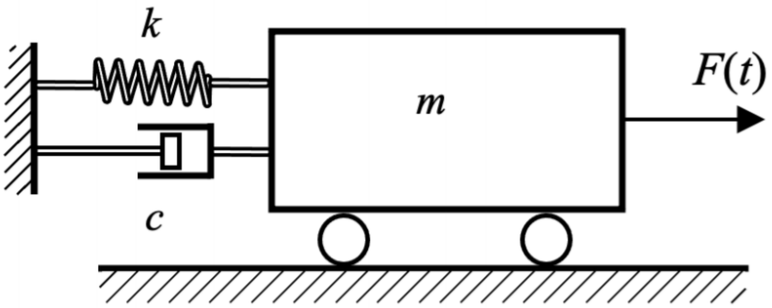


Figura 1 - Sistema a ser analisado

A equação diferencial que rege o movimento vem da Teoria do Movimento do Baricentro, e pode ser escrita da seguinte forma:

$$m\ddot{x} = f(t) - b\dot{x} - k \tag{1}$$

Pode-se escrever o sistema na forma matricial em função do parâmetro de deslocamento, simplesmente rearranjando a equação (1), obtendo a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t) \tag{2}$$

Tendo este sistema matricial formulado, é possível resolver a equação diferencial desejada aplicado uma transformada de Laplace no equacionamento (2) no qual pode-se considerar a variável $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ como respectivamente x_1 e x_2 (com condições iniciais nulas), de forma a obter a seguinte equação:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \tag{3}$$

2. ANÁLISE DO SISTEMA

Podemos ancorar uma análise desse sistema calculado o determinando da Matriz A da equação (2), analisando a princípio o seu determinante, calculando, portanto, seus autovalores α1 de α2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-c}{m} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$detA = \begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-c}{m} - \alpha \end{vmatrix} \; na \; qual \begin{cases} \alpha 1 = -3 + 9\sqrt{1}1 \\ \alpha 2 = -3 - 9\sqrt{1}1 \end{cases} \tag{5}$$

Podemos obter a frequência natural do sistema como também o coeficiente de amortecimento a partir de α1 de α2:

$$w = \sqrt{\frac{-k}{m}} = 30 \; rad/s$$

$$lembrando \; que \; w = |\alpha 1|^2 = |\alpha 2|^2 \tag{6}$$

$$\frac{|Re(w)|}{|w|} = \frac{3}{30} \tag{7}$$

Verificasse, portanto, que o s autovalores da matriz A coincidem com as raízes do polinômio G(s) com $\zeta < 1$, além do mais, pode-se calcular a frequência de oscilação pela módulo da parte imaginária dessas mesmas raízes:

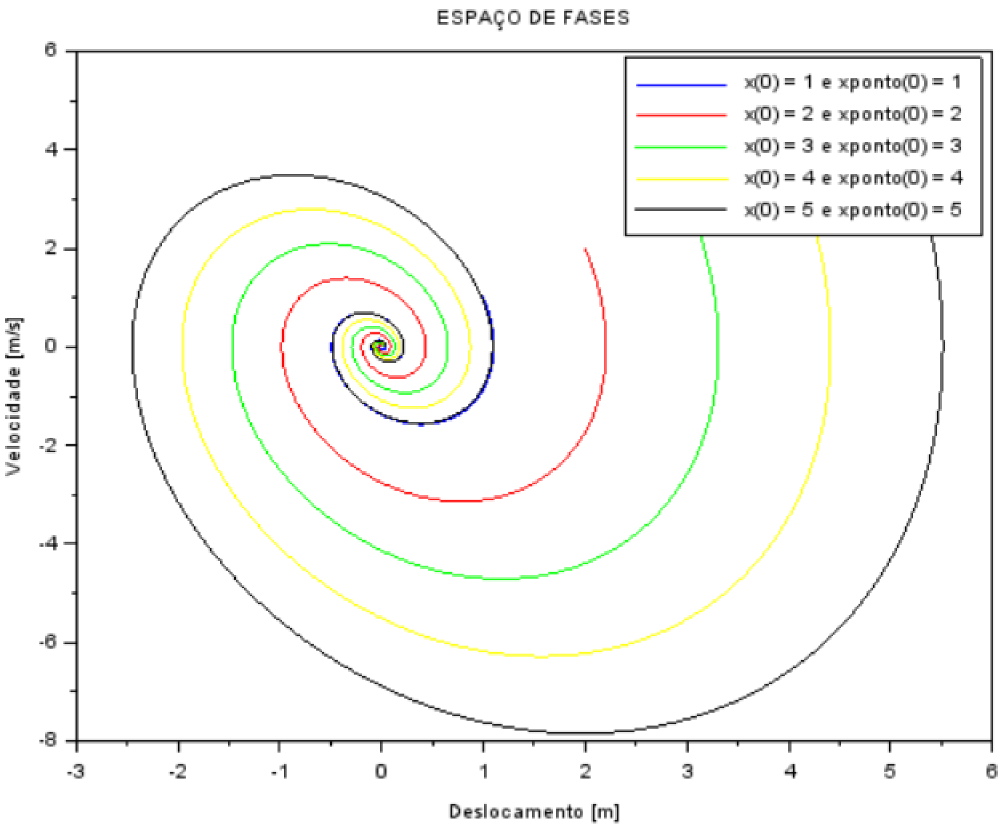
$$\left| 9\sqrt{1}1 \right| = 29,84962 rad/s \tag{8}$$

2. SEGUNDO EXERCÍCIO

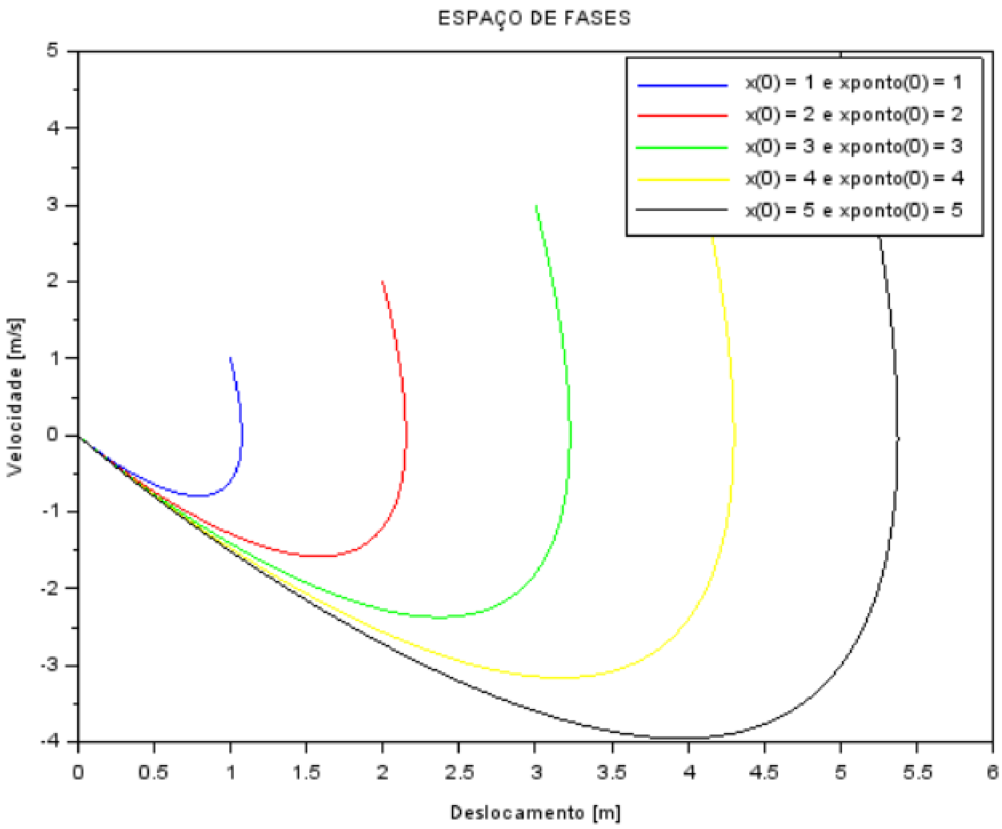
Simule o sistema do exercício para entrada nula e diferentes condições iniciais não nulas. Mostre o gráfico de v por x, e experimente mudar os parâmetros do sistema, tal que se obtenha 3 situações diferentes: polos complexos, polos reais e iguais, e polos reais e distintos. O resultado pretendido são três figuras. Na primeira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os polos sejam complexos. Na segunda figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os polos sejam reais e iguais. Na terceira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os polos sejam reais e distintos. Para cada figura construa outra figura mostrando os polos correspondentes no plano complexo. Observe a ligação entre o comportamento transitório e a posição dos polos no plano complexo.

2.1 REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

1. Duas raízes complexas (c = 1)



2. Duas raízes reais e idênticas (c = 4)



3. Duas raízes reais e distintas (c = 8)