

**Nome: Gabriel José Camargo Fuoco**

**Nº USP: 10769351**

**PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos**

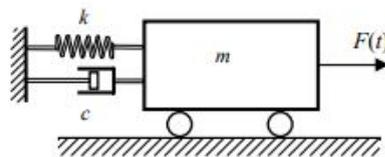
## Introdução

O objetivo desta atividade é familiarizar o aluno com a **Função de Transferência (G(s))**, sua determinação a partir das equações de estado do sistema e suas aplicações na análise transitória, através da implementação de **G(s)** a fim de simular o comportamento de um sistema massa-mola-amortecedor no tempo, em SciLab.

### Questão 0

a)

Obtenha as equações de estado e a função de transferência do seguinte sistema, e simule para uma entrada  $F(t)$  do tipo degrau (experimente outros tipos de entrada também), considerando a deformação  $x(t)$  da mola como saída:



As equações de estado e a função de transferência obtidas para o sistema do enunciado estão representadas na Figura 1.1:

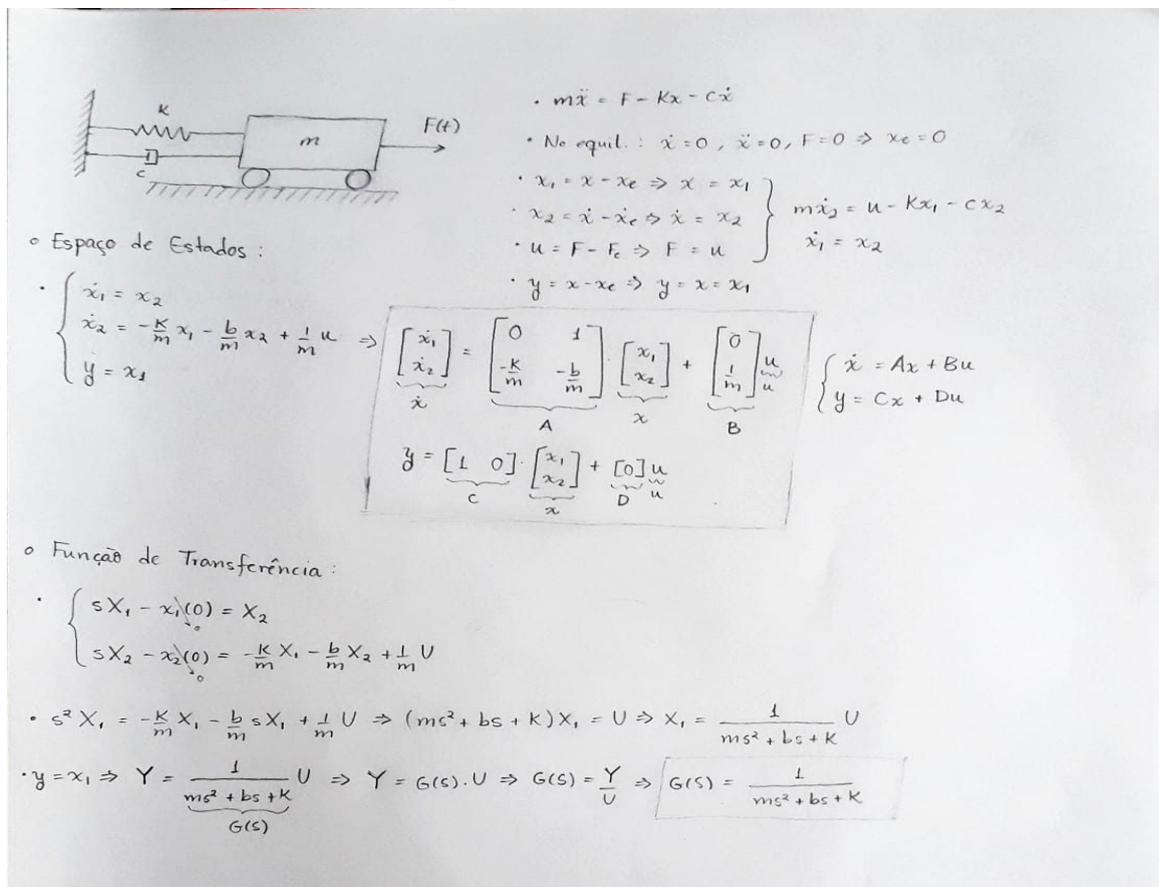


Figura 1.1

b)

Simule o sistema para diferentes valores de  $m$ ,  $c$  e  $k$ , de tal forma que se tenha uma simulação para cada

um dos três casos a seguir:  $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$ ,  $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = 1$ ,  $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} > 1$

O código usado para simular, em SciLab, o sistema utilizando a Função de Transferência é o contido na Figura 1.2:

```
1 clear
2 m=1;b=10;k=900;
3 n=1;
4 d=poly([k b m], 's', 'coeff');
5 G=syslin('c', n/d)
6 t=0:0.01:2;
7 u=ones(t);
8 x0=[0;0];
9 [y]=csim(u,t,G,x0);
10 xset('window',1)
11 xset('thickness',2)
12 xset('font-size',4)
13 plot2d(t,y,2)
14 xtitle('Resposta a degrau', 'tempo-t', 'Deformacao da mola')
15
```

Figura 1.2

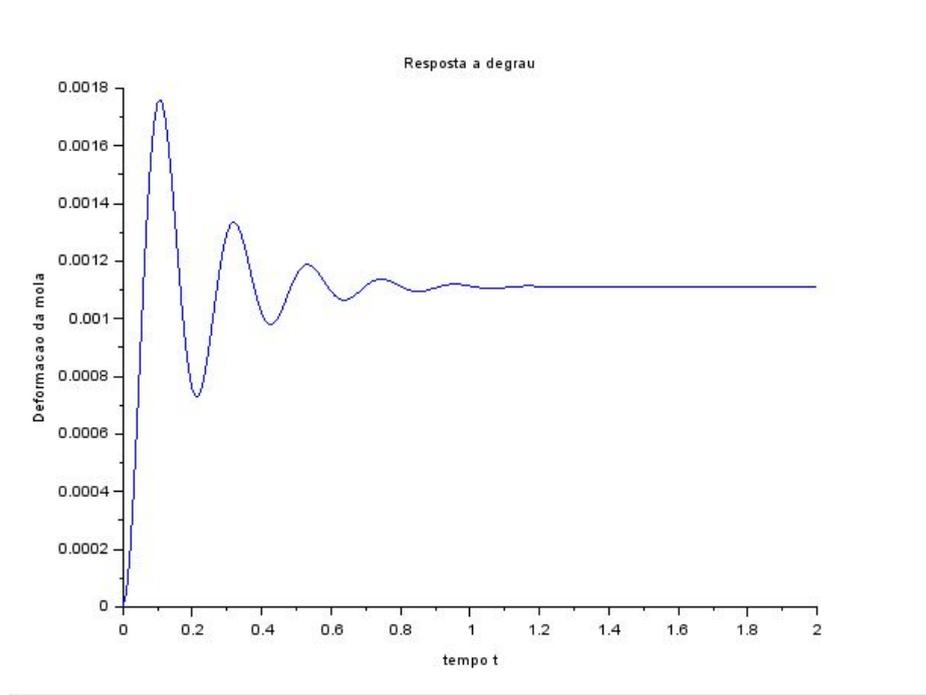
O código usado para simular, em SciLab, o sistema utilizando a representação em espaço de estados é o contido na Figura 1.3:

```
1 clear
2 m=1;b=10;k=900;
3 A=[0 1; -k/m -b/m];
4 B=[0;1/m];
5 C=[1 0];
6 D=[0];
7 suspensao=syslin('c',A,B,C,D);
8 t=0:0.01:2;
9 u=zeros(t);
10 x0e=[10;-5];
11 [y,x]=csim(u,t,suspensao,x0e);
12 xset('window',1)
13 plot2d(t,y,2)
14 xtitle('Resposta a degrau', 'tempo-t', 'Deformacao da mola')
15 xset('window',2)
16 plot2d(x(1,:),x(2,:),2)
17 xtitle('Resposta a degrau', 'deformacao-x', 'Velocidade da massa')
18
```

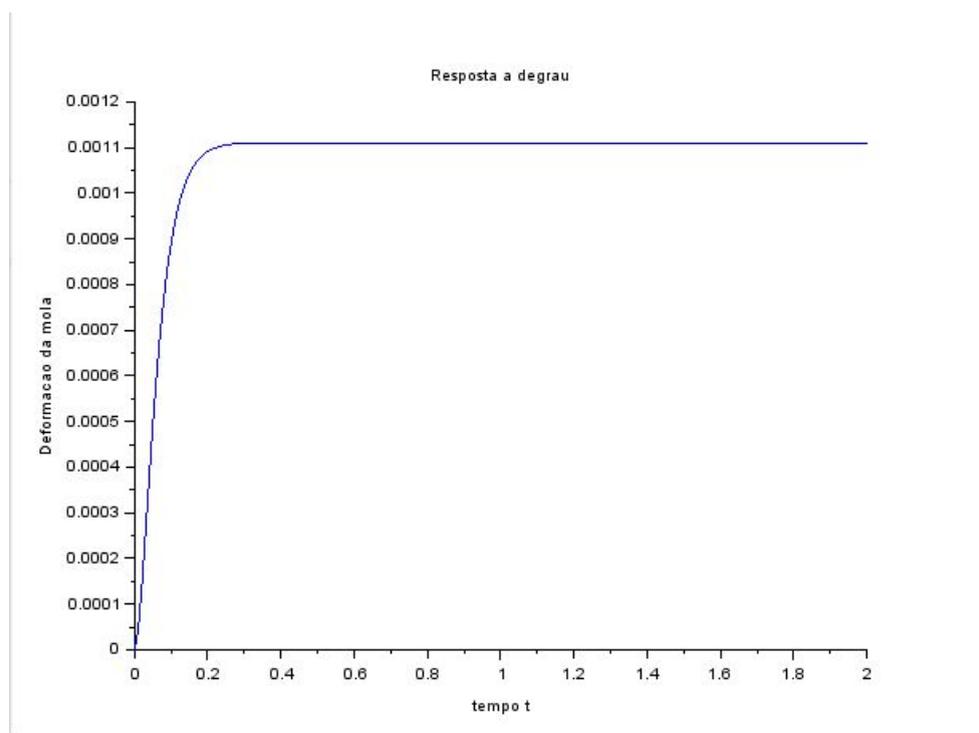
Figura 1.3

Os resultados particular para cada um dos casos mencionados no enunciados estão representados a seguir:

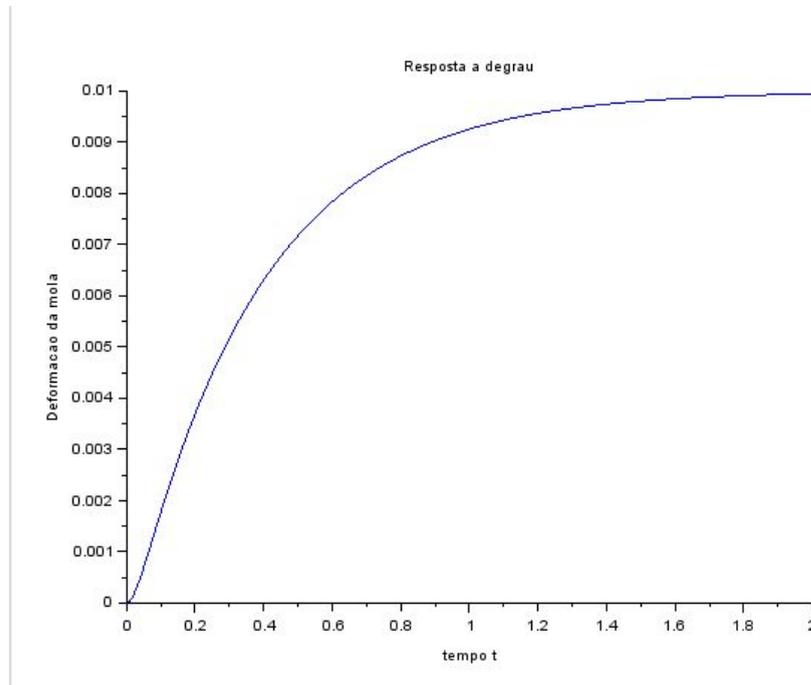
- $\zeta = 0,166$



- $\zeta = 1$



- $\zeta = 2$



## Questão 1

1 – Considerando o exercício anterior, calcule os autovalores da matriz A e calcule as raízes do polinômio no denominador da função de transferência e compare. Estas raízes (e os autovalores) são os pólos do sistema. Para o caso  $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$ , observe

que as raízes (e também os autovalores) são números complexos. Verifique que o módulo deste número complexo é igual à frequência natural do sistema massa-mola-amortecedor. Verifique ainda que dividindo o módulo da parte real do número complexo pelo módulo do número complexo se obtém o coeficiente de amortecimento. Observe que a frequência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do pólo.

O código usado para determinar as raízes do polinômio do denominador da Função de Transferência é o contido na Figura 2.1:

```
clear
m=1;b=10;k=900;
d=poly([k b m], 's', 'coeff');
S=roots(d);
```

Figura 2.1

O código usado para determinar os autovalores da matriz A, e todos demais resultados pedidos no enunciado, é o contido na Figura 2.2:

```
clear
m=1;b=40;k=100;
A = [0 1; -k/m -b/m];
v = spec(A);
mod = abs(v(1,:));
zeta = b/(2*sqrt(k*m));
w = sqrt(k/m);
w_n = w.*sqrt(1-zeta^2);
f_n = w_n/2*pi;
r = real(v(1,:));
i = imag(v(1,:));
z = r/i;
```

Figura 2.2

Para o caso em que  $\zeta = 0,166$ , com  $m = 1$ ,  $c = 10$  e  $k = 900$ , obtemos as seguintes raízes do polinômio e autovalores (Figura 2.3):

- Com os autovalores sendo da forma:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

```
s =
-5. + 29.580399i
-5. - 29.580399i

v =
-5. + 29.580399i
-5. - 29.580399i
```

Figura 2.3

Os resultados comprovam que as raízes do polinômio e os autovalores são complexos e iguais.

Utilizando o código da Figura 2.2 e os mesmos valores de parâmetros, obtemos os seguintes valores para módulo do número complexo e frequência natural do sistema (Figura 2.4):

- Com frequência natural do sistema definida como:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

```
mod =  
30.  
w =  
30.
```

Figura 2.4

Os resultados comprovam que o módulo do número complexo e a frequência natural do sistema são iguais.

Utilizando o código da Figura 2.2 e os mesmos valores de parâmetros, obtemos os seguintes valores para a razão entre o módulo da parte real do número complexo e a parte imaginária e coeficiente de amortecimento ( $\zeta$ ) do sistema (Figura 2.5):

```
zeta =  
0.1666667  
z =  
0.1690309
```

Figura 2.5

Os resultados comprovam que a razão entre o módulo da parte real do número complexo e a parte imaginária e coeficiente de amortecimento ( $\zeta$ ) do sistema são iguais. A diferença é devido a arredondamentos nos resultados das operações.

Utilizando o código da Figura 2.2 e os mesmos valores de parâmetros, obtemos os seguintes valores para o módulo da parte imaginária do número complexo e frequência de oscilação do sistema (Figura 2.6):

- Com frequência de oscilação definida como:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}.$$

```
i =  
29.580399  
w_n =  
29.580399
```

Figura 2.6

Os resultados comprovam que o módulo da parte imaginária do número complexo e a frequência de oscilação do sistema são iguais.

## Questão 2

**2 – Simule o sistema do exercício para entrada nula e diferentes condições iniciais não nulas. Mostre o gráfico de  $v$  por  $x$ , e experimente mudar os parâmetros do sistema, tal que se obtenha 3 situações diferentes: pólos complexos, pólos reais e iguais, e pólos reais e distintos. O resultado pretendido são três figuras. Na primeira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam complexos. Na segunda figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e iguais. Na terceira figura mostre simultaneamente os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros, tais que os pólos sejam reais e distintos. Para cada figura construa outra figura mostrando os pólos correspondentes no plano complexo. Observe a ligação entre o comportamento transitório e a posição dos pólos no plano complexo.**

- Para  $\zeta < 1$  (pólos complexos) e com autovalores iguais a:

$$v = \begin{cases} -5. + 29.580399i \\ -5. - 29.580399i \end{cases}$$

Obtemos os seguinte gráficos de  $v \times x$ , para três condições iniciais distintas (Figura 3.1):

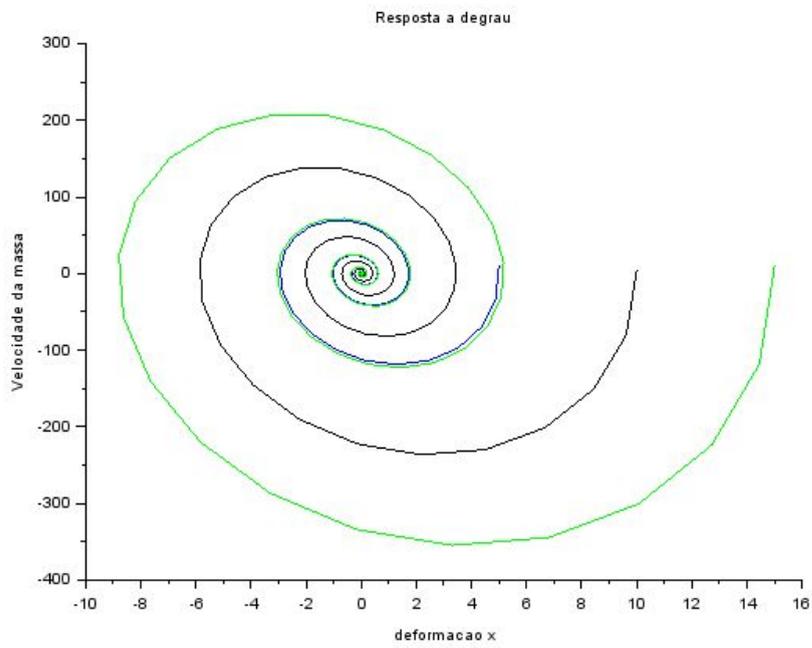


Figura 3.1

- Para  $\zeta = 1$  (pólos reais e iguais) e com autovalores iguais a:

$$\mathbf{v} =$$

$$-30.$$

$$-30.$$

Obtemos os seguinte gráficos de  $v \times x$ , para três condições iniciais distintas (Figura 3.2):

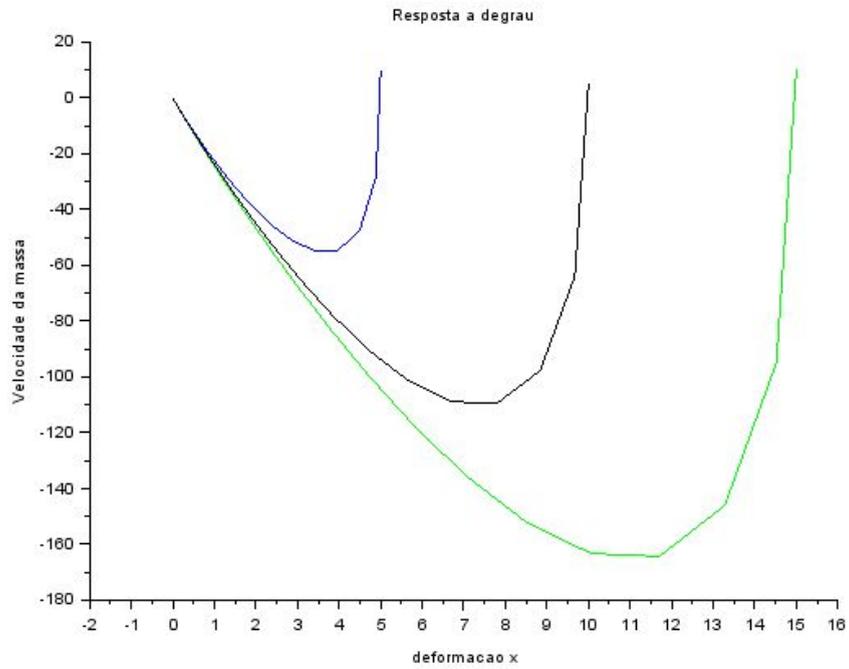


Figura 3.2

- Para  $\zeta > 1$  (pólos reais e distintos) e com autovalores iguais a:

$$v =$$

$$-3.8196601$$

$$-26.18034$$

Obtemos os seguinte gráficos de  $v \times x$ , para três condições iniciais distintas (Figura 3.3):

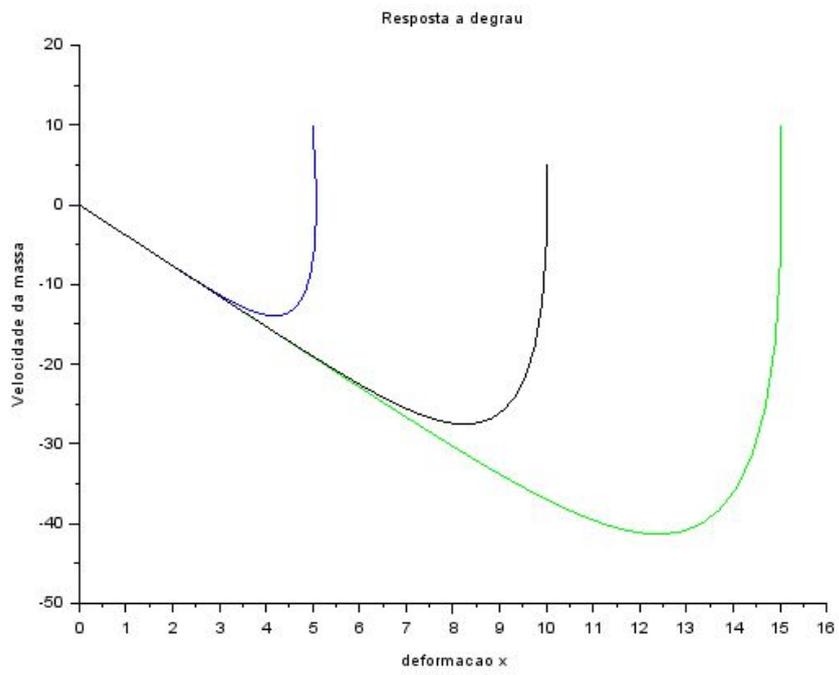


Figura 3.3