PME 3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Agenor de Toledo Fleury

LISTA E

Vitória Menino Campos 10874175

22 de outubro de 2020

EXEMPLO: ANÁLISE TRANSITÓRIA NO SCILAB

Na análise transitória estamos interessados em observar o comportamento do sistema ao longo do tempo, principalmente a parcela transitória (aquela que diminui e desaparece ao longo do tempo). Um modo de obter a resposta transitória a partir do modelo é a simulação numérica do modelo matemático, ou seja, fazer a integração numérica das equações diferenciais que representam o comportamento do sistema. Por meio do Scilab foi gerada a Figura 1 para as seguintes condições iniciais: m=1; b=10; k=900.

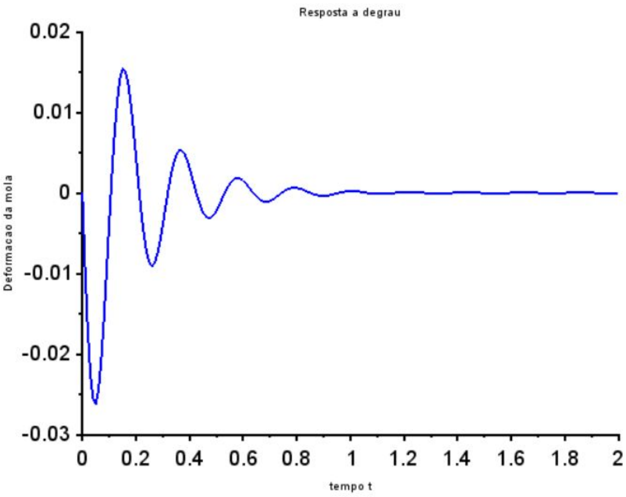


Figura 1: Resposta do sistema a deformação da mola

A simulação do sistema pode ser feita também usando a representação do sistema no espaço de estados, ou seja, usando as matrizes A, B, C, e D. Com os mesmo parâmetros anteriores foi gerado, além do gráfico de resposta ao degrau da deformação da mola, um gráfico da velocidade da mola no tempo, na Figura 2:

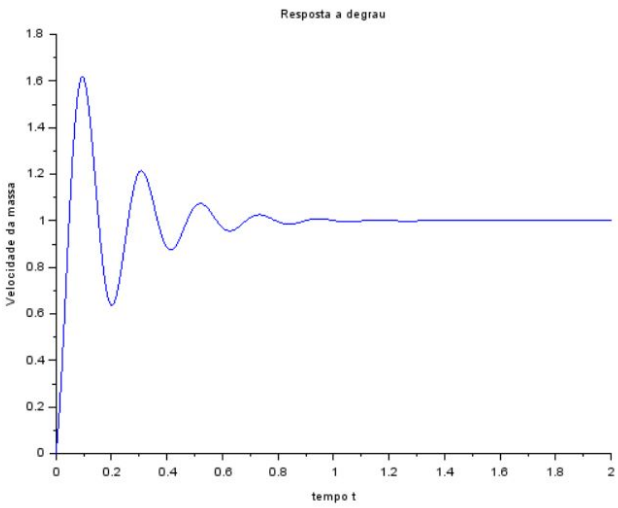
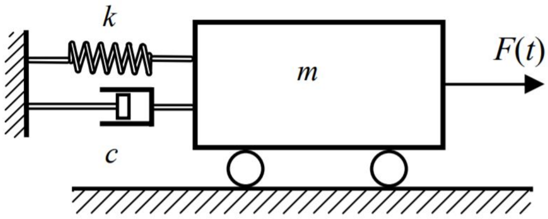


Figura 2: Resposta do sistema a velocidade da mola

EXERCÍCIO:

(I)- Considerando o seguinte sistema, para simular para uma entrada F(t) do tipo degrau, considerando a deformação x(t) da mola como saída, temos que começar escrevendo as equações que regem seu movimento:



Pelo teorema do baricentro temos:

$$m \,.\, x'' + b \,.\, x' + k \,.\, x = u$$

Reescrevendo com variáveis de estado:

$$x'_1 = x_2$$
$$x'_2 = \frac{-k}{m}x_1 + \frac{-b}{m}x_2 + u$$

Representando na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} . \, u$$

Para simular o sistema consideramos a saída x_1 igual a Y e a entrada u. Ao aplicar a transformada de Laplace na equação (2) e resolvendo o sistema para x_1, encontramos a função de transferência do sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+bs+k}$$

(II) Simulando o sistema para $\xi = 0.5$, os parâmetros de entrada foram: b = 4N.s/m ; m= 1kg e k=16N/m:

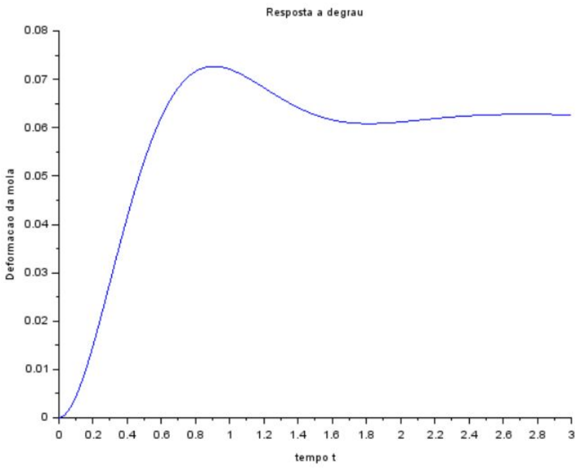


Figura 3: Deformação caso $\xi = 0.5$

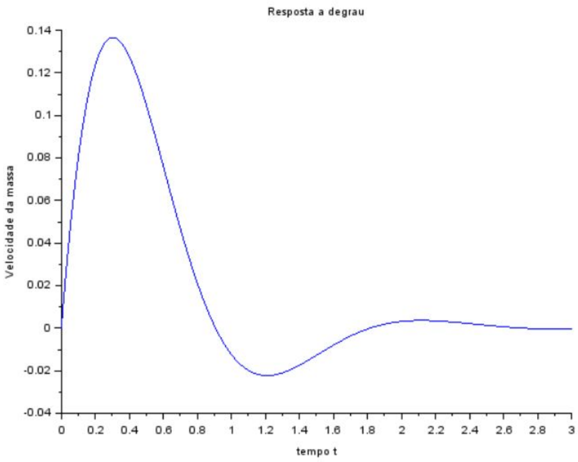


Figura 4: Velocidade caso $\xi = 0.5$

(III) Simulando o sistema para $\xi = 1$, os parâmetros de entrada foram: b= 8N.s/m; m=1kg e k= 16N/m :

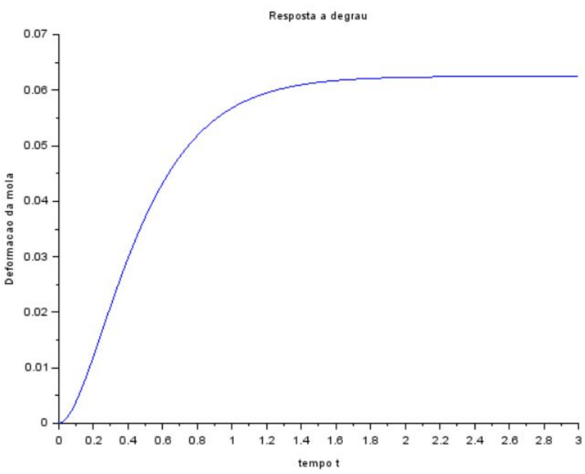


Figura 5: Deformação caso $\xi = 1$

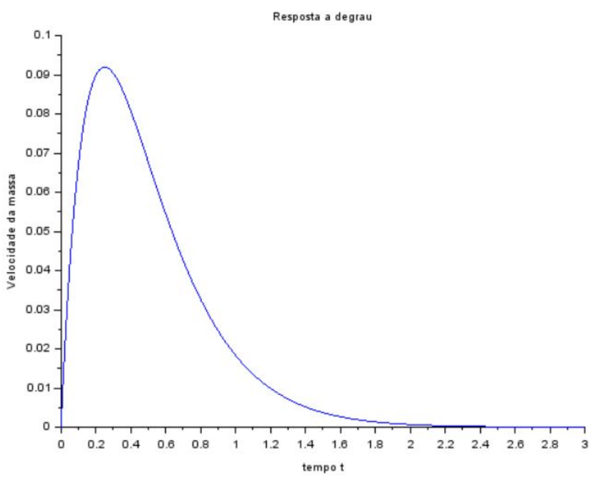


Figura 6: Velocidade caso $\xi = 1$

(IV) Simulando o sistema para $\xi = 1.5$, os parâmetros de entrada foram: b= 16N.s/m; m=1kg e k= 16N/m:

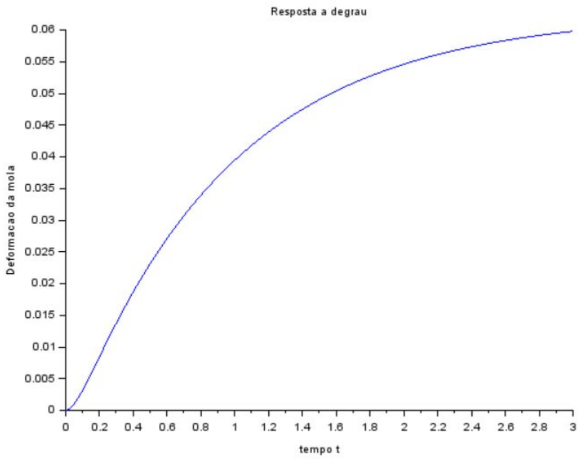


Figura 7: Deformação caso $\xi = 1.5$

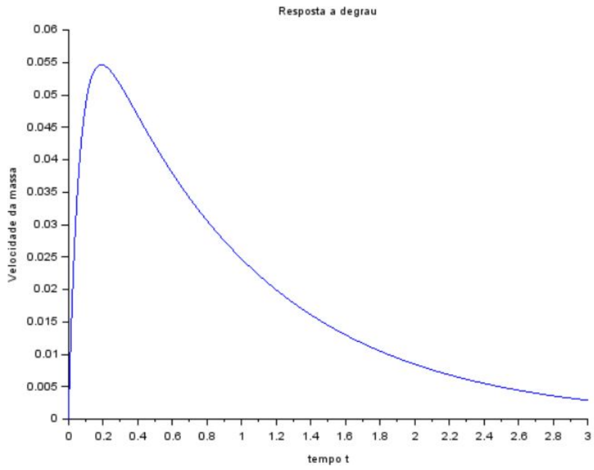


Figura 8: Velocidade caso $\xi = 1.5$

LIÇÃO DE CASA: PARTE 1

a. Considerando o exercício anterior, calcule os autovalores da matriz A e calcule as raízes do polinômio no denominador da função de transferência e compare. Estas raízes (e os autovalores) são os pólos do sistema.

Os autovalores são calculados a partir do determinante de (A-Ix) igual a zero.

$$\det \begin{vmatrix} -x & -1-x \\ \frac{-k}{m} - x & \frac{-b}{m} - x \end{vmatrix} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{m}x + \frac{k}{m} = 0$$

- Para $\xi = 0.5$: $x_1 = -2 - 2\sqrt{3}i$ e $x_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$;
- Para $\xi = 1$: $x_1 = x_2 = -4$
- Para $\xi = 1.5$: $x_1 = 4(\sqrt{3} - 2)$ e $x_2 = -4(\sqrt{3} + 2)$

b. Para o caso $\xi = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$, observe que as raízes (e também os autovalores) são números complexos.

No item a foi calculado o caso $\xi = 0.5 < 1$, onde percebemos que os autovalores, que são as raízes, realmente são números complexos.

c. Verifique que o módulo desse número complexo é igual à freqüência natural do sistema massa-mola amortecedor.

$$\sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4 \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{16}{1}} = 4$$

Portanto, o módulo da raiz complexa igual a frequência natural do sistema massa-mola amortecedor.

d. Verifique ainda que dividindo o módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo se obtém o coeficiente de amortecimento.

$$\frac{\textit{módulo da parte real}}{\textit{módulo do número complexo}} = \frac{2}{4} = 0.5 = \xi$$

Portanto, a divisão do módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo é igual ao coeficiente de amortecimento.

e. Observe que a freqüência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do pólo.

$$\omega_o = \omega\sqrt{1 - \xi^2} = 4\ .\ \sqrt{1 - 0.25} = 3.46 = |2\sqrt{3}|$$

LIÇÃO DE CASA: PARTE 2

Simule o sistema do exercício para entrada nula e diferentes condições iniciais não nulas. Mostre o gráfico de v por x, e experimente mudar os parâmetros do sistema, tal que se obtenha 3 situações diferentes: pólos complexos, pólos reais e iguais, e pólos reais e distintos. Para cada figura construa outra figura mostrando os pólos correspondentes no plano complexo. Observe a ligação entre o comportamento transitório e a posição dos pólos no plano complexo. O resultado pretendido são três figuras:

a. Na primeira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam complexos.

   Considerando os parâmetros para o caso $\xi = 0.5$, onde b=4, k=16, m=1, considerando u=0 e variando as condições iniciais do vetor x_o no intervalo de -4 a 4, a figura 9 foi obtida:

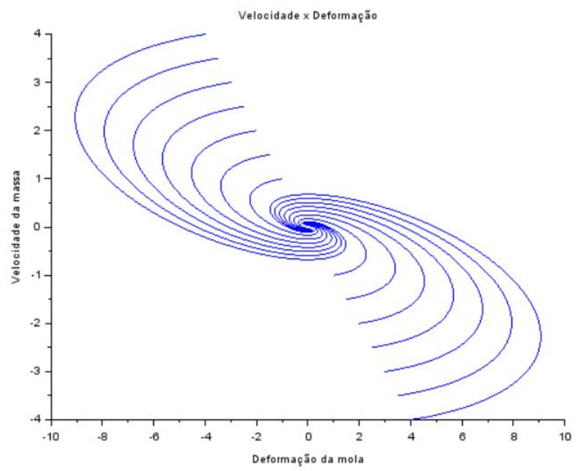


Figura 9: Deformação x Velocidade caso $\xi = 0.5$

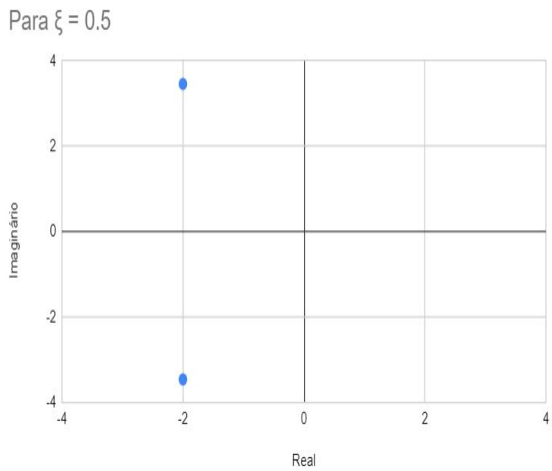


Figura 10: Plano complexo caso $\xi = 0.5$

b. Na segunda figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e iguais.

Considerando os parâmetros para o caso $\xi = 1$, onde b=8, k=16, m=1, considerando u=0 e variando as condições iniciais do vetor x_o no intervalo de -4 a 4, a figura 11 foi obtida:

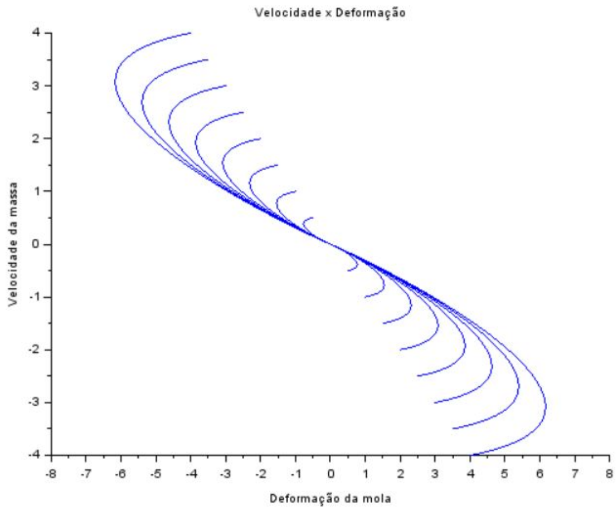


Figura 11: Deformação x Velocidade caso $\xi = 1$

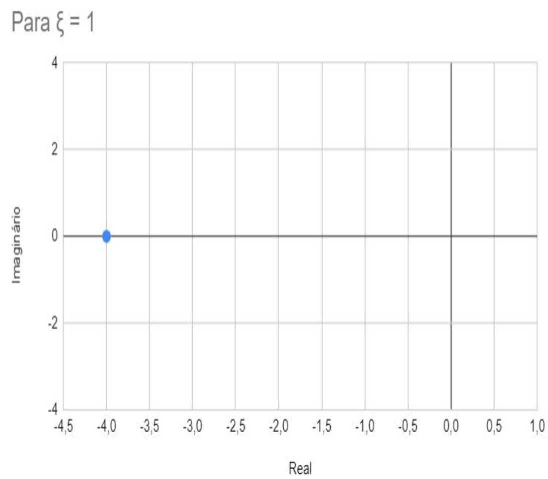


Figura 12: Plano complexo caso $\xi = 1$

c. <u>Na terceira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e distintos.</u>

Considerando os parâmetros para o caso $\xi = 1.5$, onde b=16, k=16, m=1, considerando u=0 e variando as condições iniciais do vetor x_o no intervalo de -4 a 4, a figura 13 foi obtida:

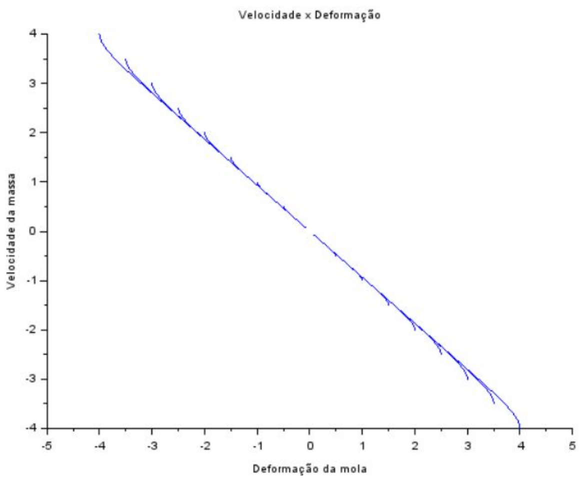


Figura 13: Deformação x Velocidade caso $\xi = 1.5$

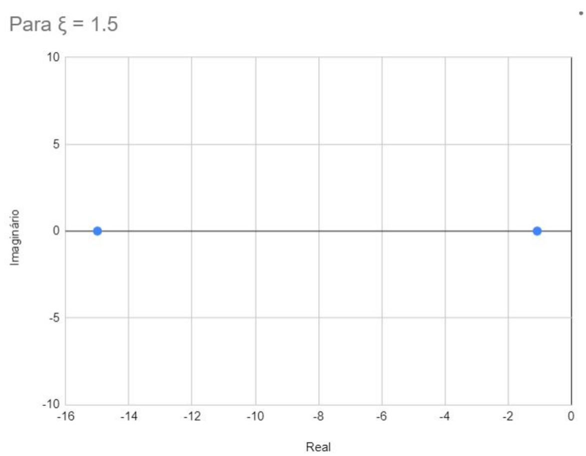


Figura 14: Plano complexo caso $\xi = 1.5$

CÓDIGO:

```
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;b=16;k=16;
// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -b/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];
// Montando o sistema:
suspensao=syslin('c',A,B,C,D);
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u=zeros(t);
// No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
x0e=[2;-2]; // neste caso, x1(0)=0 e x2(0)=0
// Alem de calcular a saida y, a função csim também permite obter o estado x:
[y,x]=csim(u,t,suspensao,x0e);
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,y,2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Deformacao da mola')
// Podemos plotar o grafico do estado x2, por exemplo:
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',2)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(x(2,:),y,2)
xtitle('Resposta a degrau','Deformação','Velocidade do bloco')
```

Obs: Código usado no exemplo do professor adaptado ao problema, modificando os parâmetros e as condições iniciais a casa questão.